SÉMINAIRE JANET.
MÉCANIQUE ANALYTIQUE
ET MÉCANIQUE CÉLESTE

JEAN KOVALEVSKY

Méthodes numériques modernes en mécanique céleste

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 4 (1960-1961), exp. nº 1, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1960-1961__4__A1_0>

MÉTHODES NUMÉRIQUES MODERNES EN MÉCANIQUE CÉLESTE

par Jean KOVALEVSKY

A. Introduction.

Dans un récent séminaire [5] nous avons montré que la résolution rigoureuse des équations de la Dynamique dans le système solaire, sous forme d'expressions absolument convergentes, est impossible dans l'état actuel de la Mécanique céleste.

Il est certes possible, d'après la théorie de SUNDMANN, par une succession de prolongements analytiques et en utilisant une variable régularisatrice particulière, de trouver des expressions absolument convergentes décrivant les propriétés d'un système de trois corps en mouvement, à chaque instant t compris entre $-\infty$ et $+\infty$. Mais, pour appliquer cette théorie aux cas réels, il faudrait utiliser un nombre tellement grand de ces expressions, elles-mêmes tellement longues et complexes, qu'il ne peut être question de les calculer numériquement.

On est donc conduit à utiliser la quasi-résolution de ces équations, décrite dans le séminaire cité ci-dessus. Cette théorie nous à conduit à mettre dans un intervalle de temps fini donné la solution sous une des trois formes suivantes :

1° Les variables métriques (comme le demi-grand axe a, l'excentricité e ou l'inclinaison i, ou encore le rayon vecteur dans des coordonnées d'origine le centre d'un des corps) se mettent sous la forme :

$$(1) \qquad \sum_{k,k',k'',\ldots} A_{k,k',k'',\ldots} \cos(k\lambda + k'\lambda' + k''\lambda'' + \ldots)$$

où k, k', k'' ... sont des entiers quelconques, où les coefficients A dépendent des constantes d'intégration et où les coefficients λ sont des fonctions linéaires du temps (les coefficients de ces fonctions dépendant également des constantes d'intégration).

En particulier, pour le mouvement d'un satellite autour d'une planète se déplaçant suivant un mouvement elliptique (le problème principal de la Lune), les expressions (1) ont la forme suivante :

(2) $$\sum_{fijk} A_{fijk} \cos(f\ell + i\ell' + jg + kh) \quad .$$

Elles sont obtenues en appliquant à ce problème particulier le théorème de Delaunay-Tisserand.

f , i , j et k sont des nombres entiers.

ℓ est l'anomalie moyenne "moyenne" du satellite ;

ℓ' est l'anomalie moyenne de la planète ;

g est l'argument moyen du périastre du satellite ;

h est la longitude moyenne du noeud du satellite.

Les constantes d'intégration représentent les valeurs moyennes de a , e et i , puis les valeurs initiales des arguments ℓ , g et h .

2° Les variables angulaires (comme l'anomalie moyenne instantanée M , la longitude du noeud Ω , l'argument du périastre ω ; ou encore la longitude ou la latitude d'un des corps par rapport à un autre) se mettent sous la forme :

(3) $$(Bt + B_0) + \sum_{k,k',k'',\dots} B_{kk'k''} \sin(k\lambda + k'\lambda' + k''\lambda'' + \dots)$$

avec des notations analogues aux précédentes. $Bt + B_0$ est une des combinaisons $k\lambda + k'\lambda' + k''\lambda'' + \dots$

Pour le problème principal de la Lune, cette expression devient

(4) $$Bt + B_0 + \sum_{fijk} B_{fijk} \sin(f\ell + i\ell' + jg + kh) \quad .$$

Pour M , Ω et ω , $Bt + B_0$ est respectivement ℓ , h et g .

3° Les autres variables (comme les coordonnées rectangulaires) sont représentées par une combinaison du type (1) et (3).

On dit qu'on a obtenu une théorie générale d'un système lorsque la solution est mise sous une des formes précédentes. Cependant, si un ou plusieurs arguments $\lambda^{(i)}$ ont une période longue par rapport à l'intervalle de temps à l'intérieur duquel on désire avoir une théorie valable, on peut remplacer ces expressions par des développements limités du temps dans la mesure où ce dernier entre dans ces $\lambda^{(i)}$. La solution est alors une théorie du type planétaire ; elle se présente sous la troisième forme ci-dessus, où les A et les B sont des polynômes par rapport au temps.

Nous rappelons que ces expressions ne sont pas convergentes, car on peut toujours trouver une combinaison des entiers λ , λ' , λ'' , ... telle qu'au cours de l'intégration il faille diviser par un nombre aussi petit que l'on veut. Mais, en ne conservant qu'un nombre fini de termes appartenant aux séries ci-dessus, on obtient des expressions qui représentent la solution dans un intervalle de temps Δt avec une précision ε donnée.

Les diverses méthodes de la Mécanique céleste permettent de trouver ces expressions finies sous forme numérique, de manière à représenter les observations du corps céleste étudié, si possible avec une précision comparable à la précision des observations.

B. Méthodes utilisées en Mécanique céleste.

1. Théorie analytiques.

Ce sont celles où l'on s'efforce de donner aux coefficients A et B des formules (1) et (3) leur expression algébrique en fonction des constantes d'intégration. Il ne reste plus à demander à l'observation que la valeur de ces constantes pour obtenir, par substitution, les expressions numériques désirées. C'est le cas de la théorie de la Lune de DELAUNAY et de celle des grosses planètes de Le VERRIER. Mais, malgré le grand nombre de termes calculés (près de 10.000 monômes, chez DELAUNAY), les expressions trouvées sont encore trop incomplètes pour permettre d'atteindre la précision des observations. Il faudrait, maintenant, une précision de $0'',01$ sur plus de 100 années. Les théories de cette ampleur dépassent les possibilités humaines. Il faut attendre, pour y revenir, que les machines électroniques puissent prendre en charge tout ce travail algébrique.

2. Théories semi-analytiques.

On désigne sous ce nom des théories dans lesquelles on suppose connues, d'avance, les valeurs numériques d'une ou de plusieurs constantes d'intégration. Les modes de résolution employés pourraient servir à des méthodes analytiques, mais l'identification de paramètres avec des valeurs numériques permet de regrouper en un seul terme toutes les quantités qui ne diffèrent que par des fonctions de ces paramètres. On diminue ainsi de beaucoup l'importance des expressions utilisées. L'exemple le plus connu des théories de ce type est la théorie de la Lune de BROWN.

3. Théories numériques.

Dans ces théories, toutes les constantes d'intégration sont prises d'emblée avec leur valeur numérique. Les séries intermédiaires et définitives ont une des formes (1) à (4) où les A et les B sont des nombres. Parmi les théories classiques de ce type, signalons celles résultant de la méthode de HANSEN, comme la théorie de Jupiter et de Saturne de HILL.

Tout problème, traité par l'une des deux dernières méthodes ne peut pas conduire d'emblée à une solution définitive. Les relations entre les constantes d'intégration, et les quantités observées sont souvent très complexes et ne peuvent être entièrement explicitées que par des théories purement analytiques. On est donc conduit à améliorer ces théories par des méthodes itératives, en améliorant, par approximations successives, les valeurs numériques des constantes d'intégration. Cette procédure converge si, au départ, les constantes d'intégration adoptées ne diffèrent des définitives que par des quantités de l'ordre des perturbations [3]. Cette condition n'est, en fait, pas si aisée à remplir, d'autant plus qu'elle est mal définie. Nous verrons plus loin un cas où elle n'a pas pu être remplie.

4. Intégration numérique.

Citons, pour mémoire seulement, cette méthode qui permet d'obtenir, dans un intervalle de temps Δt, et avec la précision même des observations, des éphémérides du corps étudié. On ne peut pas, cependant, considérer qu'il s'agit là, à proprement parler, de résolution des équations, puisqu'aucune propriété, même locale, de la solution n'apparaît dans le tableau final des valeurs des coordonnées. Le caractère même du mouvement n'est pas mis en évidence. Le résultat, valable avec la précision désirée dans l'intervalle Δt, ne fournit aucune indication sur ce qui se passe au-delà, à l'inverse des théories numériques dont la précision ne s'effrite que lentement au delà de l'intervalle fondamental (des résultats qualitatifs subsistent dans un intervalle cent et mille fois supérieur). De plus, les théories numériques permettent de façon très commode l'addition de nouvelles causes de perturbations, ce qui est impossible, sans recommencer presque tout le travail, pour le résultat d'une intégration numérique.

C. Théories numériques.

Le schéma classique de la construction d'une théorie numérique est le suivant :

1° On construit une théorie analytique approchée, solution exacte d'un système différentiel simplifié. C'est parfois une orbite elliptique (méthode de HANSEN), parfois une orbite périodique (l'orbite variationnelle de HILL dans la théorie de la Lune de BROWN), soit une solution plus complexe encore (l'orbite intermédiaire, dépendant de deux arguments indépendants, utilisée par BROWN et BROUWER dans leur théorie du satellite de Jupiter [2]). Par substitution des constantes numériques approchées, on obtient ainsi une première approximation.

2° Soit

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_j) \qquad 1 \leqslant i \, , \, j \leqslant n \tag{5}$$

le système d'équations à résoudre.

Supposons que l'orbite calculée ci-dessus soit représentée par le système de fonctions x'_1 , x'_2 , ... , x'_n du temps, solution du système d'équations

$$\frac{dx'_i}{dt} = f'_i(x'_j) \qquad 1 \leqslant i \, , \, j \leqslant n \quad . \tag{6}$$

On pose $x_i = x'_i + \delta x_i$, et on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\delta x_i}{dt} &= f_i(x'_j + \delta x_j) - f'_i(x'_j) \\ \frac{d\delta x_i}{dt} &= f_i(x'_j) - f'_i(x'_j) + \Sigma\, \delta x_j \frac{\partial f_i}{\partial x'_j}(x'_j) + \dots \end{aligned} \tag{7}$$

Si les fonctions f_i et f'_i sont telles que leur différence soit petite, de l'ordre δx_j , et si on peut négliger $(\delta x_j)^2$, on est conduit à résoudre le système (7) linéarisé :

$$\frac{d\delta_1 x_i}{dt} = f_i(x'_j) - f'_i(x'_j) + \Sigma\, \delta_1 x_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x'_j) \tag{8}$$

On écrit $x''_i = x'_i + \delta_1 x_i$ et on reprend avec cette nouvelle solution une nouvelle itération jusqu'à convergence du processus.

Ce schéma théorique n'est pourtant pas toujours réalisable. Des difficultés peuvent surgir dans chacune des deux parties.

En ce qui concerne la recherche de la théorie analytique du problème approché, on peut se demander si une telle théorie peut s'exprimer sous forme de séries de Fourier convergentes. En effet, toutes les théories analytiques sont construites en partant du principe que la fonction perturbatrice peut être développée en séries de Fourier des éléments angulaires. On est, en particulier, conduit à développer sous cette forme tous les seconds membres des équations différentielles, en supposant que les variables qu'on y trouve sont des solutions du problème des deux corps.

Or, ces développements, dans les théories analytiques, doivent être ordonnés suivant les puissances croissantes de l'excentricité. Et on sait (voir par exemple [8] pour la démonstration) que ces développements ne sont pas convergents, lorsque l'excentricité dépasse $e_0 = 0,6624...$ Aucune théorie analytique n'est valable et ne peut être construite, sur les bases classiques, qu'en supposant que l'excentricité instantanée n'atteint jamais la valeur e_0. De plus, la convergence de ces séries devient très lente lorsque l'excentricité est grande, sans atteindre la valeur e_0, augmentant de façon impraticable le nombre de termes qu'il faut conserver.

Par conséquent, la première condition d'application du schéma classique est qu'il existe une théorie analytique d'un problème suffisamment approché pour que les δx_i soient petits.

Pratiquement, si les perturbations sont faibles, et qu'ainsi on peut se contenter d'une ellipse pour la première approximation, il n'y a aucune limitation, puisque la théorie analytique du problème des deux corps existe et donne lieu à une théorie numérique bien définie. Par contre, si les perturbations sont grandes, et qu'on ne peut se contenter du mouvement elliptique même en première approximation, le schéma classique devient inapplicable. Le cas du 8e satellite de Jupiter que nous traitons plus loin, est un exemple d'une telle impossibilité.

Deux questions se posent, concernant le processus d'itérations.

1° Le processus converge-t-il effectivement ? Il faut pour cela que les δx_i restent petits dans tout l'intervalle de temps, et sous certaines conditions d'ordre général des fonctions f_i et de leurs dérivées. Cependant, par suite de la complexité de ces fonctions, il est pratiquement impossible de faire une théorie générale. On est conduit à étudier cette question de convergence dans chacun des cas particuliers.

En général, cette convergence à lieu. Les séries obtenues, d'une approximation à la suivante, satisfont aux équations, avec des erreurs allant en diminuant, et qu'on peut rendre aussi faibles que l'exigent les observations dans l'intervalle de temps considéré.

2° Cette convergence est-elle rapide ? Le problème est encore plus difficile à résoudre dans le cas général que le précédent. Pratiquement, on étudiera cette question en même temps que la précédente, en confondant, en fait, les cas de convergence lente avec les cas de non-convergence, car, dans les deux cas, le calcul pratique est impossible.

De deuxième exemple que nous exposons - celui de la théorie générale de Jupiter et de Saturne - nous fournit un exemple de non convergence d'un processus itératif, malgré la petitesse apparente de δx_i .

Le principal problème qui se pose maintenant aux théoriciens de la Mécanique céleste appliquée est d'inventer de nouvelles méthodes en dehors de ce schéma pour pouvoir résoudre les problèmes qui ne sont pas susceptibles d'être abordés par les méthodes classiques. Ces recherches doivent être faites en tenant compte des progrès de l'analyse et des possibilités nouvelles offertes par l'utilisation des machines à calculer électroniques à grande vitesse et à grande capacité. Nous allons poser le problème à résoudre dans deux cas que j'ai eu l'occasion d'étudier en donnant une solution nouvelle pour le premier des deux exemples.

D. Premier exemple : le mouvement du 8e satellite de Jupiter.

Ce satellite, très éloigné de Jupiter, subit de très fortes perturbations solaires (le rapport entre les forces d'attractions par le Soleil et par Jupiter peut atteindre 1/7). De plus, son excentricité moyenne (0,41) est la plus grande du système solaire, si bien que l'excentricité instantanée peut dépasser la limite e_0 .

Par exemple, on sait que le développement de l'anomalie excentrique est :

$$E = M + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2J_p(pe)}{p} \sin pM \qquad (9)$$

qu'on peut encore écrire :

$$E = M + \left(e - \frac{e^3}{8} + \ldots\right) \sin M + \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{6} + \ldots\right) \sin 2M + \left(\frac{3}{8} e^3 + \ldots\right) \sin 3M + \ldots$$

Mais, dans le développement de la fonction perturbatrice, on est conduit à écrire ceci sous la forme :

$$(10) \quad E = M + e \sin M + e^2 \frac{\sin 2M}{2} + e^3\left(-\frac{1}{3} \sin M + \frac{3}{8} \sin 3M\right) + \ldots$$

qui ne converge que pour $e < e_0$.

Or, dans la théorie que j'ai obtenue [7], je trouve, pour l'excentricité une longue expression dont les principaux termes sont :

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} e = \; & 0{,}41017 \\ & - 0{,}10377 \cos(2F - 2\ell) \\ & - 0{,}09043 \cos(2D - 2\ell) \\ & + 0{,}03569 \cos(2D - \ell) \\ & + 0{,}03134 \cos(2D - 2F) \\ & + 0{,}00880 \cos(2F - \ell) \\ & + \ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

où F, ℓ et D sont certaines fonctions linéaires indépendantes du temps. Rien que l'ensemble de ces 6 termes rend possible une excentricité de 0,68. En fait, la somme des coefficients de la série dépasse 0,78. On est au delà de la limite e_0 où la substitution de (11) serait permise dans (10) et les séries analogues qu'on aurait à utiliser.

D'ailleurs, ce nombre de 0,68 n'est pas une borne supérieure exagérée. En 100 ans (48 révolutions seulement), l'excentricité instantanée a effectivement dépassé quatre fois 0,64, le maximum absolu étant 0,6619.

De plus, la grande inclinaison $(\sin i = 0{,}6)$ suffirait à elle seule à rendre vaine toute tentative de théorie analytique classique (il y a peut-être d'autres principes à découvrir) car les développements des coordonnées en série entières de $\sin i$ auront une convergence très lente.

BROWN et BROUWER [2] ont cependant essayé de faire une théorie numérique partant d'une orbite variationnelle à excentricité finie. Après plusieurs approximations, les erreurs atteignant encore 40' (alors que le rayon-vecteur vaut 2°) et malgré le calcul de 150 termes périodiques ainsi que le montre PROSKOURINE [7]. Il est certain que la principale raison de cet échec est l'utilisation de méthodes analytiques avec des séries non convergentes.

Mais une remarque s'impose. Si les séries (10) ne sont pas convergentes, les séries (9) numériques, où les J_p représentent les valeurs numériques prises par les fonctions de Bessel de pe, sont convergentes quel que soit e. Par conséquent, si on pouvait arriver à une représentation numérique approchée de la solution, sans passer par un intermédiaire analytique, on éviterait un tel échec. Il faut donc trouver d'emblée une solution numérique d'un système d'équations différentielles. Il y a là encore sujet à rechercher. Une méthode proposée [6] est la suivante :

1° Intégrer numériquement les équations (on a vu qu'on peut ainsi obtenir des éphémérides aussi précises qu'on le désire).

2° Prévoir, d'avance, quels sont les termes dominants de la solution mise sous la forme (1) ou (3). C'est là la seule partie où la théorie intervient. Comme il n'y a pas à calculer les coefficients, on peut utiliser les résultats d'une théorie analogue mais lointaine (comme la théorie de la Lune de Delaunay).

3° En identifiant, on doit avoir, pour toutes les valeurs du temps t dans l'intervalle d'intégration (en supposant à titre d'exemple qu'on considère une variable métrique)

$$(12) \qquad \varphi(t) = \sum A_{fijk} \cos(f\ell + i\ell' + jg + kh)$$

la sommation porte sur toutes les combinaisons de nombres entiers f, i, j, k retenus dans la seconde partie.

On a ainsi un nombre aussi grand qu'on veut d'équations. Dans le cas du 8e satellite de Jupiter, on est conduit à prévoir 200 à 500 inconnues pour arriver à un résultat à 4' près.

Cependant, une propriété classique - en théorie des perturbations - la propriété de d'Alembert, a pour conséquence qu'un terme correspondant à la combinaison (f, i, j, k), le terme provenant de la combinaison $(f+1, i, j, k)$ est du même ordre de grandeur multiple ou divisé par l'excentricité moyenne.

Il s'ensuit que pour toute combinaison retenue i, j, k, il y aura jusqu'à 8 où même 12 termes à conserver, correspondant à des valeurs successives de f.

On peut donc écrire (12) sous la forme :

$$(13)\quad \varphi(t) = \sum_{ijk} (\sum_f A_{fijk} \cos f\ell) \cos(i\ell' + jg + kh)$$
$$- \sum_{ijk} (\sum_f A_{fijk} \sin f\ell) \sin(i\ell' + jg + kh) \quad .$$

Donnons à ℓ une valeur ℓ_0 donnée. Dans l'intervalle d'intégration Δt, il y a $N = E\,(\frac{\Delta t}{P})$, où P est la période de ℓ, valeurs t_{ℓ_0} de t reproduisant cette valeur ℓ_0 de ℓ.

En posant

$$(14)\quad \begin{cases} C_{ijk}(\ell_0) = \sum_f A_{fijk} \cos f\ell_0 \\ \\ S_{ijk}(\ell_0) = \sum_f A_{fijk} \sin f\ell_0 \end{cases}$$

on peut écrire $2\,N$ équations.

$$(15)\quad \begin{cases} \varphi(t_{\ell_0}) = \sum_{ijk} C_{ijk}(\ell_0) \cos(i\ell' + jg + kh) \\ \qquad\qquad - \sum_{ijk} S_{ijk}(\ell_0) \sin(i\ell' + jg + kh) \\ \\ \varphi(t_{\ell_0}) = \sum_{ijk} C_{ijk}(\ell_0) \cos(i\ell' + jg + kh) \\ \qquad\qquad + \sum_{ijk} S_{ijk}(\ell_0) \sin(i\ell' + jg + kh) \end{cases} \quad .$$

4° On résout ces systèmes (15), d'ordre considérablement abaissé par rapport au système (14) par les moindres carrés et pour autant de valeurs qu'on voudra de ℓ_0. Reportés dans les systèmes (14), chaque série de solutions $C_{ijk}(\ell_0)$ et $S_{ijk}(\ell_0)$ permettra de calculer les A_{fijk}.

On obtient ainsi les seconds membres des équations (12).

REMARQUE. - La résolution par les moindres carrés n'est possible que si le problème est physiquement déterminé, c'est-à-dire si les diverses combinaisons ijk ne donnent pas lieu à des termes de période voisine. La règle adoptée est que les périodes des termes cherchés, ainsi que les périodes des combinaisons linéaires simples de ces arguments soient inférieures à Δt. Dans ces conditions, la matrice des équations normales est bien conditionnée et s'inverse sans introduire d'erreurs systématiques.

DISCUSSION. - Trois questions peuvent être posées :

1° Ces séries représentent-elles les variations des paramètres au cours du mouvement ?

2° Ces séries satisfont-elles formellement aux équations différentielles du mouvement ?

3° La théorie ainsi obtenue permet-elle de faire converger les processus itératifs d'amélioration ?

Les réponses générales à ces questions sont probablement encore plus difficiles à donner que celles que nous nous sommes posées à l'égard des méthodes numériques classiques. Cependant, dans le cas du 8e satellite de Jupiter, cas particulièrement difficile, nous l'avons vu, nous avons pu montrer que :

1° Les séries représentent le mouvement avec une erreur moyenne de 3', ne dépassant jamais 4'. C'est dix fois mieux que le résultat de BROWN.

2° Si on utilise ces séries pour calculer, sous forme de séries, les seconds membres des équations différentielles et si on intègre le résultat, la différence entre ces séries successives est de l'ordre de 3'. Les équations différentielles sont donc satisfaites formellement avec une précision analogue à la précision avec laquelle les observations sont représentées.

3° Ces nouvelles séries - représentant en fait l'approximation suivante dans le processus itératif, et avant toute redétermination des constantes d'intégration - représentent le mouvement avec une erreur moyenne de 1',5. Il y a donc convergence de l'amélioration.

La méthode proposée a donc toutes les caractéristiques qu'on exige d'une méthode numérique, tout en se montrant beaucoup plus puissante que les méthodes classiques.

E. Deuxième exemple : la théorie générale du système Jupiter-Saturne.

Dans ce cas, on dispose de théories du type planétaire de ce système, avec toute la précision des observations. Ce problème des 3 corps complet, puisqu'aucune des trois masses n'est négligeable, a été résolu en particulier par HILL [4], avec une précision qui a suffi aux grandes Ephémérides, internationales jusqu'en 1960.

Le problème qu'on veut résoudre est d'introduire les arguments des périhélies et les longitudes des noeuds dans les expressions trigonométriques, de manière à donner aux expressions les formes (1) ou (3). La difficulté provient du fait que les périodes de ces quantités sont de l'ordre de plusieurs dizaines de milliers d'années.

Ce travail a été récemment entrepris par BROUWER [1] dans le cas simplifié où l'on considère que Jupiter et Saturne se meuvent dans un même plan, utilisant une méthode numérique du type classique.

La solution initiale a été constituée par un ensemble de termes donnant les principaux caractères du mouvement, tirés de la théorie de Hill. Une telle solution suffirait largement à faire converger une théorie planétaire, puisqu'en fait la double solution elliptique est normalement utilisée. Cependant, dans la recherche d'une seconde approximation par une méthode itérative classique, on a constaté une divergence du processus. Exposons qualitativement une raison de cette divergence.

On montre que la théorie générale plane de ce système ne dépend que de trois arguments angulaires. Il s'agit donc de mettre la solution sous une des formes (1) ou (3), par exemple

$$X = \sum_{ijk} A_{ijk} \cos(i\ell + j\ell' + kg)$$

où ℓ et ℓ' sont les anomalies moyennes "moyennes" de Jupiter et de Saturne, de période 12 et 30 ans, et où g est l'argument à longue période (environ 10^4 fois plus grande).

Cette quantité X s'obtient en intégrant une certaine équation de la forme

$$\frac{dX}{dt} = \sum_{i,j,k} B_{ijk} \sin(i\ell + j\ell' + kg) \quad . \tag{16}$$

Deux cas sont à considérer :

a. Cas des termes pour lesquels $i = j = 0$. - L'intégration conduit à diviser par $\frac{dg}{dt} = 10^{-4}$ (on prend pour unité de temps une limite de l'ordre de grandeur des périodes des termes à courte période).

Pour arriver à une précision donnée du résultat, il faut, pour B_{ijk} une précision moyenne 10.000 fois plus grande. Or cette précision est celle de la théorie originelle, c'est-à-dire, en fait, la théorie de départ. On conçoit que bien qu'elle satisfasse aux observations, même la théorie de Hill ne puisse prétendre donner suffisamment de décimales pour assurer cette précision. Circonstance aggravante, une des inconnues, l'anomalie moyenne, s'obtient par une double intégration. Il y a alors une multiplication par 10^8. En fait, certains termes de l'anomalie moyenne à longue période, paraissent avoir une amplitude de l'ordre du radian.

b. Cas des termes où $i \neq 0$ ou $j \neq 0$. - En première approximation, on avait, pour X, un certain terme

$$A_{ij} \sin(i\ell + j\ell') + A'_{ij} \cos(i\ell + j\ell') \quad .$$

On désire le mettre sous la forme

$$\sum_k a_{ijk} \sin(i\ell + j\ell' + kg) \quad . \tag{17}$$

En identifiant, on a donc :

$$\begin{cases} A_{ij} = \sum\limits_k a_{ijk} \cos kg \\ A'_{ij} = \sum\limits_k a_{ijk} \sin kg \end{cases} \tag{18}$$

où g prend la valeur g_0 de l'époque de la théorie planétaire. On ne peut résoudre ce système qu'en faisant des hypothèses sur les diverses valeur de a_{ijk}.

La première approximation faite équivaut à écrire

$$a_{ij1} \cos g_0 + a_{ij0} = A_{ij}$$

$$a_{ij1} \sin g_0 + a_{ij0} = A'_{ij}$$

donc à annuler a_{ijk}, $k \geqslant 2$, $k \leqslant 0$.

Certaines considérations théoriques peuvent certes améliorer ce traitement, surtout si l'on connaît des termes mixtes de la théorie planétaire. Néanmoins, on introduit des hypothèses sur a_{ijk} qui n'ont aucune raison de se trouver vérifiées et, par suite la deuxième approximation se trouve être moins bonne que la première.

Le problème du passage d'une théorie du type planétaire à une théorie générale est donc loin d'être résolu. Des recherches seraient très utiles dans ce domaine, peut-être en introduisant des notions d'analyse numérique non encore appliquées à la mécanique céleste. Remarquons aussi que la méthode proposée pour le 8e satellite de Jupiter serait inopérante, l'intégration numérique devant porter sur 50.000 ans, ce qui est inabordable, même à l'époque actuelle.

F. Conclusion.

Nous avons vu que les méthodes numériques classiques ne sont pas applicables à certains problèmes de Mécanique céleste, choisis parmi ceux que pose le système solaire. Les deux exemples sommairement décrits montrent les raisons de cet échec.

La réussite d'une méthode numérique nouvelle, s'appuyant plus sur l'analyse numérique que sur la Mécanique, prouve que la solution de ces problèmes peut se trouver très loin des méthodes classiques. L'aide que peut apporter au chercheur les machines à calculer électronique nous permet d'espérer que d'autres méthodes oroginales viendront bientôt à notre secours pour la résolution des problèmes jusqu'à présent réputés insolubles. De toute façon, il y a là de nombreux domaines à explorer dans les prochaines années.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BROUWER (Dirk). - The motions of the outer planets, Monthly Notices Royal astron. Soc., t. 115, 1955, p. 221-235.

[2] BROWN (E. W.) and BROUWER (D.). - Theory of the eighth satellite of Jupiter, Trans. Yale Observatory, t. 6, 1938, p. 192.

[3] DAVIS (Morris S.). - Constants of integration in planetary theory in rectangular coordinates, Astronomical J., t. 63, 1958, p. 418.

[4] HILL (G. W.). - A new theory of Jupiter and Saturn, Astronomical Papers of Amer. Ephemeris, t. 4, 1890.

[5] KOVALEVSKY (Jean). - Quasi-révolution des équations de la dynamique dans le système solaire, Séminaire Janet : Mécanique analytique et Mécanique céleste, t. 3, 1959/60, n° 6, 14 p.

[6] KOVALEVSKY (Jean). - Méthode numérique de calcul des perturbations générales, Applications au 8e satellite de Jupiter, Bull. astron., 2e série, t. 23, 1960, p. 1-89 (Thèse Sc. math. Paris. 1959).

[7] PROSKURIN (V. F.). - Sur la possibilité de représenter le mouvement du 8e satellite de Jupiter par la théorie analytique de Brown [en russe], Akad. Nauk SSSR, Bull. Teoretija Astr., t. 4, 1949, p. 169-205.

[8] WINTNER (Aurel). - The analytical foundations of celestial mechanics. - Princeton, Princeton University Press, 1947 (Princeton mathematical Series, 5).