Jean Leray

Particules et singularités des ondes

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 4 (1960-1961), exp. nº 8, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1960-1961__4__A8_0>

PARTICULES ET SINGULARITÉS DES ONDES ([1])

par Jean LERAY

Introduction

Dans un espace X , de dimension ℓ , de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_\ell)$, soit un opérateur différentiel linéaire d'ordre m

$$a(x, \frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{i+\dots+j\leq m} a_{i\dots j}(x) \frac{\partial^{i+\dots+j}}{\partial x_1^i \dots \partial x_\ell^j} \quad ;$$

nommons onde toute solution u de l'équation

$$(1) \qquad a(x, \frac{\partial}{\partial x}) u(x) = 0 \quad .$$

Notons x un point de X et $p = (p_1, \dots, p_\ell)$ un covecteur d'origine x , par exemple un gradient :

$$s_x = (s_{x_1}, \dots, s_{x_\ell}) \text{ , où } s_{x_i} = \frac{\partial s}{\partial x_i} \quad ;$$

soit une fonction $G(x, p)$; nommons trajectoires les solutions du système d'Hamilton

$$(2) \qquad \frac{dx_1}{G_{p_1}(x, p)} = \dots = \frac{dx_\ell}{G_{p_\ell}} = -\frac{dp_1}{G_{x_1}(x, p)} = \dots = -\frac{dp_\ell}{G_{x_\ell}}, \quad G(x, p) = 0 \quad ,$$

qui se compose d'un système différentiel ordinaire et d'une intégrale première de ce système. Ces trajectoires sont évidemment les caractéristiques de l'équation de Jacobi

$$(3) \qquad G(x, V_x) = 0 \quad ,$$

qui est une équation non-linéaire du premier ordre.

([1]) Une conférence intitulée "Application de la Mécanique analytique à la Théorie des ondes" fut faite à ce Séminaire, le 22 avril 1961 ; son contenu était extrait de [7], I, II, IV, et de la Conférence reproduite ci-dessus, qui fut faite, en 1959, dans le cycle "Applications des équations non-linéaires à la physique théorique", organisé par Louis de BROGLIE.

Supposons donnée sur X une mesure

$$\rho(x)\ dx_1 \wedge \dots \wedge dx_\ell$$

on peut de façon invariante, c'est-à-dire indépendante du choix des coordonnées locales, faire correspondre à chaque équation d'ondes un système d'Hamilton : c'est ce que montre le § 1. Peut-on alors faire correspondre à une onde des trajectoires ? Le § 2 rappelle que le théorème d'Ehrenfest n'est énoncé que pour les ondes de Schrödinger et de Dirac. Le § 3 rappelle, en le précisant, comment certaines solutions de l'équation de Jacobi (V_x grand) approximent certaines ondes (ondes courtes). Enfin, le § 4 résume l'emploi que la théorie des singularités des ondes fait de celle des trajectoires.

§ 1. Système d'Hamilton correspondant à une équation d'ondes.

1. Fonctions de $(x\ ,\ p)$ définies par un opérateur $a(x\ ,\ \frac{\partial}{\partial x})$.

Notons

$$g(x\ ,\ p) = \sum_{i+\dots+j=m} a_{i\dots j}(x)\ p_1^i \dots p_\ell^j \quad ,$$

$$g'(x\ ,\ p) = \sum_{i+\dots+j=m-1} a_{i\dots j}(x)\ p_1^i \dots p_\ell^j \quad ;$$

on a donc, ... désignant des termes d'ordres $< m-1$

$$a(x\ ,\ \frac{\partial}{\partial x}) = g(x\ ,\ \frac{\partial}{\partial x}) + g'(x\ ,\ \frac{\partial}{\partial x}) + \dots \quad . \tag{4}$$

Notons

$$g_{x.p}(x\ ,\ p) = \frac{1}{\rho(x)} \sum_j \frac{\partial^2[\rho(x)\ g(x\ ,\ p)]}{\partial x_j\ \partial p_j} \quad . \tag{5}$$

On a le

THÉORÈME 1. - La donnée de l'opérateur $a(x\ ,\ \frac{\partial}{\partial x})$ sur l'espace X , muni de la mesure $\rho\ dx_1 \wedge \dots \wedge dx_\ell$, définit d'une façon indépendante du choix des coordonnées locales, les deux fonctions

$$g(x\ ,\ p)\ , \qquad 2g'(x\ ,\ p) - g_{x.p}(x\ ,\ p) \quad .$$

$g(x, p)$ est appelé <u>polynôme caractéristique</u> de a ; si a est <u>self-adjoint</u>, alors $2g' - g_{x.p} = 0$; nous noterons

$$(6) \qquad g(x, p) + g'(x, p) - \frac{1}{2} g_{x.p}(x, p) = G(x, ip) \quad .$$

<u>Preuve</u>. - Si τ est un paramètre,

$$e^{-\tau V(x)} \, a(x, \frac{\partial}{\partial x}) \, e^{\tau V(x)}$$

est un polynôme en τ de degré m, dont le coefficient principal est le polynôme caractéristique $g(x, V_x)$; ce polynôme est donc indépendant du choix des coordonnées locales.

Soit $a^*(\frac{\partial}{\partial x}, x)$ l'adjoint de $a(x, \frac{\partial}{\partial x})$ c'est-à-dire l'opérateur différentiel tel que

$$\int_X \rho(x) \, v(x) \, a(x, \frac{\partial}{\partial x}) \, u(x) \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_\ell = \int_X \rho(x) \, u(x) \, a^*(\frac{\partial}{\partial x}, x) \, v(x) \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_\ell \quad ,$$

quelles que soient les fonctions u et v à supports compacts, on a

$$a^*(\frac{\partial}{\partial x}, x) \, v(x) = \frac{1}{\rho(x)} \sum_{i+\dots+j \leq m} \frac{\partial^{i+\dots+j}}{\partial x_1^i \dots \partial x_\ell^j} [\rho(x) \, a_{i\dots j}(x) \, v(x)] \quad ;$$

donc

$$a^*(\frac{\partial}{\partial x}, x) = (-1)^m g(x, \frac{\partial}{\partial x}) + (-1)^m g_{x.p}(x, \frac{\partial}{\partial x}) + (-1)^{m-1} g'(x, \frac{\partial}{\partial x}) + \dots$$

l'opérateur

$$a + (-1)^{m-1} a^* = 2g'(x, \frac{\partial}{\partial x}) - g_{x.p}(x, \frac{\partial}{\partial x}) + \dots$$

et par suite son polynôme caractéristique

$$2g'(x, p) - g_{x.p}(x, p)$$

sont indépendants du choix des coordonnées locales ; ce polynôme est nul quand cet opérateur est nul, c'est-à-dire quand a est self-adjoint.

<u>Note</u>. - Le polynôme caractéristique de $aa^* - a^* a$ se rencontre aussi : HÖRMANDER l'emploie à l'étude des équations sans solution [4].

2. Caractéristiques et système d'Hamilton de a.

Commençons par rappeler une notion très classique : on nomme caractéristiques les hypersurfaces

$$K : \ k(x) = 0$$

solutions de l'équation non-linéaire du premier ordre

$$g(x , k_x) = 0$$

d'après le théorème 1, elles sont attachées de façon indépendantes du choix des coordonnées, à l'équation des ondes (1).

Ce même théorème 1 attache à l'équation des ondes (1), indépendamment du choix des coordonnées, l'équation de Jacobi (3) et le système d'Hamilton (2), G étant défini par (4), (5), (6). Plus généralement, on peut faire correspondre à cette équation d'ondes (1) l'ensemble des équations de Jacobi (3) et des systèmes d'Hamilton (2), où $G(x , p)$ est défini par la relation :

$$g(x , p) + g'(x , p) - \frac{1}{2} g_{x.p}(x , p) + \ldots = G(x , ip) \qquad , \tag{7}$$

$\ldots$ désignant un polynôme quelconque en p, de degré $< m - 1$, à coefficients fonction de x.

3. Exemple : L'équation non relativiste de Schrödinger.

C'est l'équatioh

$$H(x , \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}) - \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \qquad , \tag{8}$$

H étant un opérateur réel, self-adjoint, d'ordre 2, ne contenant pas $\frac{\partial}{\partial x_1}$; soit

$$H(x , \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}) = G(x , \frac{\partial}{\partial x}) + G'(x , \frac{\partial}{\partial x}) + G''(x) \qquad ,$$

G et G' étant homogène en $\frac{\partial}{\partial x}$ d'ordres 2 et 1 ; on a donc

$$2G'(x , p) - G_{x.p}(x , p) = 0$$

l'équation de Jacobi que (6) fait correspondre à l'équation de Schrödinger est donc

$$G(x , V_x) + V_{x_1} = 0 \qquad , \tag{9}$$

conformément à la physique théorique.

4. Exemple : L'équation de Dirac ; l'équation relativiste de Schrödinger.

Ce sont des équations du type

$$(10) \qquad \sum_{j=1}^{4} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} + A^j\right)\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^j} + A_j\right) u + Bu = 0 \quad ,$$

où

$$x^1 = - x_1 \ , \quad A^1 = - A_1 \ , \quad x^j = x_j \ , \quad A^j = A_j \quad \text{pour} \quad j = 2 , 3 , 4 \quad ;$$

$A^j(x)$ sont les composantes du potentiel ; $B(x)$ est une fonction du potentiel, du champ, de la masse ; dans l'équation de Dirac, B et u sont des spineurs.

L'une des équations de Jacobi que (7) fait correspondre à (10) est

$$(11) \qquad \sum_j (V_{x_j} - A^j)(V_{x^j} - A_j) = 1 \quad ;$$

ses caractéristiques sont les solutions du système d'Hamilton ($p^1 = - p_1$, $p^j = p_j$ pour $j = 2 , 3 , 4$) :

$$\frac{dx_1}{p_1 - A_1} = \frac{dx_2}{p_2 - A_2} = \dots = \frac{dp^1}{\sum_j \frac{\partial A^j}{\partial x_1}(p_j - A_j)} = \frac{dp^2}{\sum_j \frac{\partial A^j}{\partial x_2}(p_j - A_j)} = \dots$$

$$\sum_j (p^j - A^j)(p_j - A_j) = 1 \quad ;$$

en notant $q_j = p_j - A_j$ on transforme ce système en celui de l'électron relativiste :

$$(12) \qquad \frac{dx_1}{q_1} = \frac{dx_2}{q_2} = \dots = \frac{dq^1}{\sum_j \left(\frac{\partial A^j}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_j}\right) q_j} = \frac{dq^2}{\sum_j \left(\frac{\partial A^j}{\partial x_2} - \frac{\partial A^2}{\partial x_j}\right) q_j} = \dots$$

$$\sum_j q_j \, q^j = 1 \ , \quad (q^1 = - q_1 \ , \quad q^j = q_j \quad \text{pour} \quad j = 2 , 3 , 4) \quad .$$

§ 2. Le théorème d'Ehrenfest.

Ce théorème classique [2] associe à une onde, de carré sommable, des valeurs probables

$$\overline{x} , \overline{p} , \overline{G_x} , \overline{G_p}$$

de

$$x , p , G_x , G_p$$

qui vérifient le système, analogue à celui d'Hamilton :

$$\frac{d\overline{x_1}}{\overline{G}_{p_1}} = \frac{d\overline{x_2}}{\overline{G}_{p_2}} = \dots = -\frac{d\overline{p_1}}{\overline{G}_{x_1}} = -\frac{d\overline{p_2}}{\overline{G}_{x_2}} = \dots \quad .$$

Ce théorème suppose que l'équation d'ondes est celle de Schrödinger ou de Dirac ; cette restriction est sans doute essentielle.

§ 3. Solutions de l'équation de Jacobi approximant des ondes courtes.

Supposons que (6) ou (7) fasse correspondre à une équation d'ondes une fonction $G(x , p)$ réelle ; soit $V(x)$ une solution réelle de l'équation de Jacobi :

$$G(x , V_x) = 0 \quad .$$

Par chaque point de X passe une caractéristique et une seule de cette solution $V(x)$; ces caractéristiques de $V(x)$ sont nommées trajectoires des particules associées à $V(x)$: le long de ces trajectoires, $(x , p = V_x)$ vérifie le système d'Hamilton (2).

Attribuons à ces particules une densité $W^2(x)$, telle que leur masse se conserve ;

cette condition s'énonce comme suit :

$$(13) \qquad W^2(x) \ \rho(x) \sum_{j=1}^{\ell} (-1)^j \, G_{p_j}(x , p) \ dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_\ell$$

est une forme différentielle invariante de ces trajectoires ;

ou encore : $W(x)$ vérifie l'équation linéaire du premier ordre

$$(14) \qquad \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} [W^2(x) \ \rho(x) \ G_{p_j}(x , V_x)] = 0 \qquad ;$$

ou enfin : si l'on prend comme coordonnées dans X

t , telle que le long des trajectoires $dx_j = G_{p_j}\, dt$, $dp_j = - G_{x_j}\, dt$,

$y_2 , \dots , y_\ell$ constantes le long des trajectoires (c'est-à-dire : intégrales premières),

alors [2]

$$W(x) \sqrt{\rho(x) \frac{D(x_1 , \dots , x_\ell)}{D(t , y_2 , \dots , y_\ell)}} \tag{15}$$

est fonction des seules variables $(y_2 , \dots , y_\ell)$.

Supposons qu'on ait, M et N_i étant des constantes,

$$|V_x| > M , \quad |(\frac{\partial}{\partial x})^p V| < N_0 M \quad (p = 2 , \dots , 2m)$$

$$|W| > N_1 , \quad |(\frac{\partial}{\partial x})^p W| < N_2 \quad (p = 1 , \dots , 2m) \quad .$$

On a, dans ces conditions, le

THÉORÈME 2. - Si $a(x , \frac{\partial}{\partial x})$ est de type principal [3], et si, N_0 , N_1 et N_2 étant donnés, M est assez grand, alors

$$W(x)\, e^{-iV(x)}$$

est voisin d'une onde.

La preuve de ce théorème est aisée ; elle consiste à construire une fonction $R(x)$, de norme petite par rapport à celle de $W(x)$, telle que

$$a(x , \frac{\partial}{\partial x})[We^{-iV} + R] = 0 \quad .$$

Il suffit d'appliquer le théorème d'existence de Hörmander [4] - ou, éventuellement, ce qui est plus aisé, ceux de la théorie des équations elliptiques ou hyperboliques - après avoir établi la relation

---

(2) $\frac{D(\dots)}{D(\dots)}$ désigne le déterminant fonctionnel.

(3) $g_p(x , p) \neq 0$ pour $g(x , p) = 0$, p réel $\neq 0$.

(16) $$e^{iV}\, a(x\,,\,\frac{\partial}{\partial x})[We^{-iV}] =$$

$$[g(x\,,\,-iV_x) + g'(x\,,\,-iV_x) - \frac{1}{2}\, g_{x.p}(x\,,\,-iV_x)]\, W +$$

$$\frac{\rho}{2W}\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}[W^2\, \rho\, g_{p_j}(x\,,\,-iV_x)] + b[x\,,\,(\frac{\partial}{\partial x})^q V\,,\,\frac{\partial}{\partial x}]\, W \quad ,$$

où b est un opérateur différentiel d'ordre m , dont les coefficients sont fonction de x et des dérivées de V d'ordres $\leqslant m$, ces coefficients étant, par rapport à l'ensemble de ces dérivées de V , des polynômes de degrés $\leqslant m-2$.

Note. - Le théorème précédent précise des résultats connus de G. BIRKHOFF [1], M. KLINE [5] et P. LAX [6].

§ 4. Singularités des ondes.

1. Généralités.

Soit une équation d'ondes holomorphe. Soit $u(x)$ une onde ayant, sur une hypersurface analytique

$$K : \; k(x) = 0$$

une singularité de l'un des types

$$u(x) = u'(x)\; k^r(x) + \dots \qquad (r \neq \text{entier} > 0)$$

$$= u'(x)\; k^r(x)\, \log k(x) + \dots \qquad (r = \text{entier} > 0) \quad ,$$

$u'(x)$ et ... étant des fonctions holomorphes.

D'après un théorème classique, K doit être une caractéristique :

(17) $$g(x\,,\,k_x) = 0 \;\text{ sur }\; K \quad .$$

K est donc engendré par des caractéristiques de l'équation du premier ordre (17), c'est-à-dire par des bicaractéristiques de $a(x\,,\,\frac{\partial}{\partial x})$; nommons-les trajectoires des particules associées à K : elles vérifient le système d'Hamilton (2), où l'on a remplacé G par g .

Plus précisément, on peut choisir l'équation $k(x) = 0$ de K , et définir sur K une fonction $\lambda(x)$ de façon à avoir, le long de ces trajectoires

$$(18)\begin{cases}\dfrac{dx_1}{g_{p_1}(x\,,\,p)} = \dfrac{dx_2}{d_{p_2}} = \cdots = -\dfrac{dp_1}{g_{x_1}(x\,,\,p)} = -\dfrac{dp_2}{g_{x_2}} = \cdots = \dfrac{d\lambda}{g'(x\,,\,p) - 1/2\; g_{x.p}} \\ g(x\,,\,p) = 0\,,\quad dk = p_1\,dx_1 + \cdots + p_\ell\,dx_\ell \quad .\end{cases}$$

Alors, le long de ces trajectoires $u'(x)$ s'obtient par une quadrature, vu le

THÉORÈME 3. – Attribuons à ces particules la densité $u'^2(x)\; e^{2\lambda(x)}$ leur masse se conserve. Autrement dit : sur K, la forme différentielle

$$u'^2(x)\; e^{2\lambda(x)}\; \rho(x)\; \left.\frac{\sum_{j=1}^{\ell} (-1)^j\; g_{p_j}(x\,,\,p)\; dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_1}{\sum_j p_j\; dx_j}\right|_K$$

qui vaut, en les points de K où $p_1 \neq 0$:

$$u'^2(x)\; e^{2\lambda(x)}\; \frac{\rho(x)}{p_1} \sum_{i=2}^{\ell} g_{p_i}(x\,,\,p)\; dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_\ell$$

est une forme différentielle invariante de ses trajectoires.

On peut encore énoncer comme suit ce théorème : employons sur K des coordonnées

t, telle qu'on ait le long des bicaractéristiques engendrant K

$$dx_j = g_{p_j}(x\,,\,p)\; dt\,,\quad dp_j = -\,g_{x_j}(x\,,\,p)\; dt\,,\quad d\lambda = (g' - \tfrac{1}{2}\, g_{x.p})\; dt \quad ;$$

$(y_3\,,\,\ldots\,,\,y_\ell)$ constantes le long de ces bicaractéristiques ;

alors sur K,

$$(-1)^j\; u'^2(x)\; e^{2\lambda(x)}\; \frac{\rho(x)}{p_j}\; \frac{D(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_{j-1}\,,\,x_{j+1}\,,\,\ldots\,,\,x_\ell)}{D(t\,,\,y_3\,,\,\ldots\,,\,y_\ell)}\quad ,$$

qui est évidemment indépendant de j, l'est aussi de t : c'est une fonction de $(y_3\,,\,\ldots\,,\,y_\ell)$.

La preuve de ce théorème 3 consiste en le calcul de

$$a(x\,,\,\tfrac{\partial}{\partial x})[u'(x)\; k^r(x)] \quad \text{ou} \quad a[u'\; k^r \log k] \quad \text{si} \quad r = \text{entier} \geq 0 \quad ;$$

ce calcul ne diffère guère de celui qui établit (16).

2. Application au problème de Cauchy.

Envisageons, comme dans [7], I, le problème de Cauchy, d'inconnue u, à données holomorphes :

$$(19) \qquad \begin{cases} a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = v(x) \\ u(x) - w(x) \text{ s'annule } m \text{ fois sur } S \quad ; \end{cases}$$

S est une hypersurface donnée, analytique et sans singularité : $s(x) = 0$; nous supposons qu'elle n'est pas caractéristique.

D'après le théorème de Cauchy-Kowalewski, $u(x)$ est holomorphe en les points de S non caractéristiques [ceux où $g(x, s_x) \neq 0$]. En les points caractéristiques de S. $u(x)$ a une singularité, dont [7], I, décrit comme suit l'allure.

Soit $\tilde{g}(x, p)$ une quelconque des fonctions vérifiant les deux conditions suivantes :

1° $\tilde{g}(x, p)$ est, par rapport à p, homogène de degré 1 ;

2° $\tilde{g}(x, p)/g(x, p)$ est holomorphe, non nul, près de chaque élément de contact (y, s_y) de S.

Notons $x(t, y)$, $p(t, y)$ la solution du système différentiel ordinaire

$$(20) \qquad dx_j = \tilde{g}_{p_j}(x, p)\, dt \ , \quad dp_j = -\tilde{g}_{x_j}(x, p)\, dt$$

définie pour t petit, par les conditions initiales

$$(21) \qquad x(0, y) = y \ , \quad p(0, y) = s_y \ , \text{ où } y \in S \quad .$$

I de [7] constate que le système (20) possède l'intégrale première

$$g(x, p)$$

et la forme différentielle invariante

$$p_1\, dx_1 + \dots + p_\ell\, dx_\ell - g\, dt \quad ;$$

d'où le théorème 2 de [7], I :

<u>le quotient de deux quelconques des trois fonctions</u>

$$g(y\,,\,s_y)\;,\quad g(x\,,\,p)\;,\quad \frac{D(x)}{D(t\,,\,y)}$$

est une fonction holomorphe de $(t\,,\,y)$.

Les trois équations

$$g(y\,,\,s_y) = 0\;,\quad g(x\,,\,p) = 0\;,\quad \frac{D(x)}{D(t\,,\,y)} = 0 \tag{22}$$

sont donc équivalentes : elles définissent dans l'espace de coordonnées $(t\,,\,y)$ une hypersurface que $x(t\,,\,y)$ projette sur la caractéristique K tangente à S, c'est-à-dire sur la réunion des bicaractéristiques de a issues des éléments de contact caractéristiques de S.

Le théorème 1 de [7], I, affirme qu'en substituant $x(t\,,\,y)$ à x dans $u(x)$ et dans ses dérivées d'ordres $< m$ [$< n$ si $v(x) - a(x\,,\,\frac{\partial}{\partial x})\,w(x)$ s'annule $n - m$ fois sur S] on obtient des fonctions de $(t\,,\,y)$ holomorphes pour t petit et $y \in S$: la projection $x(t\,,\,y)$ uniformise $u(x)$ et ses dérivées d'ordres $< m$ [$< n$].

De ce qui précède résulte que la projection $x(t\,,\,y)$ uniformise

$$\frac{D(x)}{D(t\,,\,y)}\,a_n(x\,,\,\frac{\partial}{\partial x})\;u(x) \tag{23}$$

quand a_n est un opérateur différentiel linéaire d'ordre n.

Ces résultats de [7], I, peuvent être précisés par le théorème 3 du présent article : ce théorème donne la partie principale de la singularité de u, c'est-à-dire les valeurs prises par (23) au-dessus de K ; voici :

COROLLAIRE. - En substituant $x(t\,,\,y)$ et $p(t\,,\,y)$ à x et p dans

$$g(x\,,\,p)\;a_n(x\,,\,\frac{\partial}{\partial x})\;u(x)$$

on obtient une fonction holomorphe de $(t\,,\,y)$; sa valeur, sur l'hypersurface définie par les trois équations équivalentes (22), est donnée par la formule

$$[g(x\,,\,p)\;a_n\,(x\,,\,\frac{\partial}{\partial x})\;u(x)]\;e^{\lambda(x)}\sqrt{\frac{g(y\,,\,s_y)}{g(x\,,\,p)}}\sqrt{\frac{\rho(x)}{\rho(y)}\,\frac{s_{y_1}}{p_1}\,\frac{D(x_2\,,\,\cdots\,,\,x_\ell)}{D(y_2\,,\,\cdots\,,\,y_\ell)}} =$$

$$g_n(x\,,\,p)\;(n-m)!\;\frac{v(y) - a(y\,,\,\frac{\partial}{\partial y})\;w(y)}{s(y)^{n-m}}$$

g_n désigne le polynôme caractéristique de a_n ; $\sqrt{\cdots} = 1$ pour $t = 0$.

3. Autres applications.

Le corollaire précédent se simplifie quand on l'applique à la solution unitaire de a , que II de [7] étudie. Des quadratures portant sur cette solution unitaire donnent :

1° La solution générale du problème de Cauchy (ses singularités ont pour support, outre la caractéristique K tangente à S , les caractéristiques issues des singularités des données) ;

2° La solution élémentaire en un point y (le support de ses singularités est le conoïde de sommet y).

On peut obtenir explicitement, comme dans le corollaire précédent, la partie principale de la singularité de ces solutions : voir [7], IV et V.

On trouvera dans [7], VI, la preuve de ce qu'affirme le présent exposé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIRKHOFF (George D.). - Some remarks concerning Schrödinger's wave equation, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 19, 1933, p. 339-344 ; Quantum mechanics and asymptotic series, Bull. Amer. mat. Soc., t. 39, 1933, p. 681-700.

[2] Voir les Traités : de BROGLIE, DIRAC (wave packet), KRAMERS ou SCHIFF (Ehrenfest's theorem).

[3] HÖRMANDER (Lars). - On the theory of general partial differential operators, Acta Math., t. 94, 1955, p. 162-248.

[4] HÖRMANDER (Lars). - Differential equations without solutions, Math. Annalen, t. 140, 1960, p. 169-173.

[5] KLINE (Morris). - Asymptotic solution of linear hyperbolic partial differential equations, J. rat. Mech. and Anal., t. 3, 1954, p. 315-342.

[6] LAX (Peter D.). - Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, Duke math. J., t. 24, 1957, p. 627-646.

[7] LERAY (Jean). - Problème de Cauchy,
I : Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 389-429.
II : La solution unitaire d'un opérateur différentiel linéaire, Bull. Soc. math. France, t. 86, 1958, p. 75-96.
III : Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe, Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959, p. 81-180.
IV, V, VI (à paraître).

Voir un résumé de IV dans :

Colloque sur l'Analyse fonctionnelle [1960. Louvain], p. 7-28. - Paris, Gauthier-Villars, 1961 (Centre belge de Recherches mathématiques).

International conference on partial differential equations and continuum mechanics [1960. Madison], p. 137-157. - Madison (Wis.), 1960.