

SÉMINAIRE JANET. MÉCANIQUE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE CÉLESTE

SUAMATIA MAVRIDES

Modèles cosmologiques en relativité

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 4 (1960-1961),
exp. n° 4, p. 1-38

http://www.numdam.org/item?id=SJ_1960-1961__4__A4_0

© Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste
(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

28 janvier et 11 février 1961

MODÈLES COSMOLOGIQUES EN RELATIVITÉ

par Mlle Stamatia MAVRIDES

Les théories cosmologiques semblent rencontrer ces derniers temps, une certaine désaffection, même auprès de relativistes distingués. Une tendance assez répandue consiste à considérer la cosmologie avec scepticisme en la tenant pour une spécialisation stérile sans conséquences pour la physique et l'astronomie habituelles. Nous examinerons les hypothèses et les développements qui peuvent aboutir à ce genre d'attitude.

Actuellement, ce sont surtout certains groupes d'expérimentateurs qui s'intéressent aux modèles cosmologiques. Les raisons de cet intérêt sont multiples et corréllées. Tout d'abord, il existe toute une série d'observations qu'on ne peut interpréter par aucun phénomène physique connu, alors que les modèles cosmologiques apportent une certaine explication. Inversement, des observations astronomiques pourraient, en principe, permettre de faire un choix entre les divers modèles cosmologiques théoriquement possibles. Enfin, une catégorie de modèles étant choisie, les observateurs pourraient disposer d'un nouvel indicateur de distance, ce qui permettrait de progresser dans la connaissance des objets célestes éloignés. Bien entendu, un tel programme comporte d'une part des hypothèses simplificatrices (dans le domaine théorique) d'autre part une série d'extrapolations (dans le domaine expérimental). Il est possible que les observations astrophysiques nécessitent de nouvelles lois de la nature pour leur interprétation. On peut aussi, tout en reconnaissant avec O. KLEIN [28] l'importance des "arguments de simplicité dans la recherche de nouvelles lois élémentaires, quand le besoin de telles lois est apparent, comme en physique nucléaire ou mésonique, refuser ces mêmes arguments de simplicité quand il s'agit de l'état particulier d'un vaste système". Mais le postulat cosmologique devrait être envisagé comme une toute première approximation plutôt que comme une "physique aristotélicienne". Il est évident que la représentation de l'Univers par un modèle cosmologique est une extrême simplification, trop simple sûrement.

Il n'est pourtant pas dénué d'intérêt d'étudier ce qu'une telle simplification peut apporter et jusqu'où il est possible de la pousser. L'étude d'un problème complexe commence toujours par une certaine schématisation. Enfin, l'étude des théories cosmologiques en relativité présente en tous cas l'intérêt suivant :

connaître les caractéristiques de certains "cas intérieurs".

Bien entendu, savoir dans quelle mesure ces "cas intérieurs" peuvent représenter l'Univers réel, est une deuxième question, séparée de la précédente, et c'est en elle que réside tout le sel de la Cosmologie.

C'est en 1917 que commença la cosmologie "moderne" lorsque EINSTEIN proposa le premier modèle d'univers issu de la relativité générale.

1. Le problème cosmologique en théorie de la relativité générale.

Puisque, d'après la relativité générale, les propriétés métriques de l'espace-temps sont déterminées par son contenu matériel, le problème cosmologique consiste alors en ceci : quelle est la structure riemannienne compatible avec le contenu matériel de l'Univers dans son ensemble et avec les phénomènes physiques qui s'y déroulent. Ainsi posé, le problème est tout à fait en dehors de nos possibilités. Afin de pouvoir l'aborder, on va d'une part schématiser le contenu matériel de l'Univers et d'autre part se limiter à une ou deux séries de phénomènes physiques, sans perdre de vue le très petit nombre de données d'observation actuellement utilisables.

2. Principe cosmologique.

Le postulat essentiel qui va servir de base aux divers modèles cosmologiques en relativité est le "principe cosmologique" que l'on peut énoncer de la façon suivante : à l'exception d'irrégularités locales, l'Univers présente le même aspect quel que soit le point d'où on l'observe. On peut justifier l'emploi de ce principe cosmologique en se basant sur les résultats d'observation : à une échelle suffisamment grande, il semble que l'univers présente une symétrie sphérique autour de la terre, d'où on l'observe. Or, un univers non uniforme ne pourrait présenter une symétrie sphérique que pour un observateur occupant une position particulière. Puisque, depuis COPERNIC, nous avons renoncé à faire occuper à la Terre une position privilégiée, il découle de l'isotropie localement observée une distribution homogène. Ce point de vue très intuitif peut d'ailleurs être établi avec plus de rigueur. On sait en effet que la définition habituelle de l'isotropie d'une variété riemannienne entraîne l'homogénéité de la variété en vertu du théorème de Schur. Enfin, on peut tout simplement considérer le principe cosmologique comme une hypothèse de travail. Et comme ultime schématisation, on remplace le système réel discontinu des galaxies par un fluide matériel continu, homogène et isotrope. A ce stade, nous cherchons donc la structure riemannienne de la variété déterminée

par une distribution matérielle continue, homogène et isotrope, remplissant toute la variété. Nous adopterons ici le cadre classique de la relativité générale : autrement dit, l'espace-temps sera évidemment assimilé à une variété différentiable V_4 munie d'une métrique riemannienne de type hyperbolique normal. Les potentiels de gravitation, dans le cas du problème cosmologique, seront déterminés par les équations du cas intérieur

$$S_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (G + 2\Lambda) = \chi T_{\mu\nu}$$

$G_{\mu\nu}$ = tenseur de Ricci.

$G = g^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}$, Λ = constante "cosmologique" pouvant éventuellement être prise égale à 0, $\chi = \frac{8\pi G_N}{c^4}$. $T_{\mu\nu}$ est le tenseur matériel d'impulsion-énergie. Dans le cas de la distribution matérielle continue à laquelle a été assimilé l'Univers, en supposant en outre que ce fluide est un fluide parfait, dans ce cas supposé être un cas "matière pure", le tenseur d'impulsion énergie a pour expression

$$T^{\mu\nu} = (\mu c^2 + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}$$

μ désignant la densité et p la pression propres du fluide, u^μ la quadri-vitesse d'univers ($u^\mu u_\mu = 1$).

Les premiers modèles cosmologiques étudiés étaient des modèles statiques.

3. Modèles statiques.

Par hypothèse, la densité μ et la pression p sont des constantes ayant partout la même valeur, puisqu'on adopte le principe cosmologique. On peut choisir des coordonnées telles que l'élément linéaire possède une symétrie sphérique autour de n'importe quel point pris comme origine, et poser

$$ds^2 = - e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^\nu c^2 dt^2$$

où λ et ν sont fonction de r seulement.

Le modèle d'Einstein [12] (1917) est représenté par la solution suivante

$$ds^2 = - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + c^2 dt^2$$

où, par définition,

$$\frac{1}{R^2} = \Lambda - \chi p \quad .$$

Les équations du champ conduisent à l'expression suivante, pour la densité de matière,

$$\chi \mu c^2 = \frac{3}{R^2} - \Lambda \quad .$$

Si l'on admet que le "gaz de galaxies" est composé de matière incohérente, en négligeant les petits mouvements des particules du fluide, alors

$$p = 0$$

et

$$\Lambda = \frac{1}{R^2} = \frac{\chi}{2} \mu c^2 = \frac{4\pi G_N}{c^2} \mu \quad .$$

Ce premier modèle cosmologique statique est compatible avec l'Univers réel, puisqu'il représente une distribution matérielle de densité finie, $\neq 0$ à condition d'avoir $\Lambda \neq 0$: c'est dans ce but qu'EINSTEIN avait introduit une constante cosmologique dans les équations de champ. Cette constante a une valeur assez faible pour que son influence soit tout à fait négligeable sur les conséquences de la solution de Schwarzschild. EINSTEIN espérait en outre que lorsque les composantes du tenseur d'impulsion-énergie sont nulles partout, les équations du champ n'admettent comme solution qu'une variété euclidienne. Or, la même année (1917), De SITTER a trouvé une autre solution non euclidienne des équations du champ, mais néanmoins telle que les composantes physiquement admissibles du tenseur matériel d'impulsion-énergie soient nulles partout.

Le modèle statique de de Sitter ([42], [43]) est un effet caractérisé par l'intervalle élémentaire suivant :

$$ds^2 = - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) c^2 dt^2$$

où l'on a posé, cette fois,

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\Lambda + \chi \mu c^2}{3} \quad .$$

Un tel modèle "cosmologique", d'après les équations de champ correspondantes entraîne que

$$\mu c^2 + p = 0 \quad .$$

Cette équation admet comme seule solution ayant un sens physique

$$\mu = 0 \quad \underline{\text{et}} \quad p = 0$$

car μ représente une densité matérielle : c'est donc nécessairement une quantité ≥ 0 . Et aucune substance connue n'est telle que la pression p puisse être égale à $-\mu c^2$. Malheureusement, cette solution ayant un sens physique n'a pas beaucoup de sens cosmologique puisqu'elle correspondrait à un Univers complètement vide. Tels sont les seuls modèles statiques homogènes prévisibles au moyen de la relativité générale. Dès 1922-1924, FRIEDMAN ([15], [16]) trouva toute la série de solutions non statiques permettant d'éviter la constante cosmologique. De plus, vers cette époque, on découvrait l'expansion du système des galaxies, car on interprétait comme un effet Doppler les décalages systématiques observés dans le spectre des galaxies lointaines. En 1929 enfin, HUBBLE [25] énonçait la loi empirique appelée souvent relation vitesse-distance. En fait, le décalage vers le rouge (δ) observé dans le spectre des galaxies est sensiblement proportionnel à leur distance à la terre D . On écrit

$$c\delta = v = H \times D$$

$$(H = 180 \text{ km/s.Mpc}) \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{d\lambda}{\lambda} \quad .$$

Ce décalage se manifeste avec les caractéristiques de l'effet Doppler : le rapport $\frac{d\lambda}{\lambda}$ est constant pour toutes les raies du spectre (ceci a été vérifié non seulement dans le visible, mais encore pour la raie 21 cm de l'hydrogène par A. E. LILLEY et E. F. McCLAIN en 1956 dans l'étude radio-astronomique du Cygne [30]).

Or, l'étude de la propagation des rayons lumineux dans le modèle statique d'Einstein montre qu'il n'y a aucun décalage systématique de longueur d'onde de la lumière émise par des objets éloignés. Par conséquent, ce modèle ne permet aucune interprétation de l'effet Hubble. Pour que le modèle de de Sitter puisse avoir un intérêt cosmologique, il faut y introduire de la matière. C'est ce que fit H. WEYL ([45], [46]) au moyen de l'hypothèse suivante : les nébuleuses sont assimilées à une distribution uniforme de particules d'épreuve situées sur un

faisceau de géodésiques qui divergent à partir d'un point commun. Cette hypothèse de Weyl est assez naturellement suggérée par les propriétés curieuses du modèle de de Sitter : en effet, si dans le modèle vide de de Sitter, on introduit deux particules d'épreuve sans vitesse initiale, les particules ne restent pas au repos, mais elles se repoussent (si $\Lambda > 0$) avec une accélération qui croît avec la distance. Tout mouvement cesse d'ailleurs lorsque $r = R$, horizon apparent de l'Univers de de Sitter. D'où l'hypothèse de Weyl. Si les particules d'épreuve sont des sources lumineuses, on montre sans difficulté que, pour une onde lumineuse passant d'une particule à une autre, il y a un décalage systématique de longueur d'onde proportionnel à leur distance, en première approximation.

Pour éviter les inconvénients de ces deux modèles, on a donc étudié les modèles non statiques sur lesquels se concentre l'intérêt à présent.

4. Modèles cosmologiques non statiques.

La densité moyenne de matière, pour un observateur local, n'est plus constante par rapport au temps. De même les composantes de la métrique vont dépendre aussi du temps. On peut induire la forme du ds^2 dans ces modèles en utilisant uniquement le principe cosmologique d'après lequel le substrat est supposé homogène et isotrope. L'isotropie spatiale de l'univers V_4 se traduit par les propriétés suivantes : "il existe une famille d'hypersurfaces orthogonales à toutes les géodésiques. Chacune de ces surfaces est une surface à courbure constante. Les segments de géodésiques situés entre deux surfaces quelconques de la famille sont égaux"[2]. Ces conséquences découlent aussi du postulat de Weyl d'après lequel les particules de substrat (représentant les galaxies) décrivent, dans l'espace-temps, un faisceau de géodésiques divergent à partir d'un point commun situé dans le passé (à distance finie ou infinie). Le point essentiel de ce postulat est que les géodésiques ne se coupent pas (sauf au point singulier situé dans le passé et peut-être en un point singulier analogue futur). Donc, par hypothèse, en chaque point de l'espace-temps il y a une géodésique et une seule ; par conséquent en tout point spatio-temporel la matière possède une vitesse unique. Ce substrat est donc hydrodynamique [1] ; il n'y a pas d'intersection des lignes de courant (sauf au point singulier). Comme le faisceau de géodésiques satisfaisant au postulat de Weyl est orthogonal à une famille d'hypersurfaces, on va choisir le système de coordonnées suivant, adapté à une interprétation physique : comme lignes temporelles sur lesquelles x^1 , x^2 , x^3 sont constants et x^4 seul variable, on choisit les géodésiques décrites par la particule. Les hypersurfaces qui sont orthogonales aux géodésiques seront les surfaces $t = \text{Cte}$. Ceci implique que, pour chaque

particule de substrat, x^1 , x^2 , x^3 sont constants. Un tel système de coordonnées est co-mobile. Prenons en outre $x^4 (= ct)$ égal à la distance métrique au centre. Avec ce choix de coordonnées, compte tenu de l'orthogonalité des hypersurfaces $t = Cte$ et des lignes $(x^1, x^2, x^3) = Cte$, et compte tenu de la propriété géométrique, la métrique est de la forme

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx^4)^2 - h_{ij} dx^i dx^j \quad (i, j = 1, 2, 3) \\ &= c^2 dt^2 - h_{ij} dx^i dx^j \quad ; \end{aligned}$$

les h_{ij} sont fonctions de t , x^1 , x^2 , x^3 . La coordonnée t joue le rôle d'un temps "cosmique" ou universel.

Considérons ([1] p. 102, [38] et [44]) maintenant un petit triangle formé par 3 particules à un instant t et le triangle formé par ces mêmes particules à un instant ultérieur. D'après les postulats d'homogénéité et d'isotropie, puisqu'aucun point et aucune direction ne peuvent être préférentiels dans l'espace, le second triangle doit être géométriquement semblable au premier. En outre, le coefficient de similitude doit être indépendant de la position du triangle dans l'espace, en vertu des mêmes postulats. Il en résulte que le temps doit figurer en facteur commun dans les h_{ij} afin que le rapport des distances correspondant à deux petits déplacements puisse être le même à tous les instants. Donc

$$h_{ij} = R^2(t) l_{ij}$$

où l_{ij} ne dépend pas du temps. La fonction $R(t)$ est toujours réelle. Il reste finalement à considérer l'espace $l_{ij} dx^i dx^j$ qui est homogène, isotrope et indépendant du temps. On sait qu'un tel espace doit être à courbure constante, positive, négative ou nulle. Par un choix convenable de x^1 , x^2 , x^3 et en absorbant un facteur d'échelle dans $R(t)$, l'élément linéaire de V_4 peut se mettre sous la forme

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \frac{[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2]}{\{1 + \frac{k}{4}[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]\}^2}$$

où k a l'une des valeurs $+1$, 0 ou -1 .

En posant

$$x^1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x^3 = r \cos \theta, \quad ,$$

l'intervalle élémentaire s'écrit encore

$$(1) \quad ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{R^2(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad .$$

Si $k = +1$, les modèles sont à "espace" sphérique fermé dont le volume est $2\pi^2 R^3$.

Si $k = 0$, les modèles sont à espace euclidien. Le volume de ces modèles est infini.

Si $k = -1$, les modèles sont à espace hyperbolique ouvert.

Les équations de champ d'Einstein conduisent alors, si $T_{\mu\nu}$ représente l'impulsion-énergie d'un fluide continu, parfait, homogène et isotrope, aux valeurs suivantes pour la densité et la pression matérielles :

$$(2) \quad \chi \mu c^2 = \frac{3}{c^2} \frac{\dot{R}^2}{R^2} (kc^2 + \dot{R}^2) - \Lambda$$

$$(3) \quad \chi P = -\frac{1}{c^2} \left(2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{kc^2}{R^2} \right) + \Lambda$$

où $\chi = \frac{8\pi G_N}{c^4}$, k est la constante de courbure, \dot{R} et \ddot{R} sont les dérivées première et seconde de la fonction R par rapport à t , Λ la constante cosmologique. Comme conséquence du postulat d'homogénéité et d'isotropie, densité et pression matérielles dépendent uniquement du temps.

Si $R = \text{Cte}$, $k = +1$, on obtient le modèle statique d'Einstein.

Si $k = 0$, $R = R_0 e^{\sqrt{N/3} ct}$, on a le modèle de de Sitter où la matière est représentée au moyen de l'hypothèse de Weyl.

D'après l'expression (2) précédente, il est possible d'avoir une distribution matérielle de densité $\neq 0$ même si $\Lambda = 0$. EINSTEIN était donc tout à fait d'avis de supprimer le terme cosmologique qu'il avait introduit dans ses équations uniquement à cause du modèle statique, mais qu'il n'aimait pas et souhaitait rejeter pour des raisons "d'économie logique". "Si l'expansion de Hubble, écrivait EINSTEIN, avait été découverte au moment de la création de la théorie de la relativité générale, le terme cosmologique n'aurait jamais été introduit". D'autres auteurs, notamment G. LEMAITRE, A. S. EDDINGTON, semblent favorables à l'introduction d'une

constante cosmologique. Leurs arguments sont assez peu convaincants.

Il est plus intéressant de savoir si les modèles cosmologiques caractérisés par l'intervalle élémentaire (1) peuvent rendre compte de l'effet Hubble.

5. Interprétation de l'effet Hubble.

Supposons que les particules de substrat peuvent être des sources lumineuses, et étudions la propagation du rayonnement émis par l'une de ces sources et reçu par un observateur lié à une autre particule de substrat. Une analyse très simple montre que, pour un rayonnement caractérisé par la longueur d'onde λ se propageant dans ce modèle, l'observateur mesure un décalage systématique ayant pour expression

$$\delta = \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} - 1$$

où t_1 est l'instant d'émission d'un front d'onde par la source lumineuse, t_0 l'instant de réception de ce même front d'onde par l'observateur. Par conséquent, les modèles cosmologiques non statiques ($R \neq \text{Cte}$) prévoient un décalage systématique de longueur d'onde pour un rayonnement passant d'une particule de substrat à une autre. La variation relative de longueur d'onde δ ($= \frac{d\lambda}{\lambda}$) est la même pour toutes les longueurs d'ondes d'un spectre. δ est par conséquent de la nature d'un effet Doppler, ce qui est conforme aux observations. Mais la fonction $R(t)$ est indéterminée. La théorie de ces modèles n'impose pas $R(t_0) > R(t_1)$. Puisque le phénomène observé est un décalage systématique vers le rouge, correspondant par conséquent à un $\delta > 0$, la fonction R doit satisfaire l'inégalité $R(t_0) > R(t_1)$ pour tous les instants d'émission t_1 : R doit être une fonction croissante de t , et les modèles cosmologiques doivent être en expansion pour représenter (schématiquement) le phénomène de récession des nébuleuses.

On a ainsi obtenu une assez bonne description qualitative de notre échantillon d'Univers.

Il faut, à présent, envisager une confrontation quantitative des résultats d'observation et des caractéristiques des modèles. Cette étude a pour buts :

1° de voir dans quelle mesure ces schémas peuvent représenter l'univers réel des galaxies.

2° de choisir entre les divers modèles possibles le "bon" modèle :

Les résultats d'observation pratiquement utilisables en cosmologie sont encore très peu nombreux (malgré les extraordinaires instruments nouveaux, notamment ceux utilisés au Mont Palomar). Ils se rapportent essentiellement aux mesures de décalage dans les spectres des nébuleuses. D'autres observations pourraient être utilisées en cosmologie, notamment celles qui concernent les numérations de galaxies. Mais de l'aveu même de leurs adeptes, il n'est pas encore possible de se servir de telles observations en cosmologie, d'une manière valable.

Il y a là une des raisons de la désaffection actuellement manifestée à l'égard de la cosmologie : on attend toujours de pouvoir mettre à l'épreuve les différents modèles proposés, et les mesures nécessaires se trouvent encore, malgré les instruments nouveaux, à la limite des observations. On est donc dans une période d'expectative depuis quelques années et vraisemblablement pour quelques années encore. On fonde des espoirs sur les méthodes radio-astronomiques mais, là encore, il faut attendre.

Néanmoins, les données dont on dispose peuvent apporter des précisions aux modèles cosmologiques de la relativité. Une loi empirique relie le décalage δ à la distance de la source à l'observateur. Pour utiliser les observations, il faut donc relier les distances mesurées au mode de repérage utilisé dans les modèles précédents. Il semble que ce problème des distances soit actuellement aussi épineux pour les expérimentateurs que pour les relativistes, pour des raisons évidemment très différentes.

6. Notion de distance.

Les mesures des distances des galaxies se font de proche en proche. Chaque étape a ses difficultés propres, qui vont évidemment croissant avec l'éloignement, et une modification des résultats fournis par une étape a, bien entendu, des répercussions sur tout l'ensemble. On utilise, pour les galaxies assez proches, des indicateurs de distance en désignant ainsi "toute catégorie d'astres aisément reconnaissable dont la fonction de fréquence des magnitudes absolues présente une faible dispersion autour de la moyenne". S'il n'en n'était pas ainsi, en effet, la moyenne serait mal définie, et la distance déduite de l'observation d'un petit nombre d'entre eux risquerait d'être très erronée.

Ainsi, les principaux indicateurs sont constitués par les étoiles variables parmi lesquelles il faut distinguer les Céphéides de type I et celles de type II. L'utilisation des Céphéides pour déterminer les distances repose sur les courbes période-luminosité ($M - \log P$) qui impliquent en outre, la connaissance

de la magnitude absolue des variables d'amas du type R. R. Lyrae. D'autres étoiles variables, telles que les novae, constituent aussi des indicateurs de distance. Enfin, les étoiles les plus brillantes d'une galaxie servent également d'indicateurs. Ces déterminations reposent sur la relation

$$\log_{10} D = 0,2(m - M) + 1$$

où D est la distance en parsecs, m la magnitude apparente et M la magnitude absolue d'un objet. Par définition, M est la magnitude qu'aurait l'objet s'il était situé à une distance de 10 parsecs de l'observateur. Cette relation implique uniquement que l'intensité lumineuse de la source est inversement proportionnelle au carré de sa distance à l'observateur, ce qui, en toute rigueur, ne s'applique qu'à des objets stationnaires dans un espace euclidien. C'est cette relation qui sert de base à la détermination des distances des galaxies proches ou lointaines.

Rappelons les points essentiels des procédés expérimentaux utilisés, afin de pouvoir utiliser les résultats en cosmologie.

a. Pour les galaxies proches, un indicateur (de préférence plusieurs) est utilisé : pour lui, on connaît M , m . La relation précédente donne D qui est aussi la distance de la galaxie contenant cet indicateur.

b. L'étude des galaxies proches montre alors que les galaxies les plus brillantes d'un amas ont des magnitudes absolues comprises entre $-18,9$ et $-19,9$.

c. Les galaxies lointaines ne sont plus résolubles en étoiles. Par conséquent, on ne peut plus utiliser les indicateurs de distance habituels. On utilise alors la propriété précédente : $-19,9 < M < -18,9$ pour les galaxies les plus brillantes d'un amas de galaxies. Connaissant M , mesurant m par un procédé photométrique, la relation précédente donne D pour la galaxie. Bien entendu, ceci est très schématique. En fait, on introduit des corrections diverses, notamment celle qui tient compte du rougissement systématique du spectre des nébuleuses lointaines : c'est le terme K à cause duquel la relation qui donne D est remplacée par

$$\log_{10} D = 0,2(m - K - M) + 1 \quad .$$

Par son essence même, le terme K est lié au décalage δ . Pratiquement, il suffira de le représenter par la relation linéaire

$$K = K_1 \delta \quad .$$

Nous n'entrerons pas dans le détail des autres corrections, soit parce qu'elles sont abandonnées actuellement, comme celles résultant de l'effet Stebbins-Whitford, soit parce qu'elles sont plus spécifiquement empiriques comme la correction (tout à fait indispensable) tenant compte de l'absorption de lumière par les gaz et poussières interstellaires, absorption due à la position malheureuse occupée par le système solaire, tout près du plan central de la Galaxie.

Il faut maintenant relier la distance D d'une galaxie ainsi obtenue au mode de repérage du modèle cosmologique. Etant donné les processus de mesure qui viennent d'être mentionnés très brièvement, on appellera distance ([6] et [32]) d'une source à un observateur, ou plus précisément distance-luminosité D , une quantité telle que l'intensité lumineuse de la source mesurée par l'observateur soit inversement proportionnelle au carré de cette quantité.

Si l'on suppose que l'observateur est situé à l'origine des coordonnées, r_i étant la coordonnée radiale de la source, coordonnée constante dans le système comobile utilisé, t_i l'instant d'émission d'un signal lumineux, t_0 l'instant de réception de ce signal par l'observateur, la définition précédente se traduit, dans le modèle cosmologique, par

$$D = \frac{R_0^2}{R_i} \frac{r_i}{1 + \frac{kr_i^2}{4}}, \quad \begin{aligned} R_0 &= R(t_0) \\ R_i &= R(t_i) \end{aligned} .$$

Par une méthode de développement en série, McVITTIE a montré que le décalage δ est lié à D par la relation

$$D = \frac{c\delta}{h_1} \left(1 + \frac{h_1^2 + h_2}{2h_1^2} \delta \right) \quad \text{au 2e ordre d'approximation} .$$

On a posé

$$h_1 = \frac{\dot{R}_0}{R_0}, \quad h_2 = \frac{\ddot{R}_0}{R_0},$$

t_0 étant l'instant présent d'observation. En première approximation (δ petit) la relation précédente se réduit à

$$c\delta = h_1 D .$$

C'est la relation empirique initialement vérifiée par HUBBLE.

On voit ainsi comment les données d'observation peuvent apporter des **précisions** aux modèles cosmologiques. Ce qui est directement accessible à l'observation, c'est δ en fonction de m . On peut éliminer D au moyen de la relation

$$\log_{10} D = 0,2(m - K - M) + 1 \quad .$$

On obtient aisément

$$10^{0,2m} = A_1 \delta + A_2 \delta^2$$

avec

$$A_1 = \frac{c}{h_1} \frac{1}{10^{1-0,2M}}, \quad -19,9 < M < -18,9$$

$$A_2 = A_1 \left[2,303 \times 0,2K_1 + \frac{h_1^2 + h_2}{2h_1^2} \right] \quad .$$

L'observation fournit toute une série de valeurs pour m en fonction de δ . On peut en déduire A_1 et A_2 par une méthode de moindres carrés. On en tire

$$5,52 \cdot 10^{-18} < h_1 < 8,75 \cdot 10^{-18} \text{ sec}^{-1}$$

soit

$$171 < H < 270 \text{ km/s.Mpc} \quad ,$$

valeur assez bien connue d'après les résultats de HUMASON (les corrections de BAADE sur l'échelle de distance employée par HUBBLE sont effectuées).

Les observations permettent aussi d'obtenir

$$h_2 = -q_0 h_1^2$$

avec

$$2,7 < q_0 < 4,8$$

selon la valeur adoptée pour K_1 . Ceci est d'ailleurs plutôt un ordre de grandeur. Ce qu'il faut retenir du dernier résultat est surtout que h_2 est négatif ce qui entraînerait que l'expansion du système des galaxies est actuellement retardée.

On peut encore, en principe, tirer des indications à partir de l'évaluation de la densité matérielle dans l'univers. On a en effet, pour l'instant présent t_0

$$\mu_0 = \frac{1}{8\pi G_N} \left(\frac{3kc^2}{R_0^2} + 3h_1^2 - \Lambda c^2 \right)$$

et pour la pression

$$p_0 = \frac{c^2}{8\pi G_N} \left(-2h_2 - h_1^2 - \frac{kc^2}{R_0^2} + \Lambda c^2 \right) .$$

Si l'on admet que le fluide matériel est composé de matière incohérente, alors $p_0 = 0$ et

$$(4) \quad 2h_2 + h_1^2 + \frac{kc^2}{R_0^2} = 0 \quad (\text{si } \Lambda = 0) .$$

En portant dans l'expression de la densité, on en déduit

$$\frac{8\pi G_N \mu_0}{3} = \frac{kc^2}{R_0^2} + h_1^2 .$$

La comparaison de ces deux équations conduit à

$$(5) \quad \frac{4\pi G_N \mu_0}{3} = -h_2 \quad (= q_0 h_1^2)$$

ce qui implique h_2 négatif : c'est bien ce qui résulte des observations sur le décalage. Enfin, d'après (4)

$$\frac{kc^2}{R_0^2} = h_1^2 (2 q_0 - 1) .$$

le signe de k (et la valeur de R_0) pourrait donc être déterminé en utilisant uniquement les données sur le décalage, ainsi que l'ont préconisé HOYLE et SANDAGE [24]. Si $q_0 > \frac{1}{2}$ (ce qui semble être le cas d'après les récentes données de HUMASON, MAYALL et SANDAGE), $k = +1$, et l'Univers devrait être représenté par un modèle à espace sphérique. La valeur de la densité de matière est donnée par (5). Si les observations exigeaient $h_2 > 0$, alors il faudrait ou bien adopter le modèle d'Eddington-Lemaître avec $\Lambda > 0$ ou bien un autre modèle. La valeur de k est $+1,0$ ou -1 selon que

$$\mu_0 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \frac{3h_1^2}{8\pi G_N} \text{ c'est-à-dire } \frac{3 \times (7 \cdot 10^{-18})^2}{8\pi \times 6,6 \cdot 10^{-8}} = 10^{-28} \quad .$$

On trouve encore actuellement des valeurs si diverses pour μ_0 qu'on ne peut tirer de conclusion soit favorable soit défavorable. D'autre part, selon SANDAGE, h_1 a la même précision que l'échelle des distances et la valeur de h_2 est un simple ordre de grandeur.

Par conséquent, les données d'observation, quoiqu'impliquant un travail considérable, sont encore insuffisantes pour déterminer le modèle cosmologique le plus adapté à la représentation de l'univers réel.

Parmi les critiques les plus passionnées formulées contre les modèles cosmologiques en expansion de la relativité générale, il faut mentionner celles se rapportant à ce qu'il est convenu d'appeler l'âge de l'Univers.

7. Age de l'Univers.

Il faut évidemment mettre cette expression entre guillemets, car rien, jusqu'à présent, n'a démontré que la matière de l'Univers n'a pas toujours existé. Le sens à donner à une telle expression ne peut être que le suivant : on désigne ainsi le laps de temps écoulé depuis quelque événement important à grande échelle comme l'apparition de fortes densités, de températures très élevées, ou le commencement de l'expansion nébulaire.

Pour les astronomes, l'âge d'un objet est le temps qui s'est écoulé depuis la formation de l'objet sous un aspect qualitativement semblable à l'aspect actuel.

On dispose actuellement de trois méthodes pour estimer les dates d'événements passés.

1° Tout d'abord une méthode basée sur les conséquences des interactions stellaires dans notre galaxie et sur les théories de l'évolution des étoiles. Par l'étude de la dynamique des amas d'étoiles galactiques lâches, des amas stellaires denses (amas globulaires), et la statistique des binaires, BOK (1949) a montré que "l'échelle de temps de l'univers" était de l'ordre de 3 à 5×10^9 ans (ceci représentant le laps de temps écoulé depuis que les étoiles ont, grosso modo, leur distribution actuelle).

2° Une autre méthode utilise les conséquences du déclin radioactif de la matière terrestre ou des météorites. Dans le cas des roches terrestres, le rapport de

substance radioactive au produit de désintégration, par exemple d'uranium au plomb, fournit des informations sur l'époque à laquelle ces roches furent déposées sous leur forme actuelle avant leur désintégration. La constitution isotopique du plomb primitif de la terre commença à être modifiée par des additions d'isotopes de plomb produits par l'uranium, l'actinium, et le thorium. HOLMES [21] au moyen des résultats de l'analyse isotopique des échantillons de plomb, trouva que la Terre a existé depuis $\approx 3,35 \times 10^9$ ans, suffisamment séparée des autres corps pour que son contenu ait été protégé de mélanges et suffisamment "refroidie" pour que des "vitesses normales" de désintégration aient eu lieu depuis. Ce résultat est en assez bon accord avec l'estimation géologique de l'âge de ces roches (ceci suppose que les composés d'uranium se sont cristallisés seulement au moment de la formation des roches qui les contiennent).

Dans le cas des météorites, les rapports d'uranium (et thorium) à l'hélium renseignent sur la date où ils se sont solidifiés. PANETH a ainsi trouvé des valeurs plus dispersées allant de 6×10^7 à 7×10^9 ans (influence des rayons cosmiques sur les petits météorites qui ont la plus grande production d'He).

La similitude des résultats obtenus par ces deux méthodes si différentes est évidemment frappante. Si l'on porte l'attention sur le résultat de la première méthode, 3 à 5×10^9 ans représente le temps écoulé depuis la dernière grande perturbation de la galaxie, temps pendant lequel les étoiles de notre système sont en interaction gravitationnelle sans modification : il est naturel de vouloir aussi que notre galaxie soit séparée des autres nébuleuses depuis au moins le même temps. D'autre part, si l'âge de la terre est $3,35 \times 10^9$ ans environ, c'est-à-dire s'il s'est écoulé un tel laps de temps depuis que la densité moyenne de matière est tombée à un niveau tel que la terre puisse être séparée du reste et se trouver dans un état qualitativement semblable à l'état actuel, il faut donc que le début de la récession nébulaire soit $\geq (3 \text{ à } 5) \times 10^9$ ans.

3° La définition populaire de "l'âge de l'Univers", en cosmologie, est le temps qui s'est écoulé depuis le début de l'expansion jusqu'à l'instant présent t_0 : les modèles cosmologiques pourraient donc fournir une troisième méthode pour déterminer la date d'un événement important à grande échelle. Par définition, l'instant t_1 du début de l'expansion est tel que

$$R(t_1) = 0$$

(pour la première fois éventuellement en remontant dans le passé à partir de l'instant présent t_0) et "l'âge de l'Univers" serait ainsi

$$T = t_0 - t_i \quad .$$

Comme le paramètre de Hubble $h_1 = \left(= \frac{\dot{R}_0}{R_0} \right)$ a les dimensions de l'inverse d'un temps, $\frac{1}{h_1}$ a les dimensions d'un temps, et l'on pose parfois, un peu rapidement,

$$\frac{1}{h_1} = T \quad .$$

Or $h_1 \sim 7 \times 10^{-18} \text{ sec}^{-1}$, d'où par ce procédé, $T \sim 5 \times 10^9$ ans (SANDAGE, en 1958, donne pour le paramètre de Hubble 75 km/s.Mpc soit $T = 1,3 \times 10^{10}$ ans) ce qui est un peu court étant données les déterminations précédentes (surtout l'âge de la Terre : $3,35 \times 10^9$ ans). McVITTIE [34] est parti en guerre, dans plusieurs articles (même encore en 1959) contre cette méthode tirée de la cosmologie pour donner un âge à l'univers. Ses arguments sont aussi pertinents qu'humoristiques. Il montre que, si l'on définit

$$T = \frac{1}{h_1}$$

il faut prendre comme fonction R : $R(t) = at$ ($a = \text{Cte}$) . Mais dans ce cas $\dot{R} = a$, $\ddot{R} = 0$ et $h_2 = 0$ ce qui est en contradiction avec les résultats expérimentaux. Le point important est que l'observation ne détermine pas la fonction

$R(t)$ mais seulement $\frac{\dot{R}_0}{R_0}$, $\frac{\ddot{R}_0}{R_0}$ et, en principe k et R_0 , avec une précision plus ou moins bonne. Or la connaissance de $R(t)$ serait évidemment nécessaire pour déterminer t_i , tel que $R(t_i) = 0$ et obtenir T , le temps écoulé depuis le début de l'expansion. McVITTIE a construit des fonctions pour lesquelles $t_0 = \frac{1}{h_1}$ ($h_2 = -q_0 h_1^2$, conformément aux résultats expérimentaux) et, au moyen de ces fonctions, il a montré qu'on pouvait obtenir un âge d'univers petit, ou très grand, même infini, à volonté !

En fait, on peut relier d'une façon plus légitime, comme l'a montré BONDI par exemple, $\frac{1}{h_1}$ à l'âge de l'univers.

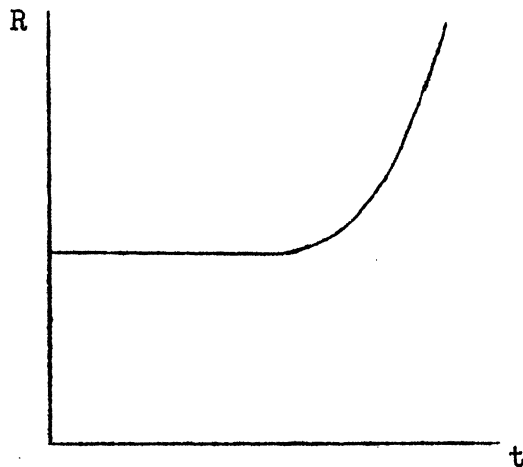
Si l'on se reporte aux expressions (2) et (3) de la densité et de la pression matérielles, on trouve qu'on peut remplacer l'une d'entre elles par l'équation

Si $\ddot{R} \leq 0$ pour tout $t \leq t_0$, la pente de la courbe est toujours décroissante de sorte que toute la courbe $R = f(t)$ est située à droite de la tangente en t_0 . On voit ainsi que ce qu'on a appelé "l'âge de l'Univers" $T = t_1 - t_0$ est certainement inférieur à $\frac{1}{h_1}$. Or, si l'on se reporte aux expressions de la densité et de la pression matérielles, on a

$$8\pi G_N \left(\mu + \frac{3p}{c^2} \right) = 2\Lambda c^2 - 6 \frac{\ddot{R}}{R} .$$

Le premier membre est toujours positif : par conséquent $\frac{\ddot{R}}{R}$ (ou \ddot{R}) sera toujours négatif à moins que Λ soit > 0 .

Pour les modèles à constante cosmologique nulle, $\frac{1}{h_1}$ fournit par conséquent une borne supérieure pour l'âge de l'univers ainsi défini ($T = t_0 - t_1$). On a souvent tiré de cette conséquence un argument en faveur des modèles à constante cosmologique $\Lambda > 0$ et plus particulièrement du modèle d'Eddington-Lemaître (1927) [29].



Selon ce modèle, l'Univers peut avoir été pendant un temps très long (même infini) dans l'état d'un modèle statique d'Einstein. A un moment donné, s'il se produit une instabilité locale, des étoiles et des galaxies peuvent se condenser en même temps que l'expansion commence (la formation d'une condensation locale entraînant l'expansion d'un univers d'Einstein).

Mais il semble que c'est la définition même de l'âge de l'Univers qui est critiquable. La définition couramment utilisée du début de l'expansion (c'est-à-dire $R(t_1) = 0$) implique qu'initialement toutes les galaxies (ou plutôt toute la matière de l'Univers) se trouvaient dans un volume infiniment petit (proportionnel à R^3). C'est une conception tout à fait arbitraire que n'imposent ni la théorie ni l'observation. Pour le début de l'expansion ainsi défini, "la métrique devient singulière et la densité μ infinie" ($\mu R^3 = Cte$). "Pour de grandes densités de champ et de matière, écrivait EINSTEIN, les équations du champ et même les variables de champ qui y figurent n'ont pas de signification réelle. Par conséquent, on ne peut pas admettre la validité des équations pour une densité de champ et de matière très grande et l'on ne peut pas conclure que le "début de l'expansion"

doit signifier une singularité au sens mathématique. Tout ce que nous devons considérer est que les équations peuvent n'être pas continues dans de telles régions. Toutefois, cette considération ne change pas le fait que le "début du monde" constitue réellement un début en ce qui concerne l'évolution des étoiles et des systèmes d'étoiles qui existent actuellement". Mais la date de ce début doit être déterminée par des méthodes plus spécifiquement astrophysiques.

En tout état de cause, il est bien évident que les modèles homogènes ainsi construits ne peuvent représenter l'univers réel qu'en toute première approximation. En effet, chaque galaxie doit être représentée, en réalité, par une condensation de matière de densité plus élevée que partout ailleurs. L'univers réel doit donc être décrit par des modèles non homogènes. Une telle description est d'ailleurs nécessaire pour une autre raison : TOLMAN a, en effet, montré qu'un modèle homogène est instable quand il se produit des perturbations de densité. Toute tendance locale à l'expansion est accentuée en une expansion plus poussée. De même, toute tendance locale à la contraction est suivie d'une contraction à plus grande échelle. Par conséquent, si un modèle homogène est perturbé, il devient inhomogène.

8. Modèles non homogènes.

Dans de tels modèles, la densité et la pression varient non seulement en fonction du temps mais aussi en fonction de la position spatiale. Une galaxie sera alors représentée par une condensation de matière plongée dans un fluide parfait. Guy C. OMER (1949) [37] a étudié une distribution de matière non statique, non homogène, présentant une symétrie sphérique autour d'une origine particulière. Il introduit en outre les simplifications suivantes :

a. L'observateur est supposé placé au centre de symétrie.

b. Le comportement de la distribution matérielle est supposé descriptible en coordonnées co-mobiles, ce qui, comme précédemment d'ailleurs, restreint le type de mouvements possibles en éliminant les dispersions des vitesses des particules et les rotations non-rigides.

c. La pression du fluide matériel est nulle partout et toujours.

L'intervalle élémentaire du V_4 a la forme suivante :

$$ds^2 = - \left[\frac{(\partial y / \partial r)^2}{1 + g} dr^2 + y^2 d\theta^2 + y^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right] + c^2 dt^2$$

où y est une fonction de r et t solution de l'équation

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = g + \frac{h}{y} + \frac{1}{3} \Lambda y^2 \quad ,$$

g et h étant des fonctions de r . OMER trouve pour la densité μ

$$8\pi\mu = \frac{\frac{dh}{dr}}{y^2 \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2} \quad .$$

Il obtient ainsi un certain nombre de modèles (dont les modèles homogènes constituent évidemment un cas particulier) parmi lesquels il peut choisir ceux qui représentent convenablement les relations observées (par exemple entre le décalage vers le rouge et la distance) en ajustant les paramètres dont il dispose et la valeur de la constante cosmologique. Il peut par exemple avoir un modèle pour lequel la densité moyenne actuelle de matière en notre voisinage soit 10^{-29} g/cm^3 et il a trouvé que $3,36 \times 10^9$ ans sont nécessaires pour passer d'une densité moyenne de 10^{-26} g/cm^3 à 10^{-29} g/cm^3 à l'origine. L'intérêt essentiel de ce travail est, non pas de fournir une description nécessairement correcte de la récession des nébuleuses, mais, selon l'avis même de son auteur, de montrer la grande souplesse de la relativité générale.

A. EINSTEIN et G. STRAUSS ((1945) [13]) ont étudié un modèle avec une seule condensation située à l'origine des coordonnées et représentée par une sphère vide au centre de laquelle est une masse ponctuelle. C'est un modèle à vacuoles, la vacuole étant plongée dans un fluide parfait homogène et isotrope. On peut alors trouver une solution exacte des équations de la relativité générale. Mais un modèle plus adapté à la description de l'univers réel comporterait un nombre arbitraire de condensations (à symétrie sphérique, en première approximation) plongées dans un fluide parfait. On ne connaît pas de solution exacte à ce problème, mais on peut déterminer une solution approchée.

L. INFELD et A. SCHILD ((1949) [26]) ont étudié le problème des masses ponctuelles plongées dans un espace-temps vide (en prenant $\Lambda = 0$)

McVITTIE ((1931) [33]) a décrit un modèle non uniforme contenant n condensations plongées dans un fluide parfait homogène, condensations réparties au hasard mais, en moyenne, à des distances telles que le champ de l'une quelconque d'entre elles n'interfère pas avec celui d'une autre, et d'une manière isotrope. Il est

possible de prendre comme forme d'intervalle élémentaire

$$ds^2 = (1 - K\psi) dt^2 - \frac{R^2(t)}{(1 + \frac{kr^2}{4})^2} (1 + K\omega) [(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2]$$

$$(K = 8\pi G_N/c^2)$$

où ψ et ω sont fonction des 4 coordonnées, et où les puissances de K supérieures à 1 sont négligées. En supposant que l'emploi de coordonnées co-mobiles est possible, et en étudiant le comportement du fluide (en dehors des petites régions occupées par les condensations), McVITTIE trouve que

$$\psi = \omega = \frac{\Psi(x^1, x^2, x^3)}{R}$$

où Ψ est une fonction arbitraire de x^1, x^2, x^3 . La fonction Ψ appropriée au nombre arbitraire n de condensations adoptée par McVITTIE est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = \frac{\Psi}{R} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{1}{a_i} \frac{Z_i}{Z_i'} - \frac{1}{a_i} \frac{Z_i'}{Z_i} \right) \quad (k \neq 0) \\ \psi = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{Z_i} \quad (k = 0) \end{array} \right.$$

avec

$$Z_i^2 = r^2 + a_i^2 - 2a_i r [\cos \theta \cos \theta_i + \sin \theta \sin \theta_i \cos(\varphi - \varphi_i)]$$

$$Z_i'^2 = r^2 + a_i'^2 + 2a_i' r [\cos \theta \cos \theta_i + \sin \theta \sin \theta_i \cos(\varphi - \varphi_i)]$$

$$a_i a_i' = \frac{4}{R}, \quad \text{coordonnées de la singularité } m_i \begin{cases} r = a_i \\ \theta = \theta_i \\ \varphi = \varphi_i \end{cases} .$$

Les condensations ont des coordonnées spatiales constantes dans le système co-mobile utilisé et par conséquent se déplacent en même temps que le fluide où elles sont immergées. Les résultats prévus par les modèles homogènes ne sont pas beaucoup modifiés tant que les masses des condensations sont petites. Par exemple, si $k = 0$ et $R = R_0 e^{\sqrt{\Lambda/3} t}$ (ce qui correspondait au modèle homogène de de Sitter

complété par l'hypothèse de Weyl), le ds^2 correspondant à ce cas représente un nombre arbitraire de condensations plongées dans un espace vide ($T^{\mu\nu} = 0$ partout en dehors des condensations), s'écartant toutes les unes des autres : ce qui pourrait être une assez bonne approximation pour représenter l'univers réel, les galaxies étant considérées comme des condensations séparées les unes des autres par des régions vides.

9. Temps "cosmique".

Une difficulté fondamentale liée aux modèles cosmologiques en relativité concerne la notion de temps cosmique implicitement contenu dans les divers développements. Cette notion a d'ailleurs été explicitée par ROBERTSON [39] selon qui "il est nécessaire d'introduire une notion de temps cosmique afin que des comparaisons puissent être faites entre des étapes correspondantes dans l'évolution des nébuleuses de différentes régions". Ainsi qu'il ressort de l'expression des ds^2 des modèles homogènes, étant donné le choix de coordonnées co-mobiles effectué, le temps-coordonnée x^4 ($= ct$) représente le temps propre de chaque particule de substrat (ou de l'observateur qui lui est lié) puisque pour chaque particule $dx^i = 0$. Les observateurs du substrat se déplacent de telle sorte qu'il existe un temps cosmique mesuré par le temps propre de chaque observateur. L'introduction du temps cosmique est évidemment liée au principe cosmologique. Car tout observateur voit un univers changeant, mais présentant le même aspect à tous. Donc un observateur A voit, à un instant t_A , l'univers dans le même état qu'un observateur B à un instant t_B de son temps propre. Par conséquent l'univers lui-même se comporte comme un instrument permettant à A et B (et à tous les observateurs) de synchroniser leurs horloges [1].

On est ainsi conduit, comme l'a fait remarquer S. KICHENASSAMY à introduire "un temps valable pour tous les observateurs" ou encore à admettre "la possibilité d'un observateur idéal, mais absolu, pour lequel l'espace-temps se révélerait être une succession dans le temps d'espaces-temps statiques, sans qu'il y ait interdépendance entre sa notion de durée et sa notion de distance ; c'est là un moyen détourné d'introduire la notion de repère absolu" et par conséquent une contradiction avec les principes et conséquences de la relativité restreinte. Cette difficulté tient à ce que la notion de durée est une notion globale qui nécessite le choix préalable de la métrique globale. Quelle signification peut-on en effet attribuer à l'égalité a priori des durées mesurées par deux observateurs distants mais localement au repos (et localement seulement) ? Une certaine

confusion s'est introduite entre le local et le global par l'emploi du système co-mobile qui ne doit pas être confondu avec la notion de repère propre à signification purement locale". S. KICHENASSAMY [27] en développant la méthode des transformées infinitésimales et en l'appliquant au problème cosmologique, a fourni un moyen pour lever cette difficulté. Il a trouvé en particulier, par cette méthode, le ds^2 non statique, isotrope et homogène suivant

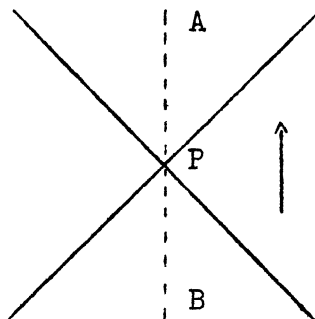
$$ds^2 = - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2 - \frac{(x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3 - x^4 dx^4)^2}{a^2 - \rho^2}$$

où a est une constante,

$$\rho^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 \quad .$$

Si a est réel, l'espace physique correspondant est clos et en expansion. Cette expansion rend compte de décalages systématiques vers le rouge ($1 + \delta v \frac{t_2}{t_1}$, t_2 temps d'arrivée, t_1 temps d'émission) vérifiant la loi empirique de Hubble en première approximation. Cet ensemble de résultats est donc tout à fait satisfaisant.

Le concept du temps se présente d'ailleurs en relativité générale comme un sujet aussi délicat que celui de distance. EINSTEIN [14], en 1950, formulait clairement le problème de la manière suivante :



Soit P un point d'univers. C'est le sommet d'un "cône de lumière". Traçons une ligne d'univers du genre-temps passant par P , et soient A et B deux points sur cette ligne, de part et d'autre de P . Y a-t-il un sens à pourvoir la ligne d'univers d'une flèche et à dire que B est avant P , A après P ? ou bien est-ce aussi justifié, du

point de vue physique, de mettre la flèche dans la direction opposée et de dire que A est avant P , B après P ? S'il est possible d'envoyer un signal de B à A , mais non de A à B , alors le caractère asymétrique du temps est assuré, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de libre choix pour la direction de la flèche. Le point essentiel est que l'envoi d'un signal est un processus irréversible, au sens thermodynamique. Si donc B et A sont deux points suffisamment voisins, qui peuvent être reliés par une ligne du genre temps, dire que " B est

avant A " a une signification physique. Mais si les points B et A sont arbitrairement éloignés, l'assertion " B est avant A " peut ne pas avoir de sens s'il existe des suites de points qu'on peut relier par des lignes du genre-temps de sorte que chaque point précède temporellement le précédent et si la suite est fermée sur elle-même. Dans ce cas, la distinction "antérieur-postérieur" est à abandonner pour des points éloignés, sinon on aboutit à des paradoxes concernant la causalité. On connaît une solution cosmologique des équations de la relativité générale dans laquelle il existe des lignes du genre-temps fermées: dans de tels univers, il est donc théoriquement possible de voyager dans le passé ou encore d'influencer le passé. C'est le modèle de K. GÖDEL.

10. Modèle de K. Gödel ((1949) [17] et [18]).

A propos de ce modèle, EINSTEIN écrivait : "il sera intéressant de voir si ces solutions ne doivent pas être exclues pour des raisons physiques". La principale propriété nouvelle du modèle de Gödel est qu'un compas d'inertie tourne partout par rapport à la matière, ce qui, dans notre univers réel, signifie qu'il tourne par rapport à la totalité des galaxies.

K. GÖDEL a commencé par étudier un tel univers en rotation qui était en outre spatialement homogène, stationnaire, avec constante cosmologique non nulle. L'élément linéaire correspondant avait pour expression

$$a^2 [dx_4^2 - dx_1^2 + (e^{2x_1}/2) dx_2^2 - dx_3^2 + 2e^{x_1} dx_4 dx_2]$$

où a est un nombre positif. On peut montrer facilement que la vitesse angulaire locale de la matière par rapport au compas d'inertie est un vecteur de composantes

$$(1) \quad \omega^\mu = \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{12\sqrt{-g}} a_{\nu\rho\sigma}$$

où

$$a_{\nu\rho\sigma} = v_\nu (\partial_\sigma v_\rho - \partial_\rho v_\sigma) + v_\rho (\partial_\nu v_\sigma - \partial_\sigma v_\nu) + v_\sigma (\partial_\rho v_\nu - \partial_\nu v_\rho)$$

v est le vecteur vitesse unitaire de la matière, ω la vitesse angulaire de la matière dans un système local d'inertie (ω est toujours orthogonal à v).

V et ω ont pour composantes

$$v^\mu \left(\frac{1}{a}, 0, 0, 0 \right), \quad \omega^\mu \left(0, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2a} \right), \quad v_\mu (a, 0, ae^{x_1}, 0) \quad .$$

D'après les équations de champ

$$\frac{1}{a^2} = 8\pi G_N \mu, \quad \lambda = -4\pi G_N \mu \quad (\text{ici } \lambda < 0) \quad .$$

Donc la matière tourne par rapport au compas d'inertie avec la vitesse angulaire

$$\Omega = \frac{\sqrt{2/2a^2}}{1/a} = 2(\pi G_N \mu)^{1/2} \quad .$$

Sa période de rotation, si $\mu = 10^{-30} \text{ g/cm}^3$ est

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 0,6 \times 10^{19} \text{ sec} = 2 \times 10^{11} \text{ ans} \quad .$$

Si l'on suppose que les systèmes galactiques se sont formés par condensation de la matière initialement distribuée uniformément, en prenant pour rapport de contraction 1/200 (suggéré par le rapport moyen observé de 1/200 entre le diamètre et la distance des galaxies) et en utilisant la loi de conservation du moment angulaire, on obtient comme période moyenne de rotation des systèmes galactiques 5×10^6 ans. Ce résultat est en bon accord avec les données numériques que l'on possède (HUBBLE donne pour deux galaxies de taille moyenne 2×10^7 à 7×10^7 ans à une distance correspondant à \approx la moitié du rayon à partir du centre. La période de rotation d'Andromède dans la région centrale est estimée à $1,5 \times 10^7$ ans).

La valeur réelle est beaucoup plus grande, car ceci est la valeur de la période de rotation dans les parties extérieures des nébuleuses. Mais ce modèle ne constituera une bonne représentation que lorsqu'on aura introduit l'expansion. Il faudrait aussi trouver une explication pour l'apparente irrégularité de la distribution des axes de rotation des galaxies, ce qui n'est pas impossible.

Comme $a_{\nu\rho\sigma} \neq 0$, il en résulte, d'après (1), que $\omega^1 \neq 0$ et il n'existe pas, dans ce modèle, de surfaces orthogonales aux lignes temporelles dans les sous-espaces

$$x^3 = \text{Cte} \quad (\omega^3 \neq 0, \quad \omega^1 = \omega^2 = \omega^4 = 0 \text{ dans ce cas}) \quad .$$

On peut introduire une direction positive de temps et définir une orientation temporelle pour la ligne d'univers de chaque particule matérielle, mais il n'existe aucun ordre temporel uniforme pour tous les événements qui serait conforme à tous les ordres individuels. Chaque ligne d'univers d'une particule matérielle est une ligne ouverte de longueur infinie, qui ne revient jamais en aucun de ses points ;

mais il existe aussi des lignes du genre-temps fermées. Un tel modèle ne peut évidemment pas rendre compte du décalage vers le rouge, puisqu'il est stationnaire. Par la suite (1950), GÖDEL a introduit aussi l'expansion dans son modèle en rotation.

Cette solution plus générale présente une propriété intéressante qui pourrait servir de critère pour déceler la rotation d'un univers homogène, fini et en expansion : pour des distances suffisamment grandes, il doit y avoir plus de galaxies dans une moitié du ciel que dans l'autre.

$$\frac{|N_1 - N_2|}{N_1 + N_2} = \frac{9}{8} \frac{|\omega| rRh}{c^2}$$

N_1 , N_2 nombres de galaxies dans les deux hémisphères en lesquels une sphère de rayon r ($\ll R$ rayon de l'univers) est décomposée par un plan orthogonal à ω , $h = Cte$ de Hubble.

Quoique le problème cosmologique se présente d'une manière particulière en relativité générale, néanmoins, les théories cosmologiques ne sont pas le seul apanage de la Théorie d'Einstein et, dès le 19e siècle, époque à laquelle la théorie de Newton fut adoptée, on essaya de construire des modèles d'univers.

11. Cosmologie newtonienne.

Les premiers essais se sont soldés par un échec, car ils supposaient, en plus du principe cosmologique, un état statique de l'Univers à grande échelle. En 1934, E. MILNE et W. McCREA ([31] et [35]) ont repris la question et montré l'analogie existant entre les solutions newtoniennes et celles de la relativité générale. Ces recherches sont intéressantes car elles montrent dans quelle mesure la théorie de Newton peut constituer une approximation de la relativité générale, non seulement pour les mouvements planétaires, mais aussi pour des phénomènes se déroulant sur une échelle plus vaste. De sorte que, pour étudier la dynamique d'une nébuleuse spirale ou d'un amas de nébuleuses, par exemple, la méthode newtonienne est suffisante.

Le cadre de la cosmologie newtonienne, par hypothèse, est le suivant :

- a. un espace tridimensionnel euclidien absolu
- b. un temps universel absolu (T) .

Etudions le comportement d'un fluide matériel continu supposé parfait, sous l'action du gradient de pression et de sa self-attraction gravitationnelle. Ce fluide est caractérisé en chaque point par une densité μ_N , une pression isotrope p_N et une vitesse v_i ($i = 1, 2, 3$), quantités pouvant dépendre des trois coordonnées spatiales X_i et de T . Le comportement de ce fluide parfait, en hydrodynamique newtonienne, satisfait d'une part à l'équation de continuité et d'autre part aux équations du mouvement

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mu_N}{\partial T} + \partial_i (\mu_N v^i) = 0 \\ \vec{F} = \frac{d\vec{v}}{dT} + \frac{1}{\mu_N} \text{grad } p_N \end{array} \right.$$

soit 4 équations pour les 5 inconnues μ_N , p_N , et les trois v^i . Le système est donc indéterminé. Pour avoir une relation supplémentaire, on fait appel à la thermodynamique : le fluide parfait a une équation d'état ($p_N \times \frac{1}{\mu_N} = RT$). On pourra envisager, par exemple, un comportement adiabatique du fluide, ce qui fournit la relation cherchée.

\vec{F} est la résultante des forces "extérieures" (c'est-à-dire autres que le gradient de pression). Dans le cas du fluide cosmologique,

\vec{F} est la self-attraction gravitationnelle. Donc

$$\vec{F} = \text{grad } U$$

où U , le potentiel newtonien satisfait à la loi de Poisson :

$$\Delta U = -4\pi G_N \mu_N, \text{ soit } \text{div } \vec{F} = -4\pi G_N \mu_N \quad .$$

On adopte en outre le principe cosmologique pour décrire le contenu matériel de l'Univers assimilé à un fluide homogène et isotrope : à un instant donné (de temps absolu) le fluide présente le même aspect pour tout observateur lié à une particule de substrat. Il en résulte alors que densité et pression ne dépendent que du temps. La forme de la fonction vitesse se déduit aussi très simplement.

Soit un observateur O lié au substrat. Pour le point P du fluide, il trouve

$\begin{array}{ccc} & \times P & \\ & & \\ O \times & & \times O' \end{array}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = O\vec{P} \\ \vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, T) \end{array} \right.$$

Un autre observateur O' également lié au substrat trouve, en P

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}' = O'P \\ \vec{v}' = \vec{v}'(\vec{r}', T) \end{array} \right. .$$

D'après le principe cosmologique, \vec{v}' doit être la même fonction de \vec{r}' et T que \vec{v} de \vec{r} et T . Sinon O et O' auraient des images différentes de l'univers. Laissons de côté la variable T , temps absolu, et occupons-nous seulement des variables d'espace. Soit $\vec{OO}' = \vec{a}$. La vitesse de O' par rapport à O est $\vec{v}(\vec{a})$ car O' est aussi lié au substrat. D'après la loi classique de composition des vitesses,

vitesse de $P/O' =$ vitesse de $P/O +$ vitesse de O/O'

$$\vec{v}'(\vec{r}' - \vec{a}) = \vec{v}(\vec{r}') - \vec{v}(\vec{a}) .$$

Mais \vec{v}' doit être la même fonction de son argument que \vec{v} . Donc

$$\vec{v}(\vec{r}' - \vec{a}) = \vec{v}(\vec{r}') - \vec{v}(\vec{a}) ,$$

ce qui montre que \vec{v} est une fonction linéaire de son argument. On l'écrira

$$\vec{v} = f(T) \cdot \vec{r} ,$$

ce qui traduit aussi l'hypothèse d'isotropie. $f(T)$ est une fonction quelconque du temps.

On peut intégrer cette dernière équation sous la forme

$$\vec{r} = R(T) \vec{r}_0 \quad (r_0 \text{ position de la particule } P \text{ à l'instant } T_0)$$

où $R(T)$ est une fonction quelconque du temps telle que

$$f(T) = \frac{\dot{v}}{r} = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT} \quad \text{et} \quad R(T_0) = 1 .$$

Par conséquent, d'après le principe cosmologique

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = \frac{\dot{R}}{R} \vec{r}_N \\ \mu_N = \mu_N(T) \\ P_N = P_N(T) \end{array} \right. .$$

Les seuls mouvements compatibles avec l'hypothèse d'un fluide homogène et isotrope

sont, par conséquent, des mouvements d'expansion ou de contraction uniformes.

Compte tenu du système (I) l'équation de continuité conduit alors à

$$(1) \quad \mu_N R^3 = \text{Cte} = \mu_0 R_0^3 \quad ,$$

ce qui traduit simplement la conservation de la masse. Les équations du mouvement où \vec{F} obéit à la loi de Poisson, compte tenu de (I) s'écrivent

$$(2) \quad \frac{\ddot{R}}{R} = - \frac{4\pi G_N}{3} \mu_0 \frac{R_0^3}{R^3} \quad (\text{en prenant } (p_N) = 0) \quad ,$$

équation qui, après une première intégration, donne

$$(3) \quad \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G_N \mu_0 R_0^3}{3} \left[\frac{1}{R^3} - \frac{k_N}{R_0 R^2} \right] \quad ,$$

où k_N est une constante d'intégration.

On voit, d'après (2) qu'un univers statique ($r = \text{Cte} = r_0$, $R = 1$) est impossible, sauf dans le cas trivial où $\mu_0 = 0$: en cosmologie newtonienne, un univers statique est vide. Ce sont des difficultés que l'on rencontrait au siècle dernier. Il est intéressant de les rapprocher des difficultés analogues rencontrées par EINSTEIN qui devait introduire une constante cosmologique Λ pour que son modèle statique ne soit pas vide ($\Lambda = \frac{4\pi G_N}{3} \mu$). Au siècle dernier, on a aussi cherché à remédier à cette conséquence cosmologique par une modification de la loi de Newton, modification qui ne deviendrait sensible que pour de très grandes distances et n'aurait pas d'effet appréciable à l'intérieur du système solaire. Ainsi, NEUMANN (1895) et SEELIGER (1895-1896) ([36], [40] et [41]) ont proposé de prendre comme loi de gravitation

$$\vec{F} = - \frac{4\pi G_N}{3} \mu_N \vec{r} + \frac{\lambda}{3} \vec{r} \quad , \text{ d'où } \text{div } \vec{F} = - 4\pi G_N \mu_N + \lambda \quad .$$

Mais ces modifications n'ont pas eu de succès étant donné leur caractère arbitraire. Les relations (1), (2) et (3) sont, formellement, tout à fait analogues à celles obtenues dans la théorie des modèles relativistes, si l'on y pose $\Lambda = 0$. On pourrait obtenir une analogie encore plus complète en prenant comme loi de force gravitationnelle

$$\text{div } F = - 4\pi G_N \mu_N + \lambda \quad .$$

On peut d'ailleurs pousser l'analogie beaucoup plus loin et obtenir un modèle newtonien qui soit non seulement en expansion, mais aussi en rotation, tout comme les modèles de Gödel en relativité générale. C. HECKMANN et E. SCHÜCKING [19] ont étudié un tel modèle. Pour cela, il suffit d'explicitier les composantes du vecteur vitesse. D'après (1) on a

$$\vec{v} = \frac{\dot{R}}{R} \vec{r}$$

que l'on peut écrire

$$v_i = a_{ik}(T) x^k ,$$

relation linéaire imposée par le "principe cosmologique".

Si l'on prend, en particulier,

$$a_{ik} = \frac{\dot{R}}{R} \delta_{ik} ,$$

on obtient les modèles précédents, en expansion (ou contraction) isotrope.

Si l'on pose, par définition

$$a_{ik} = \underline{a_{ik}} + a_{ikv}$$

on peut définir un vecteur $\vec{\omega}$ tel que

$$a_{ikv} = \varepsilon_{ikl} \omega^l$$

(ε_{ikl} étant antisymétrique par rapport à tous ses indices), et l'on peut montrer que ce vecteur ω^l représente la vitesse angulaire. Si l'on choisit, en particulier,

$$a_{ik} = \frac{\dot{R}}{R} \delta_{ik} + \varepsilon_{ikl} \omega^l ,$$

on obtient un modèle avec expansion isotrope (ou contraction) et rotation. En particulier, si l'on suppose que $R = 1$, on trouve alors

$$\lambda + 2\omega^2 = 4\pi G_N \mu .$$

Par rapport à un système d'inertie local, le substrat total tourne partout à la même vitesse angulaire ω . Pour $\lambda = -4\pi G_N \mu$ on obtiendrait l'analogie du modèle de Gödel.

On peut aussi développer un modèle non homogène sous la forme d'un modèle à vacuoles ([11] et [20]).

On obtient ainsi toute une série de modèles ayant pour cadre un espace euclidien absolu, munis d'un temps absolu et dans lesquels les forces de gravitation sont régies par la loi de Newton. L'étude mathématique plus simple de tels modèles pourrait servir de guide à une cosmologie relativiste dont les équations et les interprétations physiques sont tellement plus compliquées ! Mais l'idéal actuel reste de construire une bonne représentation de l'univers dans le cadre de la relativité générale pour des raisons évidentes (exigences de la relativité restreinte, caractère riemannien de l'espace-temps, etc.). L'étude de l'effet Hubble en cosmologie newtonienne ne fait que renforcer la nécessité de cet idéal. Ici, la relation linéaire vitesse-distance découle immédiatement du principe cosmologique. La théorie classique de l'effet Doppler montre un décalage systématique vers le rouge dans les modèles en expansion isotrope. Mais il faut évidemment faire appel à la loi classique de composition des vitesses, et cela dans le cas où l'une d'entre elles est précisément celle de la lumière, ce qui est tout à fait inadmissible depuis 1905.

12. Théorie de l'état stationnaire (steady-state theory).

Enfin, on a proposé, dans le cadre quelque peu modifié de la relativité générale, un modèle d'univers assez particulier décrit par la théorie de l'état stationnaire. L'hypothèse fondamentale de cette théorie, qui la distingue des modèles précédemment décrits, est connue sous le nom de principe cosmologique parfait (PCP). Selon le PCP, chaque observateur lié au substrat doit avoir le même aspect de l'univers à tout instant. Et, puisque, d'autre part, l'univers doit être en expansion, il faut que la matière soit créée continuellement pour maintenir la densité constante. Pour les auteurs de cette théorie (BONDI, GOLD (1948) [22] et [23]) le miracle de la création n'a pas eu lieu à un instant donné passé, mais il se poursuit toujours. De sorte que des nébuleuses de tous âges peuvent exister partout. Selon BONDI, le PCP est simplement "une autre expression du point de vue de Copernic selon lequel la Terre n'a rien d'exceptionnel". L'univers impliqué par le PCP n'est pas nécessairement statique, mais stationnaire. Et les observations dont on dispose actuellement ne contredisent pas cette hypothèse de création continue de matière, puisque celle-ci devrait se faire à la vitesse de

$$3 \mu_0 \times h_1 \neq 10^{-46} \text{ g/cm}^3 \cdot \text{s} \quad (h_1 = \text{Cte de Hubble})$$

ce qui correspond, en moyenne, à la création d'un atome d'hydrogène par litre tous les 5×10^{11} ans. On peut donc continuer à considérer le principe de la conservation de la matière comme une excellente approximation.

Comme il a été indiqué précédemment, un substrat homogène et isotrope satisfaisant au principe cosmologique simple et au postulat de Weyl est décrit, ainsi que l'ont montré ROBERTSON et WALKER ([38] et [44]), par

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{R^2(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

(système de coordonnées co-mobiles). Supposons maintenant que le substrat satisfasse au PCP. Le carré du rayon de courbure du V_3 est $\frac{k}{R^2}$. C'est une quantité observable car elle est liée au nombre de nébuleuses. D'après le PCP, elle doit donc être constante. Par conséquent

1. ou bien $R = Cte$ et $k = 1$: c'est le modèle statique d'Einstein.

2. ou bien $R \neq Cte$ (R est une fonction croissante puisqu'on admet l'expansion : univers stationnaire mais non statique) et $k = 0$. Mais $\frac{\dot{R}}{R}$ est impliquée dans la relation vitesse-distance. C'est le "paramètre" de Hubble, quantité directement observable. D'après le PCP, cette quantité doit rester constante (elle deviendrait donc la "constante" de Hubble) : ce qui entraîne que $R(t)$ soit une fonction exponentielle et par conséquent la métrique prend la forme

$$ds^2 = c^2 dt^2 - e^{2t/T} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

où $\frac{1}{T}$ est la constante de Hubble ($R(t) = e^{t/T}$).

C'est la métrique de de Sitter, rejetée par la relativité générale parce qu'elle représente un univers vide. Dans la théorie du "steady-state", cette difficulté n'apparaît pas puisque les équations de la relativité générale (qui impliquent la conservation de la matière) sont modifiées. En particulier, HOYLE ((1948, 1949) [22] et [23]) a proposé des équations de champ qui pourraient servir de base à cette théorie avec création continue de matière. Son point de vue est un peu différent de celui de BONDI et GOLD. Il n'adopte pas, comme point de départ, un principe cosmologique valable pour tout l'univers mais cherche des lois locales comme on le fait habituellement. L'extension de ces lois locales au système constitué par l'univers peut conduire au modèle de l'état stationnaire. En fait,

le modèle de Bondi, Gold, sert de guide pour trouver une solution aux équations de champ de Hoyle qui, autrement, sont indéterminées.

Le principe de la théorie de Hoyle est le suivant :

Désignons par λ la densité de matière créée par unité de temps. Pour un milieu continu, dans une formulation non relativiste, on aurait comme équation de continuité :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \partial_i (\mu v^i) = \lambda(x_j, t)$$

et comme équation du mouvement

$$f^i + \lambda v^i = \frac{\partial}{\partial t} (\mu v^i) + \partial_k (\mu v^i v^k)$$

où f^i est la force extérieure par unité de volume, λv^i la densité d'impulsion de la matière créée par unité de temps. La formulation relativiste de ces équations s'écrit

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = S^\mu$$

avec

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}, \quad T^{\mu\nu} = \mu u^\mu u^\nu, \quad S^\mu = \lambda v^\mu, \quad v^\mu v_\mu = 1 \quad ;$$

v^μ est la quadrivitesse de la matière créée. F. HOYLE écrit S^μ sous forme de la divergence d'un tenseur symétrique du 2e rang :

$$(S) \quad S^\mu = -\frac{1}{\chi} \nabla_\nu C^{\mu\nu}$$

de sorte qu'on peut construire ainsi un tenseur du 2e ordre conservatif

$$\nabla_\nu (T^{\mu\nu} + \frac{1}{\chi} C^{\mu\nu}) = 0 \quad .$$

HOYLE prend comme équation du champ

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = \chi T_{\mu\nu} + C_{\mu\nu} \quad .$$

La résolution de ce système d'équations est indéterminée en ce sens que S^μ n'est pas connu et qu'on a 4 équations (S) pour déterminer les 10 inconnues $C_{\mu\nu}$.

Pour obtenir le modèle de Bondi, de ds^2 connu, comme solution des équations de

Hoyle (avec $k = 0$, $R = e^{t/T}$) il faut avoir

$$\chi \mu T^2 = 3, \quad \chi = \frac{8\pi G_N}{c^4}, \quad T = \frac{1}{H}$$

$$\lambda = \frac{3\mu}{T} = 3\mu H, \quad v_\mu = \delta_{\mu 4}$$

(donc $\mu \neq 0$, différence avec le modèle de de Sitter, et même $\mu \neq 10^{-29} \text{ g/cm}^3$).

13. Confrontation avec l'expérience.

$$R = e^{t/T}, \quad \dot{R} = \frac{1}{T} e^{t/T}, \quad \ddot{R} = \left(\frac{1}{T}\right)^2 e^{t/T}, \quad \frac{\ddot{R}}{R} = \left(\frac{1}{T}\right)^2.$$

Or, l'expérience donne

$$h_2 \quad \left(= \frac{\ddot{R}}{R} \right) < 0.$$

Il semble donc, d'après les données actuellement disponibles, que la théorie de l'état stationnaire ne soit pas en accord avec certains résultats expérimentaux.

En définitive, la relativité générale possède encore de nombreuses ressources pour étudier le problème cosmologique. Les modèles d'univers récemment proposés, plus réalistes, semblent fournir une meilleure description du système des galaxies. Mais c'est encore du côté expérimental que se tournent les recherches cosmologiques. Il faudrait posséder en effet un plus grand nombre de résultats d'observations sur l'échantillon d'univers actuellement accessible, explorer un domaine plus grand. Malgré l'énorme travail expérimental accompli et les progrès effectués depuis une vingtaine d'années, le programme d'étude demeure encore très vaste. Seule, sa réalisation, tout au moins partielle, pourrait permettre de faire un choix parmi les divers modèles d'univers proposés et d'apporter ainsi au problème cosmologique une solution aussi satisfaisante que possible.

Ainsi, bien que la porte ait été entr'ouverte, bien des mystères demeurent dans le royaume des nébuleuses.

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages fondamentaux.

- [1] BONDI (H.). - Cosmology. - Cambridge, Cambridge University Press, 1952.
- [2] EINSTEIN (Albert). - The meaning of relativity, 5th edition. Appendix 1. - London, Methuen and Co, 1951.
- [3] HECKMANN (O.). - Theorien der Kosmologie. - Berlin, 1942.
- [4] HUBBLE (Edwin). - The realm of the nebulae. - New York, Dover Publication, 1958.
- [5] Mc VITTIE (G. C.). - Cosmological theory. - London, Methuen and Co, 1949 (Methuen's Monographs on physical Subjects).
- [6] Mc VITTIE (G. C.). - General relativity and cosmology. - London, Chapman and Hall, 1956 (International Astrophysics Series, 4).
- [7] ROBERTSON (H.). - Relativistic cosmology, Review of modern Physics, t. 5, 1933, p. 62-90.
- [8] TOLMAN (R. C.). - Relativity, thermodynamics and cosmology. - Oxford, at the Clarendon Press, 1950.
- [9] VAUCOULEURS (G. de). - L'exploration des galaxies voisines. - Paris, Masson, 1958.

Références particulières.

- [10] BONDI (H.) and GOLD (T.). - The steady-state theory of the expanding universe, Monthly Not. Royal astron. Soc., t. 108, 1948, p. 252-270.
- [11] BONNOR (W. B.). - Monthly Not. Royal astron. Soc., t. 117, 1957, p. 104.
- [12] EINSTEIN (Albert). - Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie, Sitz. kön. preuss. Akad. Wiss., 1917, p. 141-152.
- [13] EINSTEIN (A.) and STRAUSS (E. G.). - The influence of the expansion of space on the gravitation fields surrounding the individual stars, Review of modern Physics, t. 17, 1945, p. 120-124.
- [14] EINSTEIN (Albert). - Albert Einstein : Philosopher-scientist, 2nd edition. - New York, Tudor publishing Company, 1951 (The Library of living Philosophers).
- [15] FRIEDMANN (A.). - Über die Krümmung des Raumes, Z. für Phys., t. 10, 1922, p. 377-386.
- [16] FRIEDMANN (A.). - Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes, t. 21, 1924, p. 326-332.
- [17] GÖDEL (Kurt). - An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation, Review of modern Physics, t. 21, 1949, p. 447-450.
- [18] GÖDEL (Kurt). - Rotating universes in general relativity theory, Proceedings of the international congress of mathematicians [11. 1950. Cambridge (Mass.)] ; p. 175-181. - Providence, American mathematical Society, 1952.

- [19] HECKMANN (O.) und SCHÜCKING (E.). - Ein Weltmodell der Newtonschen Kosmologie mit Expansion und Rotation, Cinquantenaire de la théorie de la relativité [1955. Bern] ; p. 114-115. - Basel, Birkhäuser-Verlag, 1956 (Helvetica Physica Acta. Supplementum, 4).
- [20] HECKMANN (O.) und SCHÜCKING (E.). - Andere kosmologische Theorien, Astrophysik : IV. Sternsysteme ; p. 520-537. - Berlin, Springer, 1959 (Handbuch der Physik, 53).
- [21] HOLMES (Arthur). - The age of the Earth, Annual Report Smithsonian Institution, 1948, p. 227-239, pl. h. t.
- [22] HOYLE (F.). - A new model for the expanding universe, Monthly Not. Royal astron. Soc., t. 108, 1948, p. 372-382.
- [23] HOYLE (F.). - On the cosmological problem, Monthly Not. Royal astron. Soc., t. 109, 1949, p. 365-371.
- [24] HOYLE (F.) and SANDAGE (A.). - The second-order term in the redshift-magnitude relation, Publ. Astron. Soc. Pacific, t. 68, 1956, p. 301-307.
- [25] HUBBLE (Edwin). - A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 15, 1929, p. 168-173.
- [26] INFELD (L.) and SCHILD (A.). - On the motion of test particles in general relativity, Review of modern Physics, t. 21, 1949, p. 408-414.
- [27] KICHENASSAMY (S.). - Sur le choix des solutions particulières dans les théories relativistes (Thèse Sc. math. Paris. 1958), multigraphié.
- [28] KLEIN (O.). - On the Eddington relations and their possible bearing on an early state of the system of galaxies, Cinquantenaire de la théorie de la relativité [1955. Bern] ; p. 147-149. - Basel, Birkhäuser-Verlag, 1956 (Helvetica Physica Acta. Supplementum, 4).
- [29] LEMAITRE (G.). - Les univers homogènes de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extragalactiques, Ann. Soc. scient. Bruxelles, Série A, t. 47, 1927, p. 49-59.
- [30] LILLEY (A. E.) and Mc CLAIN (E. F.). - Astrophys. J., t. 123, 1956, p. 172.
- [31] Mc CREA (W. H.) and MILNE (E. A.). - Newtonian universes and the curvature of space, Quart. J. of Math., Oxford Series, t. 5, 1934, p. 73-80.
- [32] Mc CREA (W. H.). - Z. für Astrophys., t. 9, 1934/35, p. 290.
- [33] Mc VITTIE (G. C.). - The problem of n bodies and the expansion of the universe, Monthly Not. Royal astron. Soc., t. 91, 1931, p. 274-283.
- [34] Mc VITTIE (G. C.). - Distance and time in cosmology : The observational data, Astrophysik : IV. Sternsysteme ; p. 445-488. - Berlin, Springer-Verlag, 1959 (Handbuch der Physik, 53).
- [35] MILNE (E. A.). - A newtonian expanding universe, Quart. J. of Math., Oxford Series, t. 5, 1934, p. 64-72.
- [36] NEUMANN (Carl). - Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen mit besonderer Rücksicht und die elektrischen Wirkungen. - Leipzig, B. G. Teubner, 1896.
- [37] OMER (Gry C., Jr.). - A nonhomogeneous cosmological model, Astrophys. J., t. 109, 1949, p. 164-176.

- [38] ROBERTSON (H. P.). - Kinematics and worldstructure, *Astrophys. J.*, t. 82, 1935, p. 284-301 ; et t. 83, 1936, p. 187-201 et 257-271.
- [39] ROBERTSON (H. P.). - The theoretical aspects of the nebular redshift, *Publ. Astron. Soc. Pacific*, t. 67, 1955, p. 82-98.
- [40] SEELIGER (H.). - Über das Newton'sche Gravitationsgesetz, I., *Astron. Nachr.*, t. 137, 1895, p. 129-136.
- [41] SEELIGER (H.). - Über das Newton'sche Gravitationsgesetz, II., *Minchen Berichte, Math.-phys. Klasse*, t. 26, 1896, p. 373-400.
- [42] SITTER (W. de). - On the relativity of inertia, Remarks concerning Einstein's latest hypothesis, *Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam*, t. 19, 1917, p. 1217-1225.
- [43] SITTER (W. de). - On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences, *Monthly Not. Royal astron. Soc.*, t. 78, 1917, p. 3-28.
- [44] WALKER (A. G.). - On Milne's theory of world-structure, *Proc. London math. Soc., Series 2*, t. 42, 1936/37, p. 90-127.
- [45] WEYL (H.). - Zur allgemeinen Relativitätstheorie, *Phys. Z.*, t. 24, 1923, p. 230-232.
- [46] WEYL (H.). - Redshift and relativistic cosmology, *Phil. Mag., Series 7*, t. 9, 1930, p. 936-943.
-