Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste

André Avez

Ondes monochromatiques et effet Döppler en relativité générale

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 4 (1960-1961), exp. nº 10, p. 1-33

<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1960-1961__4__A10_0>

ONDES MONOCHROMATIQUES ET EFFET DÖPPLER EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

par André AVEZ

INTRODUCTION. - Dans le présent, la théorie d'un effet aussi essentiel à la construction de modèles d'univers que l'effet Döppler de gravitation, n'a pas encore été faite en un langage adéquat de théorie des ondes.

Pratiquement, le calcul de la vitesse de récession des galaxies, à partir des fréquences observées, est effectuée via la formule :

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1 + v_r}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ,$$

où ν et ν' sont les fréquences respectivement associées à la source et à l'observateur, v la vitesse de l'observateur par rapport à un repère lié à la source, v_r sa vitesse radicale dans le même repère. Mais cette formule postule la relativité restreinte. La contradiction entre le cadre postulé pour conduire les calculs et le modèle d'univers, non Minkowskien, qu'on en déduit pour les interpréter, nous semble une grave faute épistémologique. La notion essentielle à l'effet Döppler, en relativité restreinte, est celle d'onde plane monochromatique. Cette notion n'a plus cours en relativité générale puisqu'elle suppose l'existence de repères galiléens globaux. La première partie de ce travail vise à lui conserver un sens en relativité générale, en transposant dans cette théorie l'équation de Gordon-Klein.

Si l'espace-temps schématise un fluide parfait - champ électromagnétique, la seconde partie montre que cela impose des restrictions au vecteur quadrifréquence, qui vérifie un système différentiel du premier ordre.

La troisième partie fait le lien entre notre définition des ondes monochromatiques et les définitions proposées par LICHNEROWICZ et BEL. En particulier, toute onde monochromatique correspond à un cas II ou III de Bel.

L'existence d'ondes monochromatiques sur un espace - temps implique des propriétés topologiques globales de cet espace - temps. Nous les étudions dans une quatrième partie où nous montrons aussi dans quelle mesure un cas IIb ou III de Bel est monochromatique.

Dans une dernière partie nous formulons le problème de l'effet Döppler à l'aide des notions précédentes. Nous indiquons aussi un effet de "vieillissement" des fréquences, effet proprement gravitationnel et qui, à notre connaissance, n'a jamais été signalé.

NOTATIONS employées. - Nous les empruntons à LICHNEROWICZ [5].

Néanmoins, rappelons qu'un espace - temps V_4 est une variété à quatre dimensions munie d'une métrique hyperbolique normale $g_{\alpha\beta}$ de classe C^4. Si $R_{\alpha\beta}$ désigne le tenseur de Ricci de V_4, les équations d'Einstein s'écrivent :

$$R_{\alpha\beta} = \chi.[T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T^{\lambda}_{\lambda}] - \frac{1}{2} k.g_{\alpha\beta}$$

où χ est une constante, $T_{\alpha\beta}$ le tenseur impulsion - énergie, k la constante cosmologique. En schéma fluide parfait - champ électromagnétique

$$R_{\alpha\beta} = \chi[(\rho + p) u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(\rho - p) + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} - F_{\alpha\rho} F^{\rho}_{\beta}] - \frac{1}{2} kg_{\alpha\beta}$$

où : ρ est la densité de matière, p la pression, u_α le vecteur vitesse unitaire généralisé, $F_{\alpha\beta}$ le tenseur champ électromagnétique.

Précisons enfin, que les nombres placés au-dessus de la ligne entre parenthèses renvoient à des notes en bas de la page, et que les nombres entre crochets renvoient à la bibliographie.

1. Définition des ondes monochromatiques.

L'équation de Gordon-Klein de la relativité restreinte s'écrit, pour une particule de spin p (1) et de masse nulle :

$$\Delta_2(\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_p} . e^{iu}) = 0 \tag{1}$$

où Δ_2 est le dalembertien, $\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ un tenseur antisymétrique d'ordre p, U une fonction à valeurs réelles.

En relativité générale, nous prendrons pour équation de Gordon-Klein d'une particule de spin p et de masse nulle :

(1) Pour $p = 1$, cette équation décrit un photon ; pour $p = 2$, un graviton.

(2) $$\Delta(Pe^{iu}) = 0$$

où $\Delta = d\delta + \delta d$ est l'opérateur de G. de Rham (voir [4], p. 183), P une p-forme définie sur V_4, à valeurs réelles, U une fonction définie sur V_4, à valeurs réelles.

L'espace tangent en $x \in V_4$ est un espace de Minkowsky. Rapportons-le à un système d'axes orthonormés qui joue le rôle de repère de Galilée. L'équation (2) induit sur cet espace tangent une équation de Gordon-Klein (1). L'équation (1) constitue donc une approximation de relativité restreinte de l'équation (2), ce qui justifie notre définition.

Rappelons qu'en relativité restreinte on appelle solutions planes monochromatiques de (1), les solutions où : $\varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ = constante ; de telle sorte que

$$\Delta e^{iu} = 0 \quad .$$

En relativité générale, nous prendrons cette propriété pour définition :

DÉFINITION 1. - Une onde associée à un corpuscule sera dite monochromatique si sa fonction d'onde U vérifie :

$$\Delta e^{iu} = 0 \quad .$$

THÉORÈME 1. - Pour que Pe^{iu} décrive une onde monochromatique, il faut et il suffit que :

$$\Delta P = 0 \; , \quad \partial^k U . \nabla_k P_{j_1 \ldots j_p} = 0 \quad .$$

En particulier, il suffit que

$$\nabla_k P_{j_1 \ldots j_p} = 0 \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Evaluons les composantes de $\Delta(Pe^{iu})$:

$$[\Delta(Pe^{iu})]_{j_1\dots j_p} = -\nabla^k \nabla_k (P_{j_1\dots j_p}.e^{iu})$$

$$+ \frac{1}{(p-1)!} \varepsilon^{ki_2\dots i_p}_{j_1\dots j_p} [\nabla_c \nabla_k (P^\ell_{i_2\dots i_p}.e^{iu}) - \nabla_k \nabla_c (P^\ell_{i_2\dots i_p}.e^{iu})] \quad .$$

Tous calculs faits, il vient :

$$[\Delta(Pe^{iu})]_{j_1\dots j_p} = e^{iu}.(\Delta P)_{j_1\dots j_p} + \Delta e^{iu}.P_{j_1\dots j_p} - 2\partial^k e^{iu}.\nabla_k P_{j_1\dots j_p} \quad .$$

Comme $\Delta(Pe^{iu}) = 0$, en égalant à zéro les parties réelle et imaginaire, on trouve

$$\Delta P = 0 \ , \quad \partial^k U.\nabla_k P_{j_1\dots j_p} = 0 \quad .$$

Ces deux dernières relations sont évidemment vérifiées si P est à dérivée covariante nulle.

THÉORÈME 2. - La fonction d'onde U , d'une onde monochromatique, vérifie : $\Delta_1 U = 0$, $\Delta_2 U = 0$; où

$$\Delta_1 U = g^{\alpha\beta} \partial_\alpha U \partial_\beta U \ , \quad \Delta_2 U = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \partial_\beta U \quad .$$

DÉMONSTRATION.

$$\Delta e^{iu} = -\nabla^\alpha(ie^{iu} \partial_\alpha U) = e^{iu}[\Delta_1 U - i\Delta_2 U] = 0 \quad .$$

D'où

$$\Delta_1 U = 0 \ , \quad \Delta_2 U = 0 \quad .$$

L'équation $\Delta_1 U = 0$ n'est autre que l'équation de Hamilton-Jacobi.

Par suite d'analogies évidentes avec la relativité restreinte (voir [3]) introduisons les définitions suivantes :

- <u>Surfaces d'onde</u> : Les variétés à trois dimensions d'équation : $U =$ constante.

- Vecteur quadrifréquence : Le vecteur $\varphi_\alpha = \partial_\alpha U$.

D'après le théorème 2, φ_α est caractéristisé par :

$$\varphi^\alpha \varphi_\alpha = 0 \;,\quad \partial_\alpha U = \varphi_\alpha \;,\quad \nabla^\alpha \varphi_\alpha = 0 \quad .$$

Ce vecteur définit donc une 1-forme homologue à zéro, cofermée et isotrope. La première situation est due à une définition purement locale de la notion d'onde monochromatique. Pour des considérations globales nous nous bornerons à imposer : $\nabla_\alpha \varphi_\beta = \nabla_\beta \varphi_\alpha$; hypothèse plus faible que $\varphi_\alpha = \partial_\alpha U$. D'où la définition suivante =

DÉFINITION 2. - Une onde associée à un corpuscule sera dite monochromatique si son vecteur quadrifréquence est fermé, cofermé, et isotrope.

Si on effectue la substitution $U \to f(U)$, où f est une fonction arbitraire, sur la fonction d'onde, les surfaces : $f(U)$ = constante, coïncident avec les surfaces d'onde. D'autre part :

$$\Delta_1 f(U) = (f'_u)^2 \Delta_1 U = 0$$

$$\Delta_2 f(U) = f''_{u^2} \cdot \Delta_1 U + f'_u \cdot \Delta_2 U = 0 \quad .$$

Par conséquent $f(U)$ définit la même onde monochromatique que U . Une onde monochromatique locale est donc définie à une fonction arbitraire près. D'où la définition :

- Invariant d'une onde : Nous appelons invariant d'une onde monochromatique tout être ou toute propriété invariante par la substitution : $U \to f(U)$.

2. Structure des ondes monochromatiques en schéma fluide parfait - champ électromagnétique.

LEMME 1. - Si φ_α définit une 1-forme fermée $(\nabla_\alpha \varphi_\beta = \nabla_\beta \varphi_\alpha)$ et isotrope $(\varphi^\alpha \varphi_\alpha = 0)$, on a :

$$\nabla_\alpha \varphi_\beta \nabla^\alpha \varphi^\beta \geqslant 0 \quad .$$

Si $\nabla_\alpha \varphi_\beta \nabla^\alpha \varphi^\beta = 0$, alors

$$\nabla_\alpha \varphi_\beta = \varphi_\alpha V_\beta + \varphi_\beta V_\alpha \quad ,$$

où V_α est tel que $V^\alpha \varphi_\alpha = 0$. En particulier : $\nabla_\alpha \varphi^\alpha = 0$.

DÉMONSTRATION. - Prenons, en $x \in V_4$, un repère orthonormé $(\vec{e}_\alpha)$:

$$\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_0 = 1 \,, \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = -1 \qquad (i = 1, 2, 3) \quad .$$

On peut toujours choisir ce repère de telle sorte que $\vec{\varphi}$ soit dans le plan $(\vec{e}_0 , \vec{e}_1)$, ses projections sur les axes ayant des mesures algébriques positives ou nulles. $g^{\alpha\beta} \varphi_\alpha \varphi_\beta = 0$ s'écrit alors : $(\varphi_0)^2 - (\varphi_1)^2 = 0$, soit

$$(1) \qquad \varphi_1 = \varphi_0 \quad .$$

Par dérivation de $\varphi^\alpha \varphi_\alpha = 0$, on tire $\varphi^\alpha \nabla_\beta \varphi_\alpha = 0$, soit :

$$\varphi_0 \nabla_0 \varphi_\beta = \varphi_1 \nabla_1 \varphi_\beta \quad ,$$

c'est-à-dire, avec (1),

$$(2) \qquad \nabla_1 \varphi_\beta = \nabla_0 \varphi_\beta \,, \quad \text{si} \quad \vec{\varphi} \neq 0 \quad .$$

Ceci posé, $H \equiv \nabla_\alpha \varphi_\beta \nabla^\alpha \varphi^\beta$ s'écrit

$$H \equiv \sum_{\alpha,\lambda} g^{\alpha\alpha} g^{\lambda\lambda} (\nabla_\alpha \varphi_\lambda)^2 = \sum_\lambda g^{\lambda\lambda} [(\nabla_0 \varphi_\lambda)^2 - (\nabla_1 \varphi_\lambda)^2 - (\nabla_2 \varphi_\lambda)^2 - (\nabla_3 \varphi_\lambda)^2] \quad ,$$

c'est-à-dire, avec (2),

$$H \equiv - \sum_\lambda g^{\lambda\lambda} [(\nabla_2 \varphi_\lambda)^2 + (\nabla_3 \varphi_\lambda)^2]$$

$$= - (\nabla_2 \varphi_0)^2 - (\nabla_3 \varphi_0)^2 + (\nabla_2 \varphi_1)^2 + (\nabla_3 \varphi_1)^2 + \sum_{i,j \geq 2} (\nabla_i \varphi_j)^2 \quad .$$

Compte tenu de (2) et de $\nabla_\alpha \varphi_\beta = \nabla_\beta \varphi_\alpha$:

$$\nabla_2 \varphi_0 = \nabla_0 \varphi_2 = \nabla_1 \varphi_2 = \nabla_2 \varphi_1 \quad ,$$

$$\nabla_3 \varphi_0 = \nabla_0 \varphi_3 = \nabla_1 \varphi_3 = \nabla_3 \varphi_1 \quad ,$$

d'où

$$H \equiv \sum_{i,j\geq 2} (\nabla_i \varphi_j)^2 \geq 0 \quad .$$

Supposons que $H = 0$, alors $\nabla_i \varphi_j = 0$ pour $i , j \geq 2$. Si dans le repère $(\vec{e}_\alpha)$ on considère le vecteur V_α de composantes

(3) $$V_0 = V_1 = \frac{1}{2\varphi_0} \nabla_0 \varphi_0 , \quad V_2 = \frac{1}{\varphi_0} \nabla_0 \varphi_2 , \quad V_3 = \frac{1}{\varphi_0} \nabla_0 \varphi_3$$

on a :

(4) $$\nabla_\alpha \varphi_\beta = \varphi_\alpha V_\beta + \varphi_\beta V_\alpha \quad ,$$

comme le montre l'égalité des composantes des deux membres.

De (3) on tire d'ailleurs :

$$g^{\alpha\beta} \varphi_\alpha V_\beta = \varphi_0 V_1 - \varphi_1 V_0 = 0 \quad ;$$

par suite, de (4) :

$$\nabla^\alpha \varphi_\alpha = 2\varphi^\alpha V_\alpha = 0 \quad .$$

THÉORÈME 3. - En schéma fluide parfait - champ électromagnétique, il ne peut exister d'onde monochromatique non triviale $(\varphi_\alpha \neq 0)$ que si :

$$\rho = 0 , \quad p = 0 , \quad \varphi_\alpha \text{ est vecteur propre de } F_{\alpha\beta} \quad ,$$

et

$$\nabla_\alpha \varphi_\beta = \varphi_\alpha V_\beta + \varphi_\beta V_\alpha \quad ,$$

où V_α est tel que $V^\alpha \varphi_\alpha = 0$.

DÉMONSTRATION. - L'identité $R_{\alpha\beta} \varphi^\alpha = \nabla^\alpha \nabla_\beta \varphi_\alpha - \partial_\beta \nabla^\alpha \varphi_\alpha$ s'écrit, puisque $\nabla_\alpha \varphi^\alpha = 0$:

$$R_{\alpha\beta} \varphi^\alpha = \nabla^\alpha \nabla_\beta \varphi_\alpha \quad .$$

Contractons les deux membres avec φ^β :

$$R_{\alpha\beta}\, \varphi^\alpha \varphi^\beta = \varphi^\beta \nabla^\alpha \nabla_\beta \varphi_\alpha = \nabla^\alpha(\varphi^\beta \nabla_\beta \varphi_\alpha) - \nabla^\alpha \varphi^\beta \nabla_\beta \varphi_\alpha \quad .$$

Mais

$$\varphi^\beta \nabla_\beta \varphi_\alpha = \varphi^\beta \nabla_\alpha \varphi_\beta = 0$$

puisque $\nabla_\alpha \varphi_\beta = \nabla_\beta \varphi_\alpha$ et $\varphi^\alpha \varphi_\alpha = 0$;

$$\nabla^\alpha \varphi^\beta \nabla_\beta \varphi_\alpha = \nabla^\alpha \varphi^\beta \nabla_\alpha \varphi_\beta$$

puisque $\nabla_\alpha \varphi_\beta = \nabla_\beta \varphi_\alpha$, donc :

$$R_{\alpha\beta}\, \varphi^\alpha \varphi^\beta + \nabla_\alpha \varphi_\beta \nabla^\alpha \varphi^\beta = 0$$

compte tenu de l'expression de $R_{\alpha\beta}$ en schéma fluide parfait - champ électromagnétique, et de $g_{\alpha\beta}\, \varphi^\alpha \varphi^\beta = 0$:

(1) : $$\chi[(\rho + p)(u^\alpha \varphi_\alpha)^2 - N(\varphi^\alpha F_{\alpha\rho})] + \nabla_\alpha \varphi_\beta \nabla^\alpha \varphi^\beta = 0 \quad .$$

Dans le membre de gauche :

(2) $$(\rho + p)(u^\alpha \varphi_\alpha)^2 \geqslant 0 \quad ,$$

avec égalité seulement si $\rho = 0$, $p = 0$, puisque $u^\alpha \varphi_\alpha \neq 0$ en tant que produit scalaire d'un vecteur temporel et d'un vecteur isotrope. D'autre part,

(3) $$N(\varphi^\alpha F_{\alpha\rho}) \leqslant 0 \quad ,$$

puisque $\varphi^\alpha F_{\alpha\rho}$ est orthogonal au vecteur isotrope φ_α. L'égalité n'est obtenue que si :

$$\varphi^\alpha F_{\alpha\rho} = \lambda . \varphi_\rho \quad .$$

puisque deux vecteurs isotropes orthogonaux sont colinéaires. Enfin, d'après le lemme 1, puisque φ_α est fermé et isotrope :

$$(4) \qquad \nabla_\alpha \varphi_\beta \nabla^\alpha \varphi^\beta \geq 0 \, ,$$

l'égalité n'étant obtenue que si

$$\nabla_\alpha \varphi_\beta = \varphi_\alpha V_\beta + \varphi_\beta V_\alpha \, , \quad V^\alpha \varphi_\alpha = 0 \quad .$$

Les relations (1), (2), (3), (4) entraînent :

$$(\rho + p)(u^\alpha \varphi_\alpha)^2 = 0 \, , \quad N(\varphi^\alpha F_{\alpha\rho}) = 0 \, , \quad \nabla_\alpha \varphi_\beta \nabla^\alpha \varphi^\beta = 0 \quad ,$$

d'où

$$\rho = p = 0 \, , \quad F_{\alpha\rho} \varphi^\alpha = \lambda \varphi_\rho \, , \quad \nabla_\alpha \varphi_\beta = \varphi_\alpha V_\beta + \varphi_\beta V_\alpha \quad \text{avec} \quad \varphi^\alpha V_\alpha = 0 \quad .$$

Il ne peut donc exister d'ondes monochromatiques à l'intérieur de la matière. De plus, si un schéma électromagnétique pur (et non trivial : $F_{\alpha\beta} \neq 0$) définit un état de radiation électromagnétique intrinsèque (voir [2]), les rayons d'une onde monochromatique coïncident avec les rayons électromagnétiques.

COROLLAIRE. - Si V_α a la signification précitée, $\nabla_\alpha V^\alpha$ et $V_\alpha V^\alpha$ sont deux invariants.

DÉMONSTRATION. - Localement, φ_α est le gradient de la fonction de phase U. Effectuons sur cette fonction la substitution : $U \to f(U)$. Il en résulte les substitutions suivantes :

$$\varphi_\alpha \to f' \cdot \varphi_\alpha \quad \text{où} \quad f' = \frac{d}{dU} f(U) \quad ,$$

$$\nabla_\alpha \varphi_\beta \to \nabla_\alpha (f' \varphi_\beta) = f'' \varphi_\alpha \varphi_\beta + f' \nabla_\alpha \varphi_\beta \quad .$$

Mais, d'après le théorème 2,

$$\nabla_\alpha \varphi_\beta = \varphi_\alpha V_\beta + \varphi_\beta V_\alpha \quad ,$$

donc :

$$\nabla_\alpha \varphi_\beta \to f' \varphi_\alpha.[V_\beta + \frac{1}{2}\frac{f''}{f'}\varphi_\beta] + f'.\varphi_\beta[V_\alpha + \frac{1}{2}\frac{f''}{f'}\varphi_\alpha] \quad .$$

On a ainsi la substitution :

$$V_\alpha \to V_\alpha + \frac{1}{2}\frac{f''}{f'}\varphi_\alpha \quad ,$$

d'où

$$\nabla_\alpha V^\alpha \to \nabla_a(V^\alpha + \frac{1}{2}\frac{f''}{f'}\varphi^\alpha) = \nabla^\alpha V_\alpha \quad ,$$

puisque

$$\nabla^\alpha(\frac{f''}{f'}\varphi_\alpha) = (\frac{f''}{f'})' \varphi^\alpha \varphi_\alpha + \frac{f''}{f'}\nabla^\alpha \varphi_\alpha = 0 \quad .$$

De même :

$$V^2 = V^\alpha V_\alpha \to (V_\alpha + \frac{1}{2}\frac{f''}{f'}\varphi_\alpha)(V^\alpha + \frac{1}{2}\frac{f''}{f'}\varphi^\alpha) = V^2 \quad ,$$

puisque $\varphi^\alpha \varphi_\alpha = \varphi^\alpha V_\alpha = 0$.

Remarquons enfin que l'invariant V^2 est négatif ou nul puisque V^α est orthogonal au vecteur isotrope φ_α .

Nous allons maintenant chercher les restrictions qu'apporte à la métrique l'existence d'une onde monochromatique non triviale.

3. Conditions nécessaires d'existence d'une onde monochromatique.

Nous avons vu au paragraphe précédent que l'existence d'une onde monochromatique non triviale imposait des restrictions au tenseur impulsion-énergie. Nous nous placerons donc définitivement en schéma électromagnétique pur de telle sorte que les équations fondamentales seront :

(A) $$\nabla_\alpha \varphi_\beta = \varphi_\alpha V_\beta + \varphi_\beta V_\alpha , \quad V^\alpha \varphi_\alpha = 0$$

(B) $$R_{\alpha\beta} = \chi[\frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} - F_{\alpha\rho} F^\rho_\beta] - \frac{1}{2} k.g_{\alpha\beta}$$

(C) $$F_{\alpha\rho}.\varphi^{\alpha} = \lambda.\varphi_{\beta} \quad .$$

Formules auxiliaires. - Posons $V^2 = V^{\alpha} V_{\alpha}$. De $V^{\alpha} \varphi_{\alpha} = 0$, on tire : $\nabla_{\gamma}(V^{\alpha} \varphi_{\alpha}) = 0$.

En développant et on tenant compte de (A) :

(D) $$\varphi^{\alpha} \nabla_{\gamma} V_{\alpha} = - V^2.\varphi_{\gamma} \quad .$$

Contractons les deux membres de (B) avec φ^{α} :

$$R_{\alpha\beta} \varphi^{\alpha} = \chi[\frac{1}{4} \varphi_{\beta} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} - \varphi^{\alpha} F_{\alpha\rho} F^{\rho}_{\beta}] - \frac{1}{2} \varphi_{\beta}.k \quad .$$

Mais, d'après (C) :

$$\varphi^{\alpha} F_{\alpha\rho} F^{\rho}_{\beta} = \lambda\varphi_{\rho}.F^{\rho}_{\beta} = - \lambda\varphi_{\rho} F^{\rho}_{\beta} = - \lambda^2 \varphi_{\beta} \quad ,$$

donc

(1) $$R_{\alpha\beta} \varphi^{\alpha} = \varphi_{\beta}[\chi(\frac{1}{4} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} + \lambda^2) - \frac{1}{2} k] \quad .$$

D'autre part, puisque $\nabla^{\alpha} \varphi_{\alpha} = 0$:

$$R_{\alpha\beta} \varphi^{\alpha} = \nabla^{\alpha} \nabla_{\beta} \varphi_{\alpha} \quad .$$

Or, (A) entraîne : $\nabla^{\alpha} \nabla_{\beta} \varphi_{\alpha} = \nabla^{\alpha}(\varphi_{\beta} V_{\alpha} + \varphi_{\alpha} V_{\beta})$. En développant, en tenant compte à nouveau de $\nabla^{\alpha} \varphi_{\alpha} = 0$ et de (A) :

$$R_{\alpha\beta} \varphi^{\alpha} = \varphi_{\beta}(V^2 + \nabla_{\alpha} V^{\alpha}) + \varphi^{\alpha} \nabla_{\alpha} V_{\beta} \quad .$$

Confronté avec (1), on tire :

(E) $$\varphi^{\alpha} \nabla_{\alpha} V_{\beta} = \varphi_{\beta}[\chi(\frac{1}{4} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} + \lambda^2) - \nabla^{\alpha} V_{\alpha} - V^2 - \frac{1}{2} k] \quad .$$

L'identité de Ricci

$$\nabla_{\gamma} \nabla_{\alpha} \varphi_{\beta} - \nabla_{\alpha} \nabla_{\gamma} \varphi_{\beta} = R_{\gamma\alpha\beta\delta} \varphi^{\delta} \quad ,$$

s'écrit, compte tenu de (A) :

$$R_{\gamma\alpha\beta\delta}\,\varphi^{\delta} = \nabla_{\gamma}(V_{\alpha}\,\varphi_{\beta} + V_{\beta}\,\varphi_{\alpha}) - \nabla_{\alpha}(V_{\gamma}\,\varphi_{\beta} + V_{\beta}\,\varphi_{\gamma})$$

$$= (\nabla_{\gamma} V_{\alpha} - \nabla_{\alpha} V_{\gamma})\,\varphi_{\beta} + V_{\alpha}\,\nabla_{\gamma}\,\varphi_{\beta} + \nabla_{\gamma} V_{\beta}.\varphi_{\alpha}$$

$$+ V_{\beta}(\nabla_{\gamma}\,\varphi_{\alpha} - \nabla_{\alpha}\,\varphi_{\gamma}) - \varphi_{\gamma}\,\nabla_{\alpha} V_{\beta} - V_{\gamma}\,\nabla_{\alpha}\,\varphi_{\beta} \quad .$$

Mais en utilisant à nouveau (A) et $\nabla_{\alpha}\,\varphi_{\gamma} = \nabla_{\gamma}\,\varphi_{\alpha}$:

$$R_{\gamma\alpha\beta\delta}\,\varphi^{\delta} = (\nabla_{\gamma} V_{\alpha} - \nabla_{\alpha} V_{\gamma})\,\varphi_{\beta} + (\nabla_{\gamma} V_{\beta} - V_{\gamma} V_{\beta})\,\varphi_{\alpha} - (\nabla_{\alpha} V_{\beta} - V_{\alpha} V_{\beta})\,\varphi_{\gamma} \quad .$$

Finalement, en posant de façon définitive

$$\text{(F)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \qquad\qquad T_{\gamma\alpha} = \nabla_{\gamma} V_{\alpha} - V_{\alpha} V_{\gamma} \quad , \\ \text{on a} \\ R_{\gamma\alpha\beta\delta}\,\varphi^{\delta} = (T_{\gamma\alpha} - T_{\alpha\gamma})\,\varphi_{\beta} + \varphi_{\alpha}\,T_{\gamma\beta} - \varphi_{\gamma}\,T_{\alpha\beta} \quad . \end{array} \right.$$

<u>Interprétation de</u> (E). -, Cherchons la dérivée covariante le long d'un rayon d'un vecteur du plan $(\varphi_{\alpha}\,, V_{\beta})$:

$$\varphi^{\gamma}\,\nabla_{\gamma}(u\varphi_{\beta} + vV_{\beta}) = u\varphi^{\gamma}\,\nabla_{\gamma}\,\varphi_{\beta} + \varphi_{\beta}\,\varphi^{\gamma}\,\delta_{\gamma}\,u + v\varphi^{\gamma}\,\nabla_{\gamma} V_{\beta} + V_{\beta}\,\varphi^{\gamma}\,\delta_{\gamma}\,v \quad .$$

Or $\varphi^{\gamma}\,\nabla_{\gamma}\,\varphi_{\beta} = 0$ et, d'après (E), $\varphi^{\gamma}.\nabla_{\gamma} V_{\beta}$ est colinéaire à φ_{β}, donc $\varphi^{\gamma}\,\nabla_{\gamma}(u\varphi_{\beta} + vV_{\beta})$ est dans le plan $(\varphi_{\alpha}\,, V_{\beta})$. Autrement dit, ce plan se déplace parallèlement à lui-même le long d'un rayon. Les substitutions qui résultent d'un changement de fonction de phase U :

$$\varphi_{\alpha} \to f'.\varphi_{\alpha} \,, \quad V_{\alpha} \to V_{\alpha} + \frac{1}{2}\frac{f''}{f'}\,\varphi_{\alpha} \quad ,$$

montrent que ce plan est un invariant.

Rappelons que BEL ([2] p. 29-31) a introduit la notation :

$$\star\, R_{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1}{2}\,\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}\,R^{\gamma\delta}{}_{\lambda\mu}$$

où $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est la 4-forme élément de volume de V_4 dans la métrique $g_{\alpha\beta}$.

LEMME 2. - En schéma champ électromagnétique pur, le vecteur quadriférence φ_α d'une onde monochromatique vérifie :

$$R_{\gamma\alpha\beta\delta}.\varphi^\delta \varphi^\alpha = a.\varphi_\gamma \varphi_\beta$$

$$* R_{\alpha\beta\lambda\mu} \varphi^\beta \varphi^\mu = b.\varphi_\alpha \varphi_\lambda$$

où a et b sont des scalaires.

DÉMONSTRATION. - Puisque $\varphi^\alpha \varphi_\alpha = 0$, (F) entraîne :

$$(1) \qquad R_{\gamma\alpha\beta\delta} \varphi^\delta \varphi^\alpha = (T_{\gamma\alpha} - T_{\alpha\gamma}) \varphi_\beta \varphi^\alpha - T_{\alpha\beta} \varphi^\alpha \varphi_\gamma \quad .$$

Mais, $(T_{\gamma\alpha} - T_{\alpha\gamma}) \varphi^\alpha = (\nabla_\gamma V_\alpha - \nabla_\alpha V_\gamma) \varphi^\alpha$; compte tenu de (F) et (E) on en déduit :

$$(2) \qquad (T_{\gamma\alpha} - T_{\alpha\gamma}) \varphi^\alpha = - \varphi_\gamma[\chi(\tfrac{1}{4} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} + \lambda^2) - \nabla^\alpha V_\alpha - \tfrac{1}{2} k] \quad .$$

D'autre part, $T_{\alpha\beta} \varphi^\alpha = (\nabla_\alpha V_\beta - \nabla_\beta V_\alpha) \varphi^\alpha$; compte tenu de $V_\alpha \varphi^\alpha = 0$ et de (E), on en déduit :

$$(3) \qquad T_{\alpha\beta} \varphi^\alpha = \varphi_\beta[\chi(\tfrac{1}{4} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} + \lambda^2) - \nabla^\alpha V_\alpha - V^2 - \tfrac{1}{2} k] \quad .$$

Si on a posé

$$a = 2 \nabla^\alpha V_\alpha + V^2 - 2\chi(\tfrac{1}{4} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} + \lambda^2) + k \quad ,$$

les relations (1), (2), (3) entraînent :

$$R_{\gamma\alpha\beta\delta} \varphi^\delta \varphi^\alpha = a.\varphi_\beta \varphi_\gamma \quad .$$

Évaluons

$$* R_{\alpha\beta\lambda\mu} \varphi^\beta \varphi^\mu = \tfrac{1}{2} \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\gamma\delta}{}_{\lambda\mu} \varphi^\beta \varphi^\mu \quad .$$

D'après (F) :

$$\star\, R_{\alpha\beta\lambda\mu}\, \varphi^{\beta}\, \varphi^{\mu} = \frac{1}{2}\, \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}[(T^{\gamma\delta} - T^{\delta\gamma})\ \varphi_{\lambda} + \varphi^{\delta}\, T^{\gamma}{}_{\lambda} - \varphi^{\gamma}\, T^{\delta}{}_{\lambda}]\ \varphi^{\beta}$$

c'est-à-dire, à cause de l'antisymétrie de $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

$$\star\, R_{\alpha\beta\lambda\mu}\, \varphi^{\beta}\, \varphi^{\mu} = \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}[T^{\gamma\delta} . \varphi_{\lambda} + \varphi^{\delta}\, T^{\gamma}{}_{\lambda}]\ \varphi^{\beta} \quad .$$

Mais $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \varphi^{\delta}\, \varphi^{\beta} = 0$, donc :

(4) $$\star\, R_{\alpha\beta\lambda\mu}\, \varphi^{\beta}\, \varphi^{\mu} = \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}\, T^{\gamma\delta}\, \varphi_{\lambda}\, \varphi^{\beta} \quad .$$

ceci nous amène à évaluer les composantes de

$$X_{\alpha} \equiv \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}\, T^{\gamma\delta}\, \varphi^{\beta} \quad .$$

cherchons ces composantes dans le repère utilisé à propos du lemme 1, c'est-à-dire tel que :

$$\varphi_0 = \varphi_1\ ,\quad \varphi_2 = \varphi_3 = 0\ ,\quad \varphi^1 = -\varphi_1\ ,\quad \varphi^0 = \varphi_0 \quad .$$

<u>Calcul de</u> X_0 .

$$X_0 = \eta_{0\beta\gamma\delta}\, T^{\gamma\delta}\, \varphi^{\beta} = \eta_{01\gamma\delta}\, T^{\gamma\delta} . \varphi^{1} = -\, \eta_{01\gamma\delta}\, T^{\gamma\delta} . \varphi_0 \quad .$$

<u>Calcul de</u> X_1 .

$$X_1 = \eta_{1\beta\gamma\delta}\, T^{\gamma\delta}\, \varphi^{\beta} = \eta_{10\gamma\delta}\, T^{\gamma\delta} . \varphi^{0} = -\, \eta_{01\gamma\delta}\, T^{\gamma\delta} . \varphi_0 \quad .$$

Il en résulte :

(5) $$X_0 = X_1 \quad .$$

<u>Calcul de</u> X_2 .

$$X_2 = \eta_{2\beta\gamma\delta}\, T^{\gamma\delta} . \varphi^\beta = \eta_{20\gamma\delta}\, T^{\gamma\delta} . \varphi^0 + \eta_{21\gamma\delta}\, T^{\gamma\delta} . \varphi^1 = (\eta_{20\gamma\delta}\, T^{\gamma\delta} - \eta_{21\gamma\delta}\, T^{\gamma\delta})\, \varphi_0$$

$$= (\eta_{2013}\, T^{13} + \eta_{2031}\, T^{31} - \eta_{2103}\, T^{03} - \eta_{2130}\, T^{30})\, \varphi_0 \quad .$$

Dans le repère choisi, $\eta_{0123} = +1$, donc

(6) $$X_2 = \varphi_0(T^{13} - T^{31} + T^{03} - T^{30}) = \varphi_0(T_{13} - T_{31} - T_{03} + T_{30}) \quad .$$

<u>Calcul de</u> X_3 :

$$X_3 = \eta_{3\beta\gamma\delta}\, T^{\gamma\delta}\, \varphi^\beta = \eta_{30\gamma\delta}\, T^{\gamma\delta} . \varphi^0 + \eta_{31\gamma\delta}\, T^{\gamma\delta}\, \varphi^1 = (\eta_{30\gamma\delta}\, T^{\gamma\delta} - \eta_{31\gamma\delta}\, T^{\gamma\delta})\, \varphi_0$$

$$= (\eta_{3012}\, T^{12} + \eta_{3021}\, T^{21} - \eta_{3102}\, T^{02} - \eta_{3120}\, T^{20})\, \varphi_0 = (-T^{12} + T^{21} - T^{02} + T^{20})\, \varphi_0 \; ,$$

d'où :

(7) $$X_3 = \varphi_0(-T_{12} + T_{21} + T_{02} - T_{20}) \quad .$$

Les relations (6) et (7) conduisent à évaluer :

$$T_{30} - T_{31} \; , \quad T_{03} - T_{13} \; , \quad T_{20} - T_{21} \; , \quad T_{02} - T_{12} \quad .$$

Mais, compte tenu de $\varphi^\alpha\, V_\alpha = 0$ et de (D) :

$$T_{\gamma\alpha}\, \varphi^\alpha = (\nabla_\gamma\, V_\alpha - V_\alpha\, V_\gamma)\, \varphi^\alpha = \varphi^\alpha\, \nabla_\gamma\, V_\alpha = -V^2 . \varphi_\gamma \quad .$$

Dans le repère choisi, $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$, donc :

$$T_{2\alpha}\, \varphi^\alpha = T_{20}\, \varphi^0 + T_{21}\, \varphi^1 = \varphi_0(T_{20} - T_{21}) = 0$$

$$T_{3\alpha}\, \varphi^\alpha = T_{30}\, \varphi^0 + T_{31}\, \varphi^1 = \varphi_0(T_{30} - T_{31}) = 0 \quad .$$

Soit :

(8) $$T_{20} - T_{21} = 0 \; , \quad T_{30} - T_{31} = 0 \quad .$$

D'autre part, puisque $V^{\alpha}\,\varphi_{\alpha} = 0$:

$$T_{\alpha\gamma}\,\varphi^{\alpha} = (\nabla_{\alpha} V_{\gamma} - V_{\alpha} V_{\gamma})\,\varphi^{\alpha} = \varphi^{\alpha}\,\nabla_{\alpha} V_{\gamma}$$

qui est proportionnel à φ_{γ} , d'après (E), donc :

$$T_{\alpha 2}\,\varphi^{\alpha} = T_{02}\,\varphi^{0} + T_{12}\,\varphi^{1} = \varphi_{0}(T_{02} - T_{12}) = 0$$

$$T_{\alpha 3}\,\varphi^{\alpha} = T_{03}\,\varphi^{0} + T_{13}\,\varphi^{1} = \varphi_{0}(T_{03} - T_{13}) = 0 \quad ,$$

soit

$$(9) \qquad T_{02} - T_{12} = 0 \;, \quad T_{03} - T_{13} = 0 \quad .$$

Les formules (6), (7), (8), (9) montrent que

$$X_2 = X_3 = 0 \quad .$$

Joint à $X_1 = X_2$, cela prouve que X_{α} est proportionnel à φ_{α} . On a donc bien, compte tenu de (4) :

$$\star R_{\alpha\beta\lambda\mu}\,\varphi^{\beta}\,\varphi^{\mu} = b.\varphi_{\alpha}\,\varphi_{\lambda} \quad .$$

THÉORÈME 4. - Un espace - temps extérieur ne peut porter d'ondes monochromatiques que s'il correspond à un cas II ou III de BEL ([2], p. 60).

DÉMONSTRATION. - Elle résulte du lemme précédent et de ce que, dans le vide,

$$\star R_{\alpha\beta\lambda\mu} = \overset{*}{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} \quad .$$

Ainsi, dans le vide, il n'existe en général en chaque point, que deux directions de propagation pour une onde monochromatique. Celles-là même qui correspond aux rayons gravitationnels des cas II_b et III de Bel. Les rayons d'une onde monochromatique coïncident donc avec les rayons gravitationnels.

Réciproquement, les rayons d'un cas II_b ou III de Bel ne correspondent pas, en général, à une radiation monochromatique.

Montrons, à titre d'exemple, que les radiations monochromatiques correspondant à un cas III_b de Bel, ne constituent pas le cas III_b le plus général.

LEMME 3. - Si ψ_α est un vecteur non nul et $\Pi_{\gamma\alpha}$ un tenseur d'ordre 2 :

$$(\Pi_{\gamma\alpha} - \Pi_{\alpha\gamma})\, \psi_\beta + \Pi_{\gamma\beta} . \psi_\alpha - \Pi_{\alpha\beta} . \psi_\gamma = 0$$

entraîne

$$\Pi_{\gamma\beta} = h \psi_\gamma\, \psi_\beta \,, \qquad h = \text{scalaire} \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Si X^β est un vecteur arbitraire tel que $X^\beta\, \psi_\beta \neq 0$, posons $L_\gamma = \frac{\Pi_{\gamma\beta}\, X^\beta}{\psi_\beta\, X^\beta}$. En contractant par X^β les deux membres de :

(1) $$(\Pi_{\gamma\alpha} - \Pi_{\alpha\gamma})\, \psi_\beta + \Pi_{\gamma\beta} . \psi_\alpha - \Pi_{\alpha\beta} . \psi_\gamma = 0 \quad ,$$

il vient

$$\Pi_{\gamma\alpha} - \Pi_{\alpha\gamma} + L_\gamma\, \psi_\alpha - L_\alpha\, \psi_\gamma = 0 \quad .$$

Multiplions les deux membres de cette dernière relation par ψ_β , et retranchons membre à membres de (1) :

$$(\Pi_{\gamma\beta} - L_\gamma\, \psi_\beta)\, \psi_\alpha = (\Pi_{\alpha\beta} - L_\alpha\, \psi_\beta)\, \psi_\gamma \quad .$$

Il existe donc un vecteur M_α tel que :

$$\Pi_{\gamma\beta} = L_\gamma\, \psi_\beta + \psi_\gamma\, M_\beta \quad .$$

Portons cette valeur dans l'égalité qui définit L_γ :

$$\psi_\gamma . M_\beta\, X^\beta = 0 \quad .$$

Or, $\psi_\gamma \neq 0$, et X^β n'est astreint qu'à la condition $X^\beta\, \psi_\beta \neq 0$, donc $M_\beta = 0$. Ainsi, $\Pi_{\gamma\beta} = L_\gamma\, \psi_\beta$.

Portons dans (1) et simplifions par ψ_α qui n'est pas nul :

$$L_\gamma \psi_\alpha - L_\alpha \psi_\gamma = 0 \ , \quad \text{soit} \quad L_\alpha = h\psi_\alpha \quad .$$

En résumé :

$$\Pi_{\gamma\beta} = h\psi_\gamma \psi_\beta \quad .$$

THÉORÈME 5. - Dans un espace - temps extérieur, le vecteur quadrifréquence d'une onde monochromatique correspondant à un cas III_b de Bel, définit un champ de directions parallèles.

DÉMONSTRATION. - D'après LICHNEROWICZ (cf. BEL [2]), le cas III_b est caractérisé par $R_{\alpha\beta\lambda\mu} \varphi^\alpha = 0$, $\overset{*}{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} \varphi^\alpha = 0$; où la seconde relation est surabondante puisque $R_{\alpha\beta} = 0$. La première de ces relations et la formule (F) entraînent :

$$(T_{\gamma\alpha} - T_{\alpha\gamma}) \varphi_\beta + \varphi_\alpha T_{\gamma\beta} - \varphi_\gamma T_{\alpha\beta} = 0 \quad .$$

D'après le lemme précédent, $T_{\gamma\alpha} = h\varphi_\gamma \varphi_\alpha$; c'est-à-dire en explicitant $T_{\gamma\alpha}$:

(1) $$\nabla_\gamma V_\alpha = V_\gamma V_\alpha + h\varphi_\gamma \varphi_\alpha \quad .$$

Comme $V^\alpha \varphi_\alpha = \varphi^\alpha \varphi_\alpha = 0$, on en déduit : $\varphi^\alpha \nabla_\gamma V_\alpha = 0$. La formule (D) entraîne alors $V^2 = 0$.

Le vecteur V_α est donc isotrope et orthogonal au vecteur isotrope φ_α , il lui est donc colinéaire :

$$V_\alpha = \lambda\varphi_\alpha \quad .$$

Portons cette valeur dans (1), et tenons compte de

$$\nabla_\alpha \varphi_\beta = \varphi_\alpha V_\beta + \varphi_\beta V_\alpha = 2\lambda\varphi_\alpha \varphi_\beta \quad ,$$

il vient :

$$\partial_\gamma \lambda = (h - \lambda^2) \varphi_\gamma \quad .$$

Comme φ_γ est un gradient local, on tire :

$$\varphi_\gamma = \partial_\gamma U , \quad \lambda = F(U) , \quad h = F'_U + F^2 \qquad ,$$

où F est une fonction arbitraire de U. Ainsi, localement, $\nabla_\alpha \varphi_\beta = 2\lambda\varphi_\alpha \varphi_\beta$ s'écrit :

(2) $$\nabla_\alpha \partial_\beta U = 2F(U) \partial_\alpha U\partial_\beta U \qquad .$$

Montrons qu'on peut effectuer un changement de fonction de phase $U \to f(U)$, de telle sorte que $\nabla_\alpha \partial_\beta f(U) = 0$. Dans un tel changement, on a la substitution :

$$\nabla_\alpha \partial_\beta U \to \nabla_\alpha(f' \partial_\beta U) = f'' \partial_\alpha U\partial_\beta U + f' \nabla_\alpha \partial_\beta U \qquad ,$$

soit, avec (2) :

$$\nabla_\alpha \partial_\beta f(U) = (f'' + 2f' F) \partial_\alpha U\partial_\beta U \qquad .$$

Si on choisit f telle que :

$$f' = \exp[-2 \int F(U) du] \qquad ,$$

on a bien

$$\nabla_\alpha \partial_\beta f(U) = 0 \qquad .$$

Il existe donc un choix de la fonction de phase pour lequel le vecteur isotrope φ_α est à dérivée covariante nulle. Les espaces - temps portant un tel champ vectoriel ont été déterminés par ROBINSON dans un travail non publié.

Le lemme 3 permet la détermination des espaces - temps à courbure constante portant une onde monochromatique. On obtient encore des limitations pour ces espaces :

THÉORÈME 6. - Si un espace - temps à courbure constante porte des ondes monochromatiques,

$$\nabla_\gamma V_\beta = \frac{R}{12} g_{\gamma\beta} + V_\gamma V_\beta + h\varphi_\gamma \varphi_\beta \quad ,$$

où R est le scalaire de courbure, h un scalaire.

En particulier, $R \geqslant 0$.

DÉMONSTRATION. - Le tenseur de Riemann s'écrit :

$$R_{\gamma\alpha\beta\delta} = \frac{R}{12}(g_{\beta\gamma} g_{\delta\alpha} - g_{\beta\alpha} g_{\delta\gamma}) \quad .$$

compte tenu de la relation (F), on obtient

$$\frac{R}{12}(\varphi_\alpha g_{\beta\gamma} - \varphi_\gamma g_{\alpha\beta}) = (T_{\gamma\alpha} - T_{\alpha\gamma})\varphi_\beta + \varphi_\alpha T_{\gamma\beta} - \varphi_\gamma T_{\alpha\beta} \quad .$$

Ce qui s'écrit, en posant $\Pi_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - \frac{R}{12} g_{\alpha\beta}$:

$$\varphi_\alpha \Pi_{\gamma\beta} - \varphi_\gamma \Pi_{\alpha\beta} + \varphi_\beta(\Pi_{\gamma\alpha} - \Pi_{\alpha\gamma}) = 0 \quad .$$

Le lemme 3 entraîne $\Pi_{\gamma\beta} = h\varphi_\gamma \varphi_\beta$, et, en explicitant la valeur de $\Pi_{\gamma\beta}$:

$$\nabla_\gamma V_\beta = V_\gamma V_\beta + \frac{R}{12} g_{\gamma\beta} + h\varphi_\gamma \varphi_\beta \quad .$$

Puisque $V^\gamma \varphi_\gamma = \varphi^\gamma \varphi_\gamma = 0$, on en déduit :

$$\varphi^\beta \nabla_\gamma V_\beta = 0 \quad .$$

D'après la relation (D), $\varphi^\beta \nabla_\gamma V_\beta = - V^2 \varphi_\gamma$, donc

$$V^2 = - \frac{R}{12} \quad .$$

Mais, puisque V_α est orthogonal au vecteur isotrope φ_α , $V^2 \leqslant 0$; donc $R \geqslant 0$.

Notons que l'existence d'ondes monochromatiques implique qu'on soit en schéma champ électromagnétique pur. Comme la courbure est constante, l'espace - temps est un espace d'Einstein, il en résulte aisément $F_{\alpha\beta} = 0$. Ainsi, les seuls espaces - temps à courbure constante admettant une onde monochromatique sont les espaces - temps vides à constante cosmologique négative ou nulle.

Dans le prochain paragraphe, nous allons montrer que l'existence d'ondes monochromatiques implique des restrictions non seulement locales mais globales. Des hypothèses topologiques nous permettront de donner une réciproque au théorème 3.

6. Propriétés globales des espaces - temps porteurs d'ondes monochromatiques.

Les espaces - temps de ce paragraphe seront supposés compacts et orientables. En particulier, ils pourront être périodiques dans le sens où nous l'avons défini dans une note aux compte rendus [1].

THÉORÈME 7. - Si un espace - temps compact, orientable V_4 décrit un schéma fluide parfait - champ électromagnétique, et s'il porte une onde monochromatique non triviale, le vecteur quadrifréquence ne peut être homologue à zéro ($\varphi_\alpha \neq \partial_\alpha U$ sur tout V_4).

DÉMONSTRATION. - Supposons que le vecteur φ_α soit homologue à zéro, c'est-à-dire se réduise à un gradient $\partial_\alpha U$ sur toute la variété V_4. Si on désigne par E le sous-ensemble de V_4 sur lequel $\partial_\alpha U = 0$, E n'est pas vide. En effet, U atteint ses extréma sur V_4 compact et, aux points ou ils sont atteints $\partial_\alpha U = 0$.

Puisque $\partial_\alpha U$ est continu, E est un ensemble fermé. Si nous montrons que E est un ensemble ouvert, la connexité de V_4 entraînera $V_4 = E$, c'est-à-dire $\varphi_\alpha = \partial_\alpha U = 0$. cela entraînera donc une contradiction avec " φ_α non trivial".

Soit $x_0 \in E$; considérons un géodésique issue de x_0. Si elle n'est pas isotrope, nous la paramétrons par son arc s, et nous désignons son vecteur unitaire tangent par ν^α. D'après le théorème 3,

$$\nabla_\alpha \varphi_\beta = \varphi_\alpha V_\beta + \varphi_\beta V_\alpha \quad ,$$

donc

$$\nu^\alpha \nu^\beta \nabla_\alpha \varphi_\beta = 2(\nu^\beta \varphi_\beta)(\nu^\alpha V_\alpha) \quad .$$

Mais $\nu^\alpha \nabla_\alpha \nu_\beta = 0$, donc

$$\frac{d}{ds}(\nu^\beta \varphi_\beta) = 2(\nu^\beta \varphi_\beta)(\nu^\alpha V_\alpha) \quad .$$

Avec des notations évidentes, on en tire :

$$(\nu^\beta \varphi_\beta)_s = (\nu^\beta \varphi_\beta)\, x_0 \cdot \exp 2 \int_0^s (\nu^\alpha V_\alpha)\, ds \qquad (1)$$

Puisque $x_0 \in E$, $(\varphi_\beta)\, x_0 = 0$, donc $(\nu^\beta \varphi_\beta)\, s = 0$. Si la géodésique utilisée est orientée dans le temps. Cette dernière relation entraîne, avec $\nu^\alpha \nu_\alpha = 1$ et $\varphi^\alpha \varphi_\alpha = 0$, $(\varphi_\beta)\, s = 0$.

Désignons par C_x^+ le cône du futur de x , par C_x^- son cône du passé, on a démontré, avec ces notations :

$$x_0 \in E \implies C_{x_0}^+ \cup C_{x_0}^- \subset E \quad .$$

Munissons V_4 d'une distance compatible avec sa topologie. On sait qu'à tout point y de V_4 on peut associer un nombre positif R_y tel que tout point de V_4 , distant de y de moins de R_y , puisse lui être joint par un arc de géodésique au sens de $g_{\alpha\beta}$. Sous les hypothèses de différentiabilité faites sur V_4 , R_y est fonction continue de y . Soit alors $x \in E$. Prenons un voisinage compact W de x . La restriction de R_y à W atteint son minimum d en $z \in W$, puisque W est compact et R_y continue. Si $x' \in W \cap C_x^+$ est distant de x de moins de d , x est dans un voisinage de x' recouvert par les géodésiques issues de x' , donc $x \in C_{x'}^-$. On construit de même un point x'' tel que $x \in C_{x''}^+$. Par suite $x \in C_{x'}^- \cap C_{x''}^+$ et en tout point de voisinage de x , $C_{x'}^- \cap C_{x''}^+$ on a $\varphi_\alpha = 0$.

THÉORÈME 8. - Soit V_4 un espace - temps périodique homéomorphe au produit d'une variété V_3 par $\mathbb{T}^1$, schématisant un fluide parfait - champ électromagnétique. S'il porte une onde monochromatique non triviale, le premier nombre de Betti de V^3 , $B_1(V_3)$, n'est pas nul.

DÉMONSTRATION. - Puisque l'onde monochromatique n'est pas triviale, son vecteur quadrifréquence φ_α n'est pas identiquement nul. D'après le théorème précédent, φ_α ne se réduit pas à un gradient. D'autre part, sous nos hypothèses topologiques ([1]) il existe sur V_4 un champ régulier, orienté dans le temps, et fermé : f_α . Si les champs f_α et φ_α étaient homologues, ils différeraient d'un gradient et leur différence s'annulerait en quelque point de la variété compacte V_4 . Cette circonstance est impossible puisque $f_\alpha \neq 0$ est orienté dans le temps et $\varphi_\alpha \neq 0$

est isotrope. On a donc deux classes d'homologie non triviales puisque φ_α n'est pas homologue à zéro. D'après de RHAM ([7]), on en déduit $B_1(V_4) \geq 2$. Or,

$$B_1(V_4) = B_1(V_3 \times T^1) = B_1(V_3) + B_1(T^1) \qquad ,$$

$$B_1(T^1) = 1 \qquad ,$$

donc

$$B_1(V^3) \geq 1 \qquad .$$

En particulier, les sections d'espace ne peuvent être homéomorphes à la sphère S^3.

Rappelons que les cas II_b et III de Bel sont caractérisés par l'existence d'un vecteur ℓ_α satisfaisant les relations :

(G) $$R_{\alpha\beta\lambda\mu}\, \ell^\beta\, \ell^\mu = 2\alpha\, \ell_\alpha\, \ell_\lambda \;, \quad \overset{*}{R}_{\alpha\beta\lambda\mu}\, \ell^\beta\, \ell^\mu = 2\beta.\ell_\alpha\, \ell_\mu \qquad .$$

BEL à démontré, dans sa thèse, que les trajectoires du champ vectoriel ℓ_α sont des géodésiques isotropes. En particulier on peut choisir ℓ_α, défini par (G), à un coefficient de proportionnalité près, de telle sorte que :

(H) $$\ell^\alpha\, \ell_\alpha = 0 \;, \quad \ell^\beta\, \nabla_\beta\, \ell_\alpha = 0 \qquad .$$

Pour un tel choix de ce vecteur ROBINSON à démontré la relation qui porte son nom :

(J) $$\frac{1}{2}\,(\nabla_\alpha\, \ell^\alpha)^2 = \nabla^\alpha\, \ell^\beta(\nabla_\alpha\, \ell_\beta + \nabla_\beta\, \ell_\alpha) \qquad .$$

Ceci rappelé, nous allons établir le théorème suivant :

THÉORÈME 9. - Soit V_4 un espace - temps extérieur compact, orientable, réalisant un cas II_b ou III de Bel.

Avec les notations des relations (G), (H), (J), on a :

$$\nabla_\alpha \ell_\beta = \ell_\alpha V_\beta + \ell_\beta W_\alpha$$

où

$$\ell^\alpha V_\alpha = \ell^\alpha W_\alpha = 0 \quad .$$

En particulier

$$\nabla_\alpha \ell^\alpha = 0 \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Contractons avec ℓ^β les deux membres de l'identité :

$$R_{\alpha\beta}\, \ell^\alpha = \nabla^\alpha \nabla_\beta \ell_\alpha - \partial_\beta \nabla_\alpha \ell^\alpha \quad ,$$

on a :

$$R_{\alpha\beta}\, \ell^\alpha \ell^\beta = \nabla^\alpha(\ell^\beta \nabla_\beta \ell_\alpha) - \nabla^\alpha \ell^\beta \nabla_\beta \ell_\alpha - \nabla_\beta(\ell^\beta \nabla_\alpha \ell^\alpha) + (\nabla_\alpha \ell^\alpha)^2 \quad .$$

Mais $R_{\alpha\beta} = 0$ et, compte tenu de (H) et (J), on obtient

$$\frac{1}{2} (\nabla_\alpha \ell^\alpha)^2 + \nabla^\alpha \ell^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta = \nabla_\beta(\ell^\beta \nabla_\alpha \ell^\alpha) \quad .$$

Par intégration sur V_4 , on en déduit :

(1) $$\int_{V_4} [\frac{1}{2} (\nabla_\alpha \ell^\alpha)^2 + \nabla^\alpha \ell^\beta \nabla_\alpha \ell_\beta]\, dv = 0 \quad .$$

Étudions le signe de $\nabla^\alpha \ell^\beta \nabla_\alpha \ell_\beta$.

En un point arbitraire $x \in V_4$ choisissons un repère orthonormé $(\vec{e}_\alpha)$:

$$\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_0 = 1 \ , \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = -1 \qquad (i = 1 \ , 2 \ , 3) \quad .$$

On peut toujours choisir ce repère de telle sorte que $\vec{\ell}$ soit dans le plan $(\vec{e}_0 \ , \vec{e}_1)$, ses projections sur les axes ayant des mesures algébriques positives ou nulles. $g^{\alpha\beta} \ell_\alpha \ell_\beta = 0$ entraîne $(\ell_0)^2 - (\ell_1)^2 = 0$, soit

(2) $$\ell_0 = \ell_1 \quad .$$

Par différentiation, $\ell^\alpha \ell_\alpha = 0$, donne $\ell^\alpha \nabla_\beta \ell_\alpha = 0$ qui s'écrit, compte tenu de (2) :

(3) $$\nabla_\beta \ell_0 = \nabla_\beta \ell_1 \quad .$$

De même $\ell^\alpha \nabla_\alpha \ell_\beta = 0$ s'écrit, compte tenu de (2) :

(4) $$\nabla_0 \ell_\beta = \nabla_1 \ell_\beta \quad .$$

Ceci posé, $L \equiv \nabla_\alpha \ell_\beta \nabla^\alpha \ell^\beta$ s'écrit :

$$L = \sum_{\alpha,\lambda} g^{\alpha\alpha} g^{\lambda\lambda} (\nabla_\alpha \ell_\lambda)^2 = \sum_\lambda g^{\lambda\lambda} [(\nabla_0 \ell_\lambda)^2 - (\nabla_1 \ell_\lambda)^2 - (\nabla_2 \ell_\lambda)^2 - (\nabla_3 \ell_\lambda)^2] \quad ,$$

c'est-à-dire, avec (4) :

$$L = -\sum_\lambda g^{\lambda\lambda} [(\nabla_2 \ell_\lambda)^2 + (\nabla_3 \ell_\lambda)^2] = -(\nabla_2 \ell_0)^2 + (\nabla_2 \ell_1)^2 - (\nabla_3 \ell_0)^2 + (\nabla_3 \ell_1)^2 + \sum_{j,i \geq 2} (\nabla_j \ell_i)^2 \quad .$$

Mais, compte tenu de (3) :

$$\nabla_2 \ell_0 = \nabla_2 \ell_1 \, , \quad \nabla_3 \ell_0 = \nabla_3 \ell_1 \quad ,$$

d'où

$$L = \sum_{j,i \geq 2} (\nabla_j \ell_i)^2 \geq 0 \quad .$$

Ainsi, le crochet de l'intégrale (1) est positif ou nul. La relation (1) entraîne donc :

(5) $$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_\alpha \ell^\alpha = 0 \, , \quad \sum_{i,j \geq 2} (\nabla_j \ell_i)^2 = 0 \quad , \\ \text{c'est-à-dire} \\ \nabla_2 \ell_3 = \nabla_3 \ell_2 = \nabla_2 \ell_2 = \nabla_3 \ell_3 = 0 \quad . \end{array} \right.$$

De (3), (4), (5) on déduit la matrice de $\nabla_\alpha \ell_\beta$:

$$({}_\alpha \ell_\beta) = \begin{pmatrix} \nabla_0 \ell_0 & \nabla_0 \ell_0 & \nabla_0 \ell_2 & \nabla_0 \ell_3 \\ \nabla_0 \ell_0 & \nabla_0 \ell_0 & \nabla_0 \ell_2 & \nabla_0 \ell_3 \\ \nabla_2 \ell_0 & \nabla_2 \ell_0 & 0 & 0 \\ \nabla_3 \ell_0 & \nabla_3 \ell_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par suite, si on a posé :

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} V_0 + W_0 = \frac{1}{\ell_0} \nabla_0 \ell_0 \\ V_1 = V_0 \quad , \quad W_1 = W_0 \\ V_2 = \frac{\nabla_0 \ell_2}{\ell_0} , \quad W_2 = \frac{\nabla_2 \ell_0}{\ell_0} \\ V_3 = \frac{\nabla_0 \ell_3}{\ell_0} , \quad W_3 = \frac{\nabla_3 \ell_0}{\ell_0} \end{array} \right. \quad ;$$

on tire :

$$\nabla_\alpha \ell_\beta = \ell_\alpha V_\beta + \ell_\beta W_\alpha \quad .$$

On observe que :

$$\ell^\alpha V_\alpha = \ell_0 V_0 - \ell_1 V_1 = 0$$

$$\ell^\alpha W_\alpha = \ell_0 W_0 - \ell_1 W_1 = 0 \quad .$$

COROLLAIRE. - Si , outre les hypothèses du théorème précédent, le champ ℓ_α est complètement intégrable, ce champ est celui d'une radiation monochromatique.

DÉMONSTRATION. - Par définition un champ complètement intégrable est tel que $\nabla_\alpha \ell_\beta = \nabla_\beta \ell_\alpha$. Cette condition, jointe à $\nabla_\alpha \ell^\alpha = 0$ et $\ell_\alpha \ell^\alpha = 0$ entraîne le résultat.

Bien entendu le théorème 8 ne donne que des conditions nécessaires pour que ℓ_β définisse un cas II_b ou III. Cherchons des conditions suffisantes en exprimant (G).

<u>Formule auxiliaire</u>. - Avec l'expression de $\nabla_\beta \ell_\gamma$ donnée au théorème 9 :

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta \ell_\gamma = \nabla_\alpha(\ell_\beta V_\gamma + \ell_\gamma W_\beta)$$
$$= \nabla_\alpha \ell_\beta . V_\gamma + \ell_\beta \nabla_\alpha V_\gamma + \nabla_\alpha \ell_\gamma . W_\beta + \ell_\gamma . \nabla_\alpha W_\beta \quad .$$

Une nouvelle application du théorème 9 donne :

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta \ell_\gamma = \ell_\alpha(V_\beta V_\gamma + V_\gamma W_\beta) + \ell_\beta(W_\alpha V_\gamma + \nabla_\alpha V_\gamma) + \ell_\gamma(W_\alpha W_\beta + \nabla_\alpha W_\beta) \quad .$$

Les identités de Bianchi s'écrivent donc :

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \ell^\delta = \nabla_\alpha \nabla_\beta \ell_\gamma - \nabla_\beta \nabla_\alpha \ell_\gamma \quad ,$$

soit

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \ell^\delta = \ell_\gamma(\nabla_\alpha W_\beta - \nabla_\beta W_\alpha) + \ell_\beta(\nabla_\alpha V_\gamma - V_\alpha V_\gamma) - \ell_\alpha(\nabla_\beta V_\gamma - V_\beta V_\gamma) \quad .$$

<u>Expression de $R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \ell^\delta \ell^\beta = a.\ell_\alpha \ell_\gamma$</u>. - Contractons les deux membres de la formule auxiliaire avec ℓ^β. Compte tenu de $\ell^\beta \ell_\beta = 0$, $\ell^\beta V_\beta = 0$ et $R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \ell^\delta \ell^\beta = a \ell_\alpha \ell_\gamma$, il vient :

$$a.\ell_\alpha \ell_\gamma = \ell_\gamma(\ell^\beta \nabla_\alpha W_\beta - \ell^\beta \nabla_\beta W_\alpha) - \ell_\alpha \ell^\beta \nabla_\beta V_\gamma \quad .$$

Mais $\ell^\beta W_\beta = 0$ et $\nabla_\alpha \ell_\beta = \ell_\alpha V_\beta + \ell_\beta W_\alpha$ entraînent :

$$\ell^\beta \nabla_\alpha W_\beta = - W^\beta \nabla_\alpha \ell_\beta = - \ell_\alpha W^\beta V_\beta \quad ;$$

d'où :

$$(a + V^\mu W_\mu)\, \ell_\alpha \ell_\gamma + \ell_\gamma . \ell^\beta \nabla_\beta W_\alpha + \ell_\alpha \ell^\beta \nabla_\beta V_\gamma = 0 \quad .$$

On en déduit aisément :

$$(K)\qquad \begin{cases} \ell^{\beta}\,\nabla_{\beta} W_{\alpha} = r.\ell_{\alpha} \\ \ell^{\beta}\,\nabla_{\beta} V_{\gamma} = s.\ell_{\gamma} \\ a + V^{\mu} W_{\mu} + r + s = 0 \end{cases}$$

qui traduisent la première relation (G).

<u>Expression de</u> $\overset{*}{R}_{\alpha\beta\lambda\mu}\,\ell^{\beta}\,\ell^{\mu} = b.\ell_{\alpha}\,\ell_{\mu}$. - Par définition .

$$\overset{*}{R}_{\alpha\beta\lambda\mu}\,\ell^{\beta}\,\ell^{\mu} = \frac{1}{2}\,\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}\,R^{\gamma\delta}{}_{\lambda\mu}\ell^{\beta}\,\ell^{\mu} \quad .$$

Compte tenu de la seconde relation (G) et de la formule auxiliaire :

$$b.\ell_{\alpha}\,\ell_{\lambda} = \frac{1}{2}\,\eta_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}.\ell^{\beta}[\ell_{\lambda}(\nabla_{\gamma} W_{\delta} - \nabla_{\delta} W_{\gamma}) + \ell_{\delta}(\nabla_{\gamma} V_{\lambda} - V_{\gamma} V_{\lambda}) - \ell_{\gamma}(\nabla_{\delta} V_{\lambda} - V_{\delta} V_{\lambda})]$$

A cause de l'antisymétrie de $\eta_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}$:

$$\frac{1}{2}\,\eta_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}(\nabla_{\gamma} W_{\delta} - \nabla_{\delta} W_{\gamma}) = \eta_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}\,\nabla_{\gamma} W_{\delta} \quad ,$$

$$\eta_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}\,\ell_{\delta}\,\ell^{\beta} = 0 \;, \quad \eta_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}\,\ell_{\delta}\,\ell^{\beta} = 0 \quad .$$

Il reste :

$$(L)\qquad \left\{ b.\ell_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}.\ell^{\beta}\,\nabla^{\gamma}\,W^{\delta} \right. \quad ,$$

qui traduit la seconde relation (G).

On devrait pouvoir exploiter (K) et (L) de manière à restreindre la généralité des champs vectoriels V_{α} et W_{α} et, peut être, démontrer que sous nos hypothèses topologiques :

cas II_b ou III $\Longrightarrow$ ondes monochromatiques.

4. <u>Effet Döppler</u> (2).

a. <u>Rappels et notations.</u> - Etant donné un point x de l'espace-temps V_4 ,

(2) Dans une autre optique, on pourra consulter [8].

décrivant une trajectoire d'espace - temps (x) , adoptons dans l'espace tangent à V_4 en x , un repère galiléen orthonormé $(\vec{e}_{(\alpha)})$ par rapport auquel le point x est au repos. Ce repère est appelé repère propre. Le vecteur $\vec{e}_{(0)}$ du repère mesure le temps propre de x ; il est évidemment tangent à (x) en x .

Si φ_α est le vecteur quadrifréquence d'une onde monochromatique dans laquelle (x) est plongé, la fréquence observée par x est, à une constante près :

$$\nu = e^{\alpha}_{(0)}\, \varphi_\alpha \quad .$$

b. <u>Détermination de la fonction d'onde.</u> - Considérons une source ponctuelle x emettant une onde monochromatique entretenue. Le temps propre de x est défini par l'arc s de sa trajectoire (x) lorsqu'on a choisi une origine sur (x) et une unité de mesure de s .

D'autre part, expérimentalement, le temps propre peut être mesuré par une horloge atomique attachée à x et correspondant à une fréquence ν . Si u^α est le vecteur vitesse généralisé de x : $\nu = \varphi^\alpha u_\alpha$. Par suite

$$\frac{d}{ds}\,\nu = u^\lambda \nabla_\lambda (u^\alpha\, \varphi_\alpha) = u^\lambda \nabla_\lambda u^\alpha . \varphi_\alpha + u^\alpha u^\lambda \nabla_\alpha \varphi_\lambda \quad .$$

Or, d'après le théorème 3,

$$\nabla_\lambda \varphi_\alpha = \varphi_\alpha V_\lambda + \varphi_\lambda V_\alpha \quad ,$$

donc :

$$\frac{d}{ds}\,\nu = u^\lambda \nabla_\lambda\, u^\alpha . \varphi_\alpha + 2\nu . u^\alpha V_\alpha \quad .$$

Mais dans une horloge atomique la fréquence ν est constante au cours du temps, donc :

$$\frac{d}{ds}\,\nu = 0 \quad ,$$

et par suite :

$$u^\lambda \nabla_\lambda\, u^\alpha . \varphi_\alpha + 2\nu . u^\alpha V_\alpha = 0 \quad . \tag{1}$$

Comme on l'a vu, l'indétermination de la fonction de phase U entraîne que V_α n'est défini qu'aux substitutions près :

$$U \to f(U) \;,\quad \varphi^\alpha \to f'.\varphi^\alpha \;,\quad V_\alpha \to V_\alpha + \frac{1}{2} f''/f'.\varphi_\alpha \quad ,$$

où

$$f' = \frac{df}{dU} \;, f'' = \frac{d^2 f}{dU^2} \quad .$$

Donnons-nous une fonction de phase arbitraire U à laquelle correspond un vecteur V_α. Nous allons montrer qu'il est possible de choisir une nouvelle fonction de phase $f(U)$ de telle sorte que le vecteur correspondant $V'_\alpha = V_\alpha + \frac{1}{2} f''/f'.\varphi_\alpha$, vérifie (1). Il suffit que :

$$f'.u^\lambda \nabla_\lambda u^\alpha.\varphi_\alpha + 2\nu.u^\alpha(V_\alpha + \frac{1}{2} f''/f'.\varphi_\alpha) = 0 \quad ,$$

c'est-à-dire :

$$f'^2.u^\lambda \nabla_\lambda u^\alpha.\varphi_\alpha + 2f'.\nu.u^\alpha V_\alpha + \nu^2.f'' = 0 \quad .$$

Les coefficients $u^\lambda \nabla_\lambda u^\alpha.\varphi_\alpha$, $\nu u^\alpha V_\alpha$, ν^2, ne dépendant pas de f ; cette relation apparaît donc comme une équation de Bernoulli en f'. Elle détermine f à deux constantes près. Ces deux constantes sont déterminées si on se donne sur (x) une origine et une unité de temps.

Conclusion : Le choix d'une horloge atomique, d'une origine des temps propres et d'une unité de temps, détermine univoquement la fonction d'onde sur la source x, donc, dans tout son domaine d'existence.

Cas particulier : Si la source décrit une géodésique d'univers :

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\lambda = 0 \quad ,$$

donc (1) s'écrit

(2) $$u^\alpha V_\alpha = 0 \quad .$$

Le vecteur V_α est donc orthogonal à u^α et à φ^α tout le long de (x).

c. "Vieillissement" des fréquences observées. - Conservons les notations précédentes. Soit y un observateur décrivant une trajectoire d'espace - temps (y), v^α son vecteur vitesse généralisé. Le temps propre de y est mesuré, comme pour x, par l'arc σ de (y). La fréquence observée par y est :

$$\nu' = v^\alpha \varphi_\alpha \quad .$$

Par suite :

$$\frac{d}{d\sigma} \nu' = v^\alpha \nabla_\alpha (v^\beta \varphi_\beta) = v^\alpha \nabla_\alpha v^\beta . \varphi_\beta + v^\alpha v^\beta \nabla_\alpha \varphi_\beta \quad .$$

En utilisant le théorème 3, il vient :

$$(3) \qquad \frac{d\nu'}{d\sigma} = v^\alpha \nabla_\alpha v^\beta . \varphi_\beta + 2\nu' . v^\alpha V_\alpha \quad .$$

La disposition en y des vecteurs $v^\alpha \nabla_\alpha v^\beta$, φ_β ; v^α et V_α est, a priori, quelconque. Par suite, en général :

$$\frac{d\nu'}{d\sigma} \neq 0 \quad .$$

Si, en particulier, y décrit une géodésique d'univers, $v^\alpha \nabla_\alpha v_\beta = 0$, donc :

$$(4) \qquad \frac{d\nu'}{d\sigma} = 2\nu' . v^\alpha V_\alpha \quad ,$$

et V_α, qui est orthogonal à u^α, n'a aucune raison de l'être à v^α.

Conclusion : La fréquence observée doit varier avec le temps, même si la source et l'observateur décrivent des géodésiques d'univers (mouvement rectiligne uniforme, en relativité restreinte).

Cherchons à caractériser les univers pour lesquels un tel phénomène n'a pas lieu. Il faut et il suffit que quelle que soit la paire de géodésiques (x), (y), la constance de la fréquence sur (x) entraîne la constance de la fréquence observée en (y). Comme en un point O arbitraire de V_4 le vecteur unitaire temporel arbitraire v^α peut être considéré comme vecteur vitesse généralisé d'un observateur y passant en O, il faut et il suffit que

$$\frac{d}{d\sigma}\nu' = 0 \quad ;$$

c'est-à-dire, d'après (4) :

$$v^\beta V_\beta = 0 \quad .$$

Mais v^β n'est astreint qu'à la condition $v^\beta v_\beta = 1$, donc $V_\beta = 0$. De $\nabla_\alpha \varphi_\beta = \varphi_\alpha V_\beta + \varphi_\beta V_\alpha$, on déduit $\nabla_\alpha \varphi_\beta = 0$. Le vecteur quadrifréquence φ_β de l'onde émise par x est donc à dérivée covariante nulle. Mais x est arbitraire : en tout point de V_4 on doit pouvoir placer une telle source x. On en déduit aisément l'existence de quatre vecteurs φ_α linéairement distincts, à dérivée covariante nulle. L'univers est donc celui de Minkowsky.

d. Effet Döppler. - Conservons les notations précédentes. La source x émet un rayon qui est une trajectoire du champ vectoriel φ_α, donc, une géodésique isotrope. Rappelons que, le long de ce rayon :

$$\varphi^\alpha \nabla_\alpha \varphi_\beta = 0 \quad ;$$

φ_α est donc transporté parallèlement le long des rayons.

Si $\widehat{xy}$ est un rayon issu de x qui aboutit à l'observateur y, affectons du signe "primo" les éléments transportés par parallèlisme de x en y le long de $\widehat{xy}$. La fréquence en x est $\nu_x = u^\alpha \varphi_\alpha$, or $\varphi'_\alpha = \varphi_\alpha$, donc

(5) $$\nu_x = u'^\alpha \varphi_\alpha \quad .$$

La fréquence mesurée par l'observateur y est :

(6) $$\nu_y = v^\alpha \varphi_\alpha \quad .$$

Ceci posé, l'espace tangent en y à V_4 peut être interprèté comme un espace - temps de Minkowsky où $\vec{u}'$ est le vecteur vitesse généralisé d'une source d'ondes monochromatique, $\vec{v}$ le vecteur vitesse généralisé d'un observateur. Les fréquences sur la source et sur l'observateur sont respectivement : $u'^\alpha \varphi_\alpha$, $v^\alpha \varphi_\alpha$. Mais dans cet espace - temps de Minkowsky la formule de changement de fréquence de la relativité restreinte est applicable :

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1 + v_r}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ,$$

avec les notations rappelées au début de ce travail.

En tenant compte de (5) et (6), il vient :

$$\frac{\nu_y}{\nu_x} = \frac{1 + v_r}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \tag{7}$$

C'est la formule de l'effet Döppler en relativité générale, ν_x est la fréquence émise, ν_y la fréquence observée, c la vitesse de la lumière, v la vitesse de l'observateur par rapport à la source fictive déduite de la source réelle par transport parallèle le long du rayon, v_r la vitesse **radiale** de l'observateur par rapport à la même source fictive.

Conclusion : Il serait du plus haut intérêt d'appliquer (7) à un univers décrit par un ds^2 de Schwatzschild ou à courbure constante.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AVEZ (André). - Propriétés globales des espaces-temps périodiques clos, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 250, 1960, p. 3585-3587.

[2] BEL (Louis). - La radiation gravitationnelle. - Paris, C. D. U. et S. E. D. E. S. 1960 (Thèse Sc. math. Paris. 1960).

[3] COSTA de BEAUREGARD (Olivier). - Théorie synthétique de la relativité restreinte et des quanta. - Paris, Gauthier-Villars, 1957.

[4] LICHNEROWICZ (André). - Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie. - Paris, Dunod, 1955.

[5] LICHNEROWICZ (André). - Théorie relativités de la gravitation et de l'électromagnétisme. - Paris, Masson, 1955.

[6] LICHNEROWICZ (André). - Ondes et radiations électromagnétiques et gravitationnelles en relativité générale, Annali di Mat. pura e appl., Série 4, t. 50, 1960, p. 1-95.

[7] de RHAM (Georges). - Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions, J. Math. pures et appl., t. 10, 1931, p. 115-200 (Thèse Sc. math. Paris. 1931).

[8] SYNGE (J. L.). - Optical observations in general relativity, Rend. Sem. mat. e fis. Milano, t. 30, 1960.