

SÉMINAIRE JANET. MÉCANIQUE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE CÉLESTE

IVAN KUPKA

Stabilité structurelle

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 4 (1960-1961),
exp. n° 7, p. 1-16

http://www.numdam.org/item?id=SJ_1960-1961__4__A7_0

© Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste
(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

STABILITÉ STRUCTURELLE

par Ivan KUPKA

1. Introduction.

La notion de stabilité structurelle a été dégagée des études sur les systèmes différentiels non linéaires commencées aux environs de 1880 par POINCARÉ, reprises vers 1920 par VAN DER POL. En effet, il était vite apparu qu'entre les systèmes différentiels linéaires étudiés précédemment et les systèmes différentiels non linéaires il existait une différence essentielle : alors que, pour les systèmes linéaires, une théorie générale était possible, il n'en n'était plus ainsi pour les systèmes non linéaires. Aussi s'est-on proposé le problème suivant : dégager une classe aussi large que possible de systèmes non linéaires considérés comme intéressants pour laquelle une théorie générale est possible.

La première difficulté est de définir les systèmes "intéressants". Les systèmes non linéaires interviennent surtout en physique. Aussi un système "intéressant" sera-t-il un système qui décrit l'évolution d'un système matériel. On peut assez facilement indiquer une propriété très importante de ces systèmes différentiels : les données numériques d'un système physique ne sont jamais connues exactement, mais seulement à une approximation aussi bonne qu'on le veut. Par conséquent ce qu'on connaît ce n'est pas le système différentiel exact régissant l'évolution du système matériel, mais un système approché aussi voisin qu'on le voudra. Pour que l'on puisse dire quoi que ce soit sur l'évolution du système, il faut que l'allure qualitative dans le plan des phases de l'ensemble des solutions du système exact décrivant des évolutions réelles du système matériel ressemble à celle de l'ensemble des solutions du système approché, et que la solution du système exact correspondant à un ensemble de conditions initiales données soit voisine à tout instant de la solution du système approché correspondant à un ensemble de conditions initiales voisines. Ces propriétés sont des propriétés de stabilité.

Avant de donner une formulation mathématique, nous allons voir sur des exemples ce qui peut se produire.

2. Exemples élémentaires.

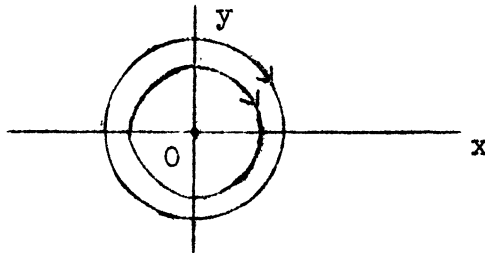
A. Oscillateur harmonique à un degré de liberté x .

Equation régissant l'oscillateur : $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. - On peut classiquement transformer cette équation en un système, en introduisant l'inconnue $y = \frac{1}{\omega} \dot{x}$.

Le système régissant l'oscillateur harmonique est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \omega y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega x \end{cases} .$$

Dans le plan de phase (plan x, y), les trajectoires sont des cercles $x^2 + y^2 = Cte$, et le point singulier $(0, 0)$.

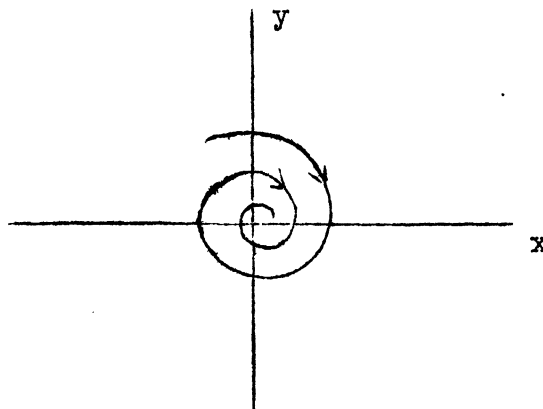


L'oscillateur harmonique est un oscillateur idéalisé, obtenu en négligeant les résistances. En général, dans le cas réel, il y a une petite résistance de la forme $k\dot{x}$, où h est un coefficient positif très petit.

Le système qui régit l'évolution d'un oscillateur réel est :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \omega y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega x - ky \end{cases} .$$

Dans le plan de phase les trajectoires sont des spirales de foyer $(0, 0)$ [k est très petit !] et le point singulier $(0, 0)$.



Les deux systèmes diffèrent d'aussi peu qu'on le voudra, et pourtant la différence entre l'allure des trajectoires dans le plan de phase est considérable. Les trajectoires fermées (cycles) ont disparu : toutes les oscillations sont amorties. Le point singulier qui était un centre devient un foyer.

Le système régissant l'oscillateur harmonique n'est donc pas un système "intéressant".

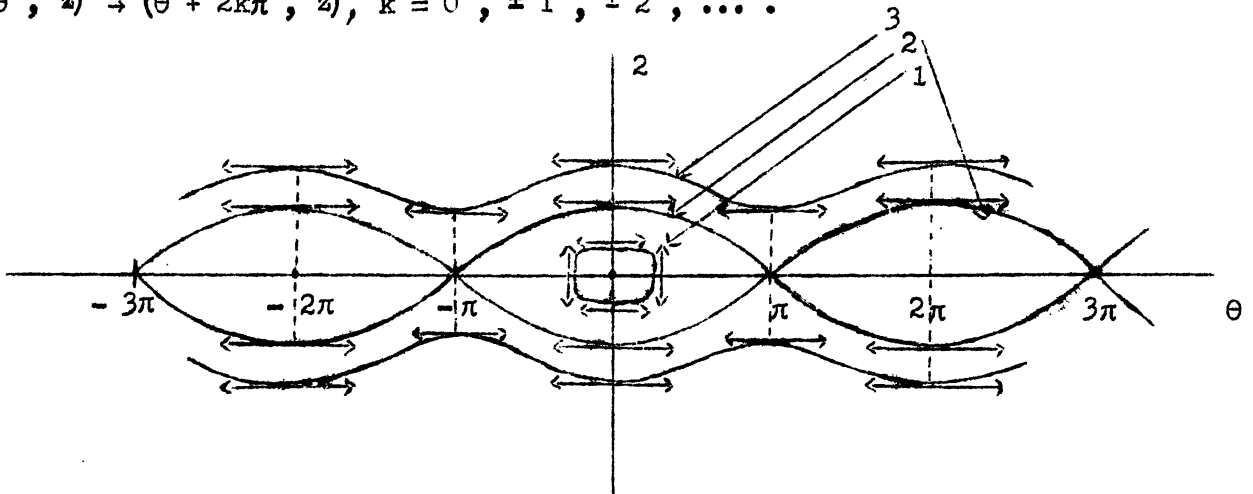
B. Pendule simple. - Si θ désigne l'angle que fait le pendule simple avec la verticale descendante, l'équation du mouvement de pendule est : $\ddot{\theta} + k \sin \theta = 0$, où $k > 0$ est une constante caractéristique du pendule.

On transforme l'équation en un système équivalent en posant $\dot{\theta} = z$:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = -k \sin \theta \end{cases} .$$

Le plan des phases (θ, z) est représenté ci-dessous. Le système est invariant par rapport à la symétrie d'axe $O\theta$ et aux translations

$$(\theta, z) \rightarrow (\theta + 2k\pi, z), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$



Les points $(k\pi, 0)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, sont singuliers :

les points $(2k\pi, 0)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, sont des centres

les points $(2k + 1)\pi, 0)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, sont des cols.

Il y a trois types de trajectoires :

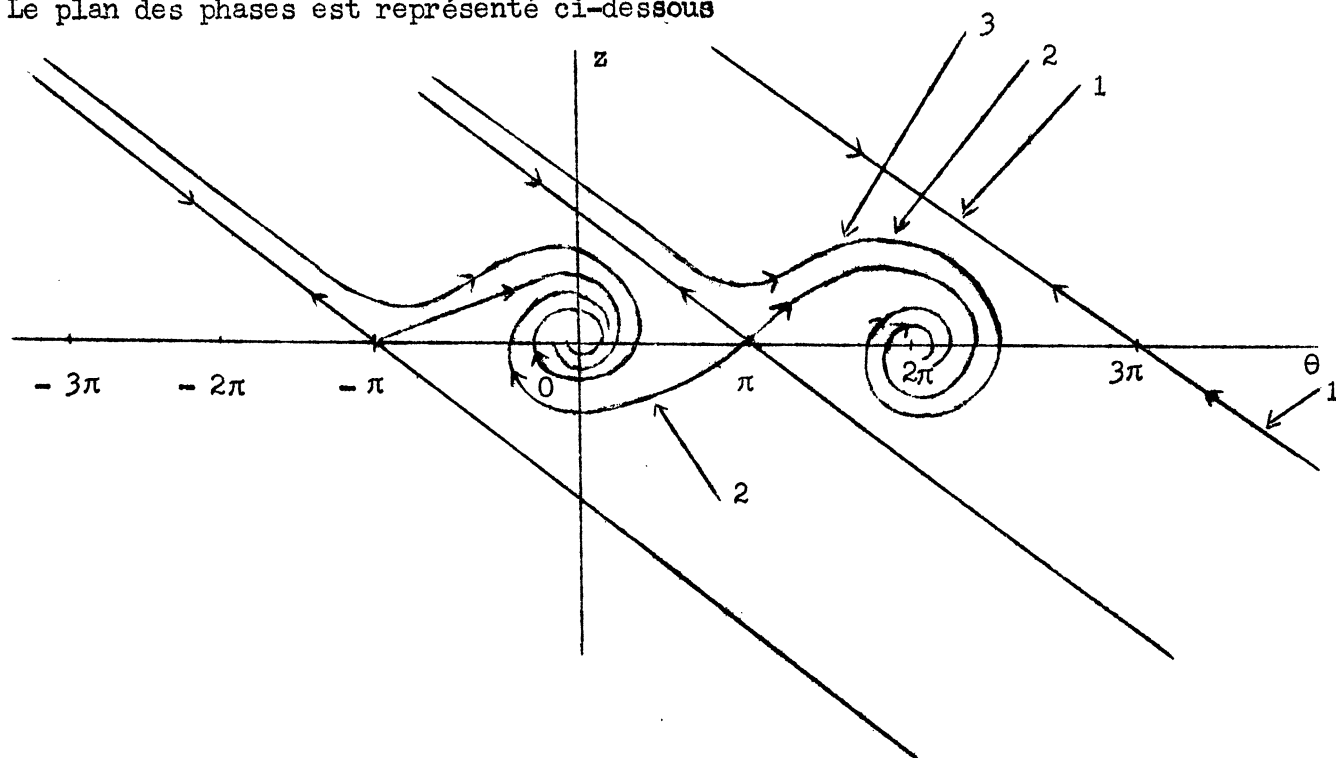
- les trajectoires (1) entourant les centres et correspondant aux petites oscillations,

- les trajectoires (2) dites séparatives joignant deux cols,
- les trajectoires (3) correspondent au mouvement du pendule autour de son point de suspension.

Mais il s'agit ici d'un pendule idéal. Dans le cas du pendule réel, il y a une résistance au mouvement de la forme $\mu\dot{\theta}$, où $\mu > 0$ est un coefficient petit si le pendule est bien construit. Le système régissant le mouvement du pendule réel est :

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = -k \sin \theta - \mu z \end{cases} .$$

Le plan des phases est représenté ci-dessous



Le système est invariant dans les translations $(\theta, z) \rightarrow (\theta + 2k\pi, z)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Les points singuliers sont les mêmes que dans le cas où $\mu = 0$. Les cols sont restés des cols, mais les centres sont devenus des foyers. Les trajectoires sont de trois types :

- les trajectoires (1) aboutissant à un col,
- les trajectoires (2) joignant un col à un foyer,

- les trajectoires (3) aboutissant à un foyer.

Si on compare les trajectoires des deux systèmes, on voit que les centres sont devenus des foyers, les cycles ont disparu, les cols sont restés des cols, mais les séparatrices qui les joignaient ont disparu.

Tout ceci nous montre que le système décrivant l'évolution d'un pendule simple idéal n'est pas "intéressant".

3. Définition de la stabilité structurelle.

Comme on l'a vu dans l'introduction, les systèmes différentiels représentant l'évolution des systèmes réels présentent une propriété de stabilité que nous allons formuler mathématiquement.

A. Notations. - Si Ω est un ensemble de \mathbb{R}^n , on désigne par $\Gamma(\Omega)$ l'ensemble des champs de vecteurs définis sur Ω et 1-fois continûment différentiables. On muni $\Gamma(\Omega)$ de la C^1 -topologie ainsi définie : $\Gamma(\Omega)$ est un espace vectoriel sur lequel on construit la norme C^1

$$X \in \Gamma(\Omega), \quad \|X\|_1 = \max_{x \in \Omega} (\|X(x)\|, \left\| \frac{\partial X}{\partial x_i}(x) \right\|, \quad i = 1 \dots n)$$

où $\|V\|$ est la norme euclidienne du vecteur V , et $(x_1 \dots x_n)$ est un système de coordonnées choisi une fois pour toutes.

Si Ω_1, Ω_2 sont deux ensembles de \mathbb{R}^n , et $h: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ une application de Ω_1 dans Ω_2 , on dit que h est une ε -application si pour tout $x \in \Omega_1$, $\|h(x) - x\| < \varepsilon$. Une cellule D de \mathbb{R}^n sera l'image dans \mathbb{R}^n d'un difféomorphisme de B^n dans \mathbb{R}^n (B^n boule unité de \mathbb{R}^n). Son bord ∂D sera l'image de S^{n-1} (sphère unité dans \mathbb{R}^n) par ce même difféomorphisme.

Si V^{n-1} est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension $n-1$, et X un champ de vecteurs défini sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. On dit que X est transverse à V^{n-1} si, en tout point x de $\Omega \cap V^{n-1}$, $X(x)$ n'est pas contenu dans le plan tangent en x à V^{n-1} .

B. Définition. - On va s'occuper de systèmes différentiels de la forme

$\frac{dx}{dt} = X(x)$, où x est un point variant sur un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et X un champ de vecteurs défini sur Ω . Par trajectoire du champ X , on désignera les trajectoires de $\frac{dx}{dt} = X(x)$.

On dit qu'un champ $X \in \Gamma(D)$, où D est une cellule de \mathbb{R}^n transverse à ∂D , est structurellement stable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que

quel que soit $Y \in \Gamma(D)$ et $\|Y - X\|_1 \leq \eta(\epsilon)$, il existe un ϵ -homéomorphisme $h : D \rightarrow D$ qui envoie chaque trajectoire de X sur une trajectoire de Y .

On appellera ϵ -zone de stabilité l'ensemble des champs $Y \in \Gamma(D)$ transverses à ∂D , tels qu'il existe un ϵ -homéomorphisme $h : D \rightarrow D$ qui envoie chaque trajectoire de X sur une trajectoire de Y . La définition ci-dessus dit que si toute ϵ -zone de stabilité de X contient un voisinage de X , X est dit structurellement stable.

C. Problèmes soulevés par la définition. - On s'est posé à propos de la définition essentiellement deux problèmes :

1er problème : Trouver des critères simples permettant de caractériser les champs stables.

2e problème : Peut-on approcher (au sens de la norme C^1), d'aussi près qu'on le veut, tout champ par un champ stable.

Passons rapidement sur le deuxième problème d'un intérêt assez spécial : il apparaît lorsqu'on cherche à étendre la théorie de MORSE aux champs de vecteurs (voir [4] et [5]).

Le premier problème a un sens. Les exemples A et B du § 2, montrent qu'il existe des champs non structurellement stables. C'est ce problème que nous allons résoudre ici dans le cas où $n = 2$.

Pour motiver notre démarche, énonçons un théorème facile à démontrer (nous ne nous en servons pas, aussi n'en donnons-nous pas la démonstration).

THÉORÈME. - Si $X \in \Gamma(D)$, (D cellule de R^n) est un champ structurellement stable, et si $D_1 \subset D$ est une sous-cellule de D , telle que X soit transverse à ∂D_1 , alors $X|_{D_1}$ est un champ structurellement stable de $\Gamma(D_1)$.

La première étude que nous allons faire sera de voir si X , restreint au voisinage d'un point de D , est structurellement stable (dans le cas $n = 2$) lorsqu'il l'est dans D .

4. Étude locale des champs stables.

A. Rappel de notions et résultats classiques :

1° Les trajectoires d'un champ X , défini dans une cellule D , et transverse à ∂D , se divisent en 3 catégories :

a. Les points singuliers, i. e. les points $x_0 \in D$ tels que $X(x_0) = 0$. Un tel point est toujours intérieur à D .

b. Les cycles, i. e. les trajectoires fermées de X représentant des solutions périodiques. Un tel cycle est toujours intérieur à D .

c. Les trajectoires ordinaires (ni points singuliers, ni cycles).

2° Si γ est une trajectoire de X , et x_0 un point de γ , on désigne par $\gamma_+(x_0)$ (resp. $\gamma_-(x_0)$) l'ensemble des points $\{x(t) | t \geq 0\}$ (resp. $\{x(t) | t \leq 0\}$) où $x(t)$ est la solution de $\frac{dx}{dt} = X(x)$, représentant γ et vérifiant $x(0) = x_0$.

On appelle ensembles limites d'une trajectoire γ et on désigne par $\alpha(\gamma)$, et $\omega(\gamma)$ respectivement les ensembles $\bigcap_{x \in \gamma} \overline{\gamma_-(x)}$ et $\bigcap_{x \in \gamma} \overline{\gamma_+(x)}$.

D'après le théorème de Poincaré-Bendixson les ensembles $\alpha(\gamma)$ et $\omega(\gamma)$ ne peuvent être que de trois sortes.

a. L'ensemble vide (γ atteint ∂D).

b. Un point singulier de X .

c. Un cycle de X .

d. Un polygone à un nombre fini de côtés dont les sommets sont des points singuliers de X et les côtés des trajectoires de X .

3° Théorie de Poincaré. - Si x_0 est un point singulier de X , en faisant une translation sur les coordonnées, on peut supposer que x_0 est le point $(0, 0)$, $X = (X_1, X_2)$ où X_1 et X_2 s'écrivent :

$$X_1(x) = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + o(|x_1| + |x_2|),$$

$$X_2(x) = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + o(|x_1| + |x_2|)$$

où $a_{ij} = \left. \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right|_{x_0}$. Si la matrice $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ n'a que des valeurs propres à par-

ties réelles non nulles, on dit que x_0 est un point singulier simple (ceci ne dépend évidemment pas du système de coordonnées).

Les points simples se répartissent en trois types classiques : les noeuds, les foyers et les cols.

L'allure des trajectoires au voisinage de chacun de ses points est classique. Elle montre qu'il n'existe pas d'homéomorphisme d'un voisinage d'un noeud ou d'un

foyer sur un voisinage d'un col envoyant les trajectoires sur les trajectoires. Enfin si un point simple x_0 est un noeud ou un foyer, dans tout voisinage du point il existe une cellule Δ dont le bord est une ellipse, de centre x_0 , et telle que le champ soit transverse au bord $\partial\Delta$. Si le point est attractif, auquel cas on dira que c'est un but, le champ sur $\partial\Delta$ pointe vers l'intérieur de Δ . Si le point est répulsif, auquel cas on dira que c'est une source, le champ sur $\partial\Delta$ pointe vers l'extérieur (voir [1]).

B. Les points singuliers d'un champ stable.

Remarquons d'abord qu'il est facile de voir qu'au voisinage d'un point régulier un champ est toujours stable. On va étudier le cas d'un point singulier :

LEMME 1. - Les points singuliers d'un champ X stable sont isolés et en nombre fini.

Démonstration. - D'après le théorème de Weierstrass et la définition de la stabilité, il existe dans la zone de stabilité de X un champ $Y = (Y_1, Y_2)$ transverse à ∂D , et dont les composantes Y_1, Y_2 sont des polynômes premiers entre eux. L'homéomorphisme $h : D \rightarrow D$ envoyant les trajectoires de X sur celles de Y , envoie les points singuliers de X sur ceux de Y . Y n'ayant qu'un nombre fini de points singuliers, le lemme en résulte.

Les exemples A et B nous font suspecter que pour qu'un champ soit stable, il faut que les points singuliers soient simples.

THÉORÈME 1. - Les points singuliers d'un champ stable sont simples.

Démonstration. - Soit x_0 un point singulier d'un champ stable X . On choisit les coordonnées de façon que x_0 soit le point $(0, 0)$. En vertu du lemme 1, il existe un nombre $\rho > 0$, tel que tout point singulier de X autre que x_0 soit à une distance $\geq \rho$ au moins de x_0 . On désigne par B_ρ la boule de centre x_0 et de rayon ρ . On va montrer que, si x_0 n'est pas simple, X ne peut être stable. $X = (X_1, X_2)$:

$$X_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + o(|x_1| + |x_2|)$$

$$X_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + o(|x_1| + |x_2|) \quad .$$

Pour tout nombre $\delta \neq 0$, on construit un champ X_δ de la manière suivante :

soit α une fonction $C^\infty : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, telle que : $\alpha = 0$ à l'extérieur de B_ρ et $\alpha = 1$ dans $B_{\rho/2}$.

$$X_\delta(x) = (X_1(x) + \delta x_1 \alpha(x), X_2(x) + \delta x_2 \alpha(x)) \quad .$$

Choisissons un nombre $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq \rho/2$. En prenant $|\delta|$ assez petit, X_δ sera dans la ε -zone de stabilité, et il existera un homéomorphisme $h_\delta : D \rightarrow D$ tel que h_δ envoie les trajectoires de X sur celles de X_δ . En particulier, vu le choix de ε , $h_\delta(x_0) = x_0$. $h = h_\delta h_{-\delta}^{-1}$ sera un homéomorphisme $D \rightarrow D$ envoyant les trajectoires de $X_{-\delta}$ sur celles de X_δ , et $h(x_0) = x_0$. Deux cas sont possibles :

1° $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ possède une valeur propre à partie réelle non nulle. Dès que δ

est assez petit et non nul, x_0 sera un col pour $X_{-\delta}$ et un foyer ou un noeud pour X_δ ou l'inverse. Il y aura donc contradiction. x_0 doit être simple.

2° Toutes les parties réelles sont nulles. Mais alors x_0 est un but pour $X_{-\delta}$, et une source pour X_δ .

Mais comme $X_{-\delta}$, X_δ sont aussi voisins qu'on le veut, cela est impossible. Le théorème est démontré

5. Étude au voisinage des trajectoires.

A. Les cycles d'un champ stable.

Ici l'étude est entièrement analogue à celle faite pour les points singuliers. Rappelons qu'on appelle cycle simple un cycle pour lequel l'indice de Poincaré est non nul. La configuration des trajectoires au voisinage d'un tel cycle est connue : l'ensemble α -limite ou l'ensemble ω -limite de toutes les trajectoires issues des points voisins du cycle est identique au cycle.

Dans le premier cas, le cycle est appelé une source ; dans le second, un but. Enfin (voir [1]), dans tout voisinage du cycle, il existe une couronne Δ contenant le cycle, et dont le bord $\partial\Delta$ est composé de deux courbes fermées transverses au champ.

Comme dans le cas des points singuliers, on démontre le théorème.

THÉORÈME 2. - Les cycles d'un champ stable sont en nombre fini et simples.

B. Structure des séparatrices.

Les trajectoires d'un champ, autres que les points singuliers, se divisent en deux importantes catégories :

1° Les trajectoires qu'on pourrait appeler ordinaires, et qui sont caractérisées par le fait que toute trajectoire issue d'un point voisin de la trajectoire donnée admet le même ensemble ω -limite que cette trajectoire.

2° Les trajectoires qui ne possèdent pas cette propriété, et qui sont appelées séparatrices.

Celles-ci ont un caractère exceptionnel. Un exemple en est donné par les trajectoires qui dans l'exemple B du § 2 relient deux cols.

L'importance des séparatrices vient du résultat suivant à peu près évident :

LEMME 2. - Si γ_1, γ_2 sont deux trajectoires d'un champ telles que $\omega(\gamma_1) = \omega(\gamma_2)$, $\alpha(\gamma_1) = \alpha(\gamma_2)$, alors si toutes les trajectoires issues de points situés dans la région comprise entre γ_1 et γ_2 , n'ont pas mêmes ensembles-limites que γ_1 et γ_2 , il existe dans cette région une séparatrice.

On voit ainsi que D se partage en régions formées de trajectoires qui ont même ω - et α -ensembles-limites et qui forment des ouverts dont les frontières sont composées de séparatrices. Pour connaître la nature de ces régions, il suffit d'étudier les différents types de séparatrices.

Le théorème suivant nous permettra d'éliminer un type de séparatrice : dans l'exemple B du § 2, nous avons vu que les séparatrices, joignant deux cols, ne sont pas stables par déformation. Ceci est général.

THÉORÈME 3. - Si un champ X est stable, il n'existe pas de séparatrice γ telle que $\alpha(\gamma)$ et $\omega(\gamma)$ soient tous les deux des cols.

Démonstration. - On va montrer que si $\alpha(\gamma)$ et $\omega(\gamma)$ étaient tous les deux des cols, X ne pourrait être stable. Posons $\alpha(\gamma) = a$, $\omega(\gamma) = b$ (Il se pourrait que $a = b$!). Prenons sur γ un point x_0 . Désignons par C le carré $\{(U, V), |U| \leq 1, |V| \leq 1\}$ d'un plan (U, V) . x_0 étant régulier, il existe un difféomorphisme $\varphi : C \rightarrow \mathcal{U}$ sur un voisinage \mathcal{U} de x tel que

$$1^\circ \varphi(0, 0) = x_0$$

2° si (U_0, V_0) est un point de C et $x(t)$ la solution de $\frac{dx}{dt} = X(x)$ telle que $x(0) = \varphi(U_0, V_0)$ $x(t) = \varphi(t + U_0, V_0)$.

On va déformer le champ X .

Soit $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions C^∞ telles que :

$$1^\circ \alpha(\sigma) = 0 \text{ si } |\sigma| \geq 1.$$

$$2^\circ \alpha(0) = 1.$$

$$3^\circ \beta(\sigma) = 0, \sigma \leq -1.$$

$$4^\circ \beta(\sigma) = 1, \sigma \geq 1.$$

On définit un difféomorphisme $\psi_\delta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ainsi :

$$\psi_\delta(U, V) = (U, V + \delta\alpha(V)\beta(U))$$

où δ est un nombre petit en valeur absolue. On définit un champ X_δ de la manière suivante :

$$X_\delta(x) = X(x) \text{ si } x \notin \mathcal{U}$$

$$X_\delta(x) = d\varphi \circ d\psi_\delta \circ d\varphi_x^{-1}(X) \text{ si } x \in \mathcal{U}.$$

A condition de prendre δ assez petit, X_δ sera dans la ε -zone de stabilité de X , ε étant donné arbitraire (mais positif). Donc, si δ est assez petit, l'homéomorphisme $h : D \rightarrow D$, envoyant les trajectoires de X sur celles de X_δ , enverra a sur a , b sur b et γ en une trajectoire $h(\gamma)$ aussi voisine qu'on le voudra de γ , et telle que

$$\omega(h(\gamma)) = h(\omega(\gamma)) = b,$$

$$\alpha(h(\gamma)) = h(\alpha(\gamma)) = a.$$

En particulier si δ est assez petit, $h(\gamma)$ rencontrera \mathcal{U} . Or, comme on le voit immédiatement, il n'existe aucune trajectoire γ' de X_δ rencontrant \mathcal{U} telle que $\alpha(\gamma') = a$, $\omega(\gamma') = b$ (en raison de la disposition des trajectoires au voisinage d'un col !). Le théorème est donc démontré.

6. Étude du régionnement d'une cellule par un champ.

A. On va étudier la structure des régions d'une cellule (dont on a parlé dans B, § 5) dans le cas d'un champ X , dont tous les points singuliers et tous les cycles sont simples et en nombre fini, et dont aucune séparatrice ne joint deux cols. Comme nous l'avons vu, les foyers, noeuds et cycles de X se partagent en deux catégories : les sources et les buts. Nous allons voir, que pour toute trajectoire γ de X qui n'est ni un point singulier, ni un cycle l'éventualité (d) du 2° de A, § 4 ne se présente pas.

Si elle se présentait, d'après la nature des points singuliers de X , les sommets de polygone seraient des cols, donc les côtés seraient des séparatrices joignant des cols, ce qui n'est pas possible.

Remarquons que si γ n'est pas une séparatrice, $\alpha(\gamma)$, et $\omega(\gamma)$ ne peuvent pas être des cols.

Les trajectoires issues d'un col, ou γ aboutissant, sont par définition même des séparatrices. Nous allons étudier les ensembles-limites d'une séparation γ . $\alpha(\gamma)$ et $\omega(\gamma)$ ne peuvent être en même temps source et but. En effet, supposons que $\alpha(\gamma)$ est une source et $\omega(\gamma)$ un but. $\alpha(\gamma) \omega(\gamma)$ est alors ou l'ensemble vide, ou un foyer, ou un noeud, ou un cycle. Dans les trois derniers cas, on peut trouver une variété à bord Δ , contenant l'ensemble limite en son intérieur, et dont le bord $\partial\Delta$ est transverse à X , et telle que toute trajectoire rencontrant $\partial\Delta$ admet le foyer, noeud ou cycle pour ensemble-limite. Dans la première éventualité γ rencontre ∂D . On appelle alors Δ un arc de ∂D , tel que $\gamma \cap \partial D$ soit en son intérieur. Finalement γ coupe $\partial\Delta\alpha(\gamma)$ et $\partial\Delta\omega(\gamma)$ chacun en un point. Prenons alors un point x_0 voisin de γ et non contenu dans $\Delta\alpha(\gamma)$ et $\Delta\omega(\gamma)$. Si x_0 est assez voisin de γ la trajectoire γ_0 passant par x_0 rencontre $\partial\Delta\alpha(\gamma)$ et $\partial\Delta\omega(\gamma)$. Mais alors $\omega(\gamma_0) = \omega(\gamma)$, $\alpha(\gamma_0) = \alpha(\gamma)$, γ n'est pas une séparatrice. Par conséquent si γ est une séparatrice $\alpha(\gamma)$ ou $\omega(\gamma)$ est un col (et d'ailleurs les deux ne peuvent l'être en même temps).

B. Nous allons maintenant décrire les différents types de régions possibles.

Pour cela on supposera que sur ∂D , X est sortant ce qui ne change rien à l'affaire. ∂D sera alors considéré comme un but : c'est légitime, car si γ rencontre ∂D , $\omega(\gamma) = \emptyset$.

On entoure chaque source et chaque but d'une variété à bord Δ comme précédemment et de façon que les Δ soient disjointes. Si Γ est une source ou un but (foyer, noeud, cycle) les séparatrices issues ou aboutissant à Γ coupent chacune $\partial\Delta_\Gamma$ en un point. Ces points découpent sur $\partial\Delta_\Gamma$ un nombre fini d'arcs ouverts deux à deux disjoints. Si Γ est le but ∂D , on posera $\partial\Delta_\Gamma = \partial D$, et on fera les mêmes opérations. Prenons un des arcs δ précédents, et supposons, pour fixer les idées, que δ soit un but. Si une trajectoire γ rencontre δ , $\omega(\gamma) = \Gamma$. On va montrer de plus que les $\alpha(\gamma)$ des trajectoires γ rencontrant δ sont les mêmes. γ n'étant pas une séparatrice, si elle rencontre δ , $\alpha(\gamma)$ est une source. Désignons par $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ les sources de X , et par δ_i , $i = 1, \dots, N$, l'ensemble des points de δ tels que les trajectoires γ

passant par ces points vérifient $\alpha(\gamma) = \Gamma_i$. δ_i est un ouvert de δ , et $\delta_i \cap \delta_j = \emptyset$, pour tout (i, j) , $i \neq j$. De plus, $\delta = \bigcup \delta_i$. Puisque δ est connexe, on doit avoir $\delta_i = \delta$ pour i, i_0 , et $\delta_i = \emptyset^I$, $i \neq i_0$. L'assertion est démontrée. Sur $\partial\Delta_{\Gamma_{i_0}}$, les trajectoires γ rencontrant δ découpent un arc

δ' ouvert. De plus, si on considère la correspondance entre δ et δ' ainsi définie, à chaque $x \in \delta$, on fait correspondre le point $y \in \delta'$, où la trajectoire issue de x coupe δ' , cette correspondance est un homéomorphisme. Il est alors facile de voir que les trajectoires issues des points frontières (s'ils existent) de δ' sont des séparatrices.

En effet, si l'une des γ ne l'est pas, $\alpha(\gamma) = \Gamma_{i_0}$, $\omega(\gamma)$ est une source, et il existe un voisinage de $\gamma \cap \partial\Delta_{\Gamma_0}$ sur $\partial\Delta_{\Gamma_0}$ tel que toutes les trajectoires issues des points de ce voisinage admettent $\omega(\gamma)$ pour ω ensemble-limite. Donc $\omega(\gamma) = \Gamma$.

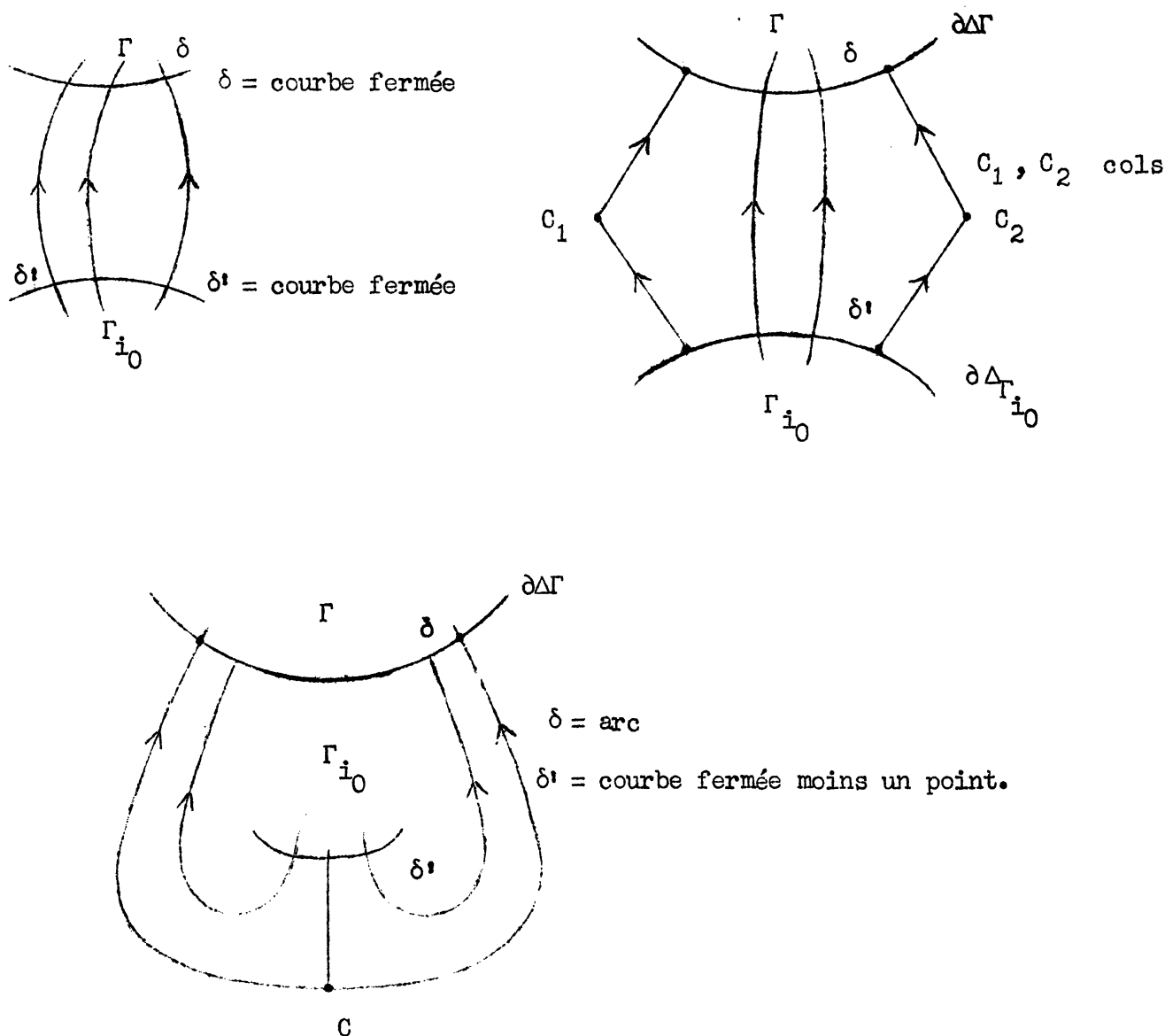
Alors γ coupe $\partial\Delta_{\Gamma}$ en l'un des points frontières de δ , étant limite de trajectoires issues de points de δ . Mais une telle trajectoire est une séparatrice. Donc $\alpha(\gamma)$ ne peut être la source Γ_{i_0} . On a une contradiction.

Appelons $\Lambda(\delta, \delta')$ la région de D recouverte par les trajectoires rencontrant δ et δ' , c'est une partie ouverte de D . Nous allons étudier sa frontière. Soit x un point de cette frontière. x peut être Γ ou Γ_{i_0} . Excluons ce cas.

Si x est alors un point singulier ce ne peut être ni un foyer, ni un noeud, sans cela il existerait des trajectoires $\gamma \subset \Lambda(\delta, \delta')$ telle que $\alpha(\gamma)$ ou $\omega(\gamma) = x$, ce qui est impossible puisque $x \neq \Gamma, \Gamma_{i_0}$.

Donc x ne peut être qu'un col.

Si x est un point régulier, et si γ_x désigne la trajectoire de x , γ_x est toute entière contenue dans la frontière de $\Lambda(\delta, \delta')$. γ_x ne peut être un cycle, sinon il existerait des trajectoires $\gamma \subset \Lambda(\delta, \delta')$ telles que $\alpha(\gamma)$ ou $\omega(\gamma)$ soit γ_x . γ_x ne peut être alors qu'une séparatrice, et comme il n'existe pas de séparatrice joignant deux cols, γ_x est issue de Γ_{i_0} , ou aboutit à Γ , donc est l'une des séparatrices passant par les points frontières de δ ou δ' . Les régions $\Lambda(\delta, \delta')$ sont alors de l'un des types énumérés ci-dessous



7. Théorème principal.

Nous pourrions maintenant énoncer le théorème qui donnera la réponse au premier problème de C du § 3.

THÉORÈME 4. - Un champ X défini dans une cellule D , transverse à ∂D , est structurellement stable si et seulement si :

- 1° Les points singuliers et les cycles de X sont simples ;
- 2° il n'existe pas de séparatrice joignant deux cols.

Démonstration. - On sait déjà que si X est stable, il possède les propriétés 1° et 2°.

Supposons que X possède les propriétés 1° et 2°. On entoure alors chaque source et chaque but de X par une variété à bord Δ de telle façon que les Δ soient disjointes, et on se donne un ε positif. On appelle alors \mathcal{U} le voisinage de X dans $\Gamma(D)$ formé des champs Y , transverse à ∂D , et tels que, pour toute source Γ de X , Y admette dans Δ_Γ une source et une seule de même nature que Γ désignée par $h(\Gamma)$, et soit transverse à $\partial\Delta_\Gamma$ (un tel voisinage \mathcal{U} existe).

On considère alors le voisinage \mathcal{U}' de X formé des Y de \mathcal{U} tel qu'au voisinage de chaque col c de X il n'existe qu'un col, et un seul, de Y désigné par $h(c)$, et tel que, si γ est une séparatrice de X , il existe une séparatrice γ' de Y telle que $\omega(\gamma') = h(\omega(\gamma))$, $\alpha(\gamma') = h(\alpha(\gamma))$. γ' sera distinguée par $h(\gamma)$.

Il existe enfin un sous-voisinage \mathcal{U}'' de X dans \mathcal{U}' tel que tout champ Y de \mathcal{U}'' n'admette d'autres sources ou buts, d'autres cols, d'autres séparatrices que celles énumérées plus haut. En particulier tout champ de \mathcal{U}'' vérifie les propriétés 1° et 2° du théorème.

On peut maintenant trouver un voisinage $\mathcal{U}''' \subset \mathcal{U}''$ de X tel que, pour tout $Y \in \mathcal{U}'''$, on ait la propriété suivante : si Γ est un but de X , il existe un ε -homéomorphisme $h_\Gamma : \Delta_\Gamma \rightarrow \Delta_\Gamma$ qui envoie les trajectoires de X sur celles de Y , et les séparatrices γ de X aboutissant à Γ sur les séparatrices $h(\gamma)$ correspondantes de Y . h_Γ enverra $\partial\Delta_\Gamma$ sur $\partial\Delta_\Gamma$, et en particulier les arcs δ de $\partial\Delta_\Gamma$ sur des arcs $h_\Gamma(\delta)$ analogues correspondant à Y .

Soit alors une région $\Lambda(\delta', \delta)$ correspondant à X , de but Γ , de source Γ' , et découpant les arcs δ et δ' sur $\partial\Delta_\Gamma$ et $\partial\Delta_{\Gamma'}$. h_Γ envoie δ sur un arc $h_\Gamma(\delta)$ de $\partial\Delta_\Gamma$. Considérons la région $\Lambda(\delta_1, h_\Gamma(\delta))$ correspondant à Y et à l'arc $h_\Gamma(\delta)$. Il est facile d'étendre h_Γ en un ε -homéomorphisme de $\overline{\Lambda(\delta', \delta)}$, dont on a enlevé $\overset{\circ}{\Delta}_\Gamma \cap \overline{\Lambda(\delta', \delta)}$, sur $\overline{\Lambda(\delta_1, h_\Gamma(\delta))}$, dont on a enlevé $\overset{\circ}{\Delta}_\Gamma \cap \overline{\Lambda(\delta_1, h_\Gamma(\delta))}$, qui envoie les trajectoires de X sur celles de Y , à condition de prendre Y dans un voisinage $\mathcal{U}^{(4)} \subset \mathcal{U}'''$ assez petit de X . On a ainsi construit un ε -homéomorphisme de D , privé des intérieurs des Δ_Γ correspondant aux sources Γ , sur lui-même, et qui envoie les trajectoires de X sur celles de Y . Cet ε -homéomorphisme est facile à étendre aux intérieurs des Δ_Γ correspondant aux sources.

On aura ainsi un ε -homéomorphisme $h : D \rightarrow D$ qui enverra les trajectoires de X sur celles de Y , pourvu que Y soit dans un voisinage $\mathcal{U}^{(5)}$ de X .

Ainsi on a esquissé la démonstration du théorème 4. Pour les détails de la démonstration, voir [2].

8. Conclusion.

Dans le cas de la dimension 2 et des cellules, les champs stables sont entièrement caractérisés au moyen de propriétés simples du portrait de phase. Dans le cas des dimensions supérieures ou de variétés quelconques, on peut encore montrer qu'un champ structurellement stable possède les extensions à plusieurs dimensions des propriétés 1° et 2°. Mais il semble que ce ne soit guère suffisant pour entraîner la stabilité. La difficulté provient de l'existence de trajectoires stables à la Poisson, qui sont absentes dans le cas traité.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CODDINGTON (K.) and LEVINSON (N.). - Theory of ordinary differential equations. - New York, McGraw-Hill Company, 1955 (International Series in pure and applied Mathematics).
 - [2] DeBAGGIS (H. F.). - Dynamical systems with stable structures, Contributions to the theory of nonlinear oscillations, Volume 2, p. 37-59. - Princeton, Princeton University Press, 1952 (Annals of Mathematics Studies, 29).
 - [3] MARKUS (L.). - On the behaviour of the solution of a differential system near a periodic solution, with application to the theory of structurally stable systems. - Minneapolis, University of Minnesota, 1959 (University of Minnesota, Technical Report, 8).
 - [4] PEIXOTO (M. H.). - On structural stability, Annals of Math., Series 2, t. 69, 1959, p. 199-222.
 - [5] SMALE (S.). - Morse inequalities for a dynamical system ; Bull. Amer. math. Soc., t. 66, 1960, p. 43-49.
-