SÉMINAIRE JANET.
MÉCANIQUE ANALYTIQUE
ET MÉCANIQUE CÉLESTE

ANDRÉ AVEZ

Propriétés globales des espaces-temps périodiques clos

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 3 (1959-1960), exp. nº 9, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1959-1960__3__A9_0>

PROPRIÉTÉS GLOBALES DES ESPACES-TEMPS PÉRIODIQUES CLOS

par André AVEZ

Nous nous proposons de démontrer les résultats suivants : soit un espace-temps régulier, périodique et clos ; s'il est vide $(R_{\alpha\beta} = 0)$, il est localement euclidien ; s'il porte un fluide parfait - champ électromagnétique, il est à constante cosmologique positive.

1. Notations.

Ce sont celles de Mr A. LICHNEROWICZ [3].

2. Définition des espaces-temps réguliers, périodiques et clos.

Soit R la droite numérique. Nous dirons qu'un espace-temps régulier V_4 est périodique et clos s'il existe une variété à 3 dimensions V_3 , close, orientable, de classe C^4 , et un homéomorphisme h , de classe C^4 de V_4 sur $V_3 \times R$ satisfaisant à :

1° Les variétés $h^{-1}(x \times R)$, où $x \in V_3$, sont orientées dans le temps.

2° Les variétés $h^{-1}(V_3 \times t)$, où $t \in R$, sont orientées dans l'espace.

3° La métrique ds^2 de V_4 est de classe C^3 , et il existe un nombre T , appelé période, tel que si on désigne par (x , t) le point $h^{-1}(x \times t)$ de V_4 , on ait pour $\forall x$, $\forall t$: $ds^2(x , t) = ds^2(x , t + T)$.

3. La variété compacte W_4 .

Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence dans V_4 définie par

$$(x , t) \equiv (x' , t') \qquad (\mathcal{R}) \Longleftrightarrow x = x' , \qquad t = t' \pmod{T} \quad .$$

La variété quotient $W_4 = V_4/\mathcal{R}$ est homéomorphe à $V_3 \times T^1$ et de classe C^4 . En particulier, elle est compacte et orientable. $\mathcal{R}$ définit une projection $p : V_4 \to W_4$ de classe C^4 . W_4 porte une métrique dont l'image réciproque dans V_4 est ds^2 : p est ainsi, localement, une isométrie.

4. Coordonnées adaptées au caractère périodique.

Tout point de V_4 est de la forme $h^{-1}(x \times t)$, où $x \in V_3$, $t \in R$. Si on a choisi sur V_3 un système de cartes dans lequel x est représenté par (x^1, x^2, x^3), les 4 nombres (x^1, x^2, x^3, t) seront dits coordonnées adaptées au caractère périodique pour le point (x, t). Le même système de coordonnées vaut sur W_4 avec la restriction $0 \leqslant t < T$.

Dans ces conditions $t = f(x^1, x^2, x^3)$, ou plus brièvement $t = f(x)$, f étant de classe C^0 au moins, représente dans V_4 (resp. W_4, si $0 \leqslant f < T$) une variété homéomorphe aux variétés coordonnées $t =$ constante, c'est-à-dire une variété homéomorphe à V_3.

5. Une formule de cohomologie.

Soit S une sous-variété de W_4, orientée dans l'espace, d'équation $t = f(x)$, f de classe C^1.

D'après sa définition, il existe sur W_4 un champ régulier φ_α, orienté dans le temps et fermé $(\nabla_\alpha \varphi_\beta = \nabla_\beta \varphi_\alpha)$. Sur $W_4 = S$ ce champ se réduit à un champ de gradients $\partial_\alpha U$. Si v_α est un champ cofermé $(\nabla_\alpha v^\alpha = 0)$ orienté dans le temps, on a donc :

$$\int_{W_4} \varphi_\alpha . v^\alpha \, dv = \int_{W_4-S} \partial_\alpha U . v^\alpha . dv = \int_{W_4-S} \nabla_\alpha (U v^\alpha) \, dv = \int_{\partial(W_4-S)} U . v^\alpha n_\alpha \, d\sigma$$

où dv est l'élément de volume de W_4, n_α le vecteur unitaire normal de $\partial(W_4 - S)$, $d\sigma$ son élément d'aire.

A la traversée de S dans le sens de φ_α, U subit une discontinuité $U_1 - U_0$, donc

$$\int_{\partial(W_4-S)} U v^\alpha n_\alpha \, d\sigma = \int_S (U_1 - U_0) \, v^\alpha n_\alpha \, d\sigma \quad .$$

Mais $U_1 - U_0 = \int_{\overset{\smile}{M_0 M_1}} \partial_\alpha U . dx^\alpha$, où l'intégrale est prise sur un arc de $W_4 - S$ joignant deux points infiniment voisins de part et d'autre de S. Sur $W_4 - S$, $\partial_\alpha U = \varphi_\alpha$, donc :

$$U_1 - U_0 = \int_{\overset{\smile}{M_0 M_1}} \varphi_\alpha \, dx^\alpha = \oint \varphi_\alpha \, dx^\alpha = P \quad .$$

P est la période de la 1-forme φ_α [1], elle ne dépend pas du point de S où elle est évaluée, donc :

$$\int_{W_4} \varphi_\alpha \, v^\alpha \, dv = P \int_S v^\alpha n_\alpha \, d\sigma \quad .$$

6. Métrique elliptique associée à une métrique hyperbolique normale.

Soit V_n une variété à n dimensions, de classe C^1, munie d'une métrique

$g_{\alpha\beta}$ de signature $n - 1$. Nous savons qu'on peut toujours définir sur V_n un champ continu et régulier de vecteurs ν_α dont la norme $N(\nu_\alpha)$, positive, peut toujours être supposée égale à 1.

Associons à $g_{\alpha\beta}$ le tenseur $h^{\alpha\beta} = - g^{\alpha\beta} + 2\nu^\alpha \nu^\beta$.

THÉORÈME. - La métrique $h^{\alpha\beta}$ est elliptique.

Calculons la norme du vecteur arbitraire X_α dans la métrique

$$h^{\alpha\beta} : \; h^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta = - g^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta + 2(\nu^\alpha X_\alpha)^2 \quad .$$

Posons :

$$X_\alpha = U.\nu_\alpha + Y_\alpha \text{ , avec } u^\alpha Y_\alpha = 0 \quad ,$$
$$h^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta = - (U^2 + Y^\alpha Y_\alpha) + 2U^2 = U^2 - Y^\alpha Y_\alpha \; .$$

Mais $Y^\alpha \nu_\alpha = 0$, $\nu_\alpha \nu^\alpha > 0 \Rightarrow Y^\alpha Y_\alpha \leqslant 0$. Donc $h^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta \geqslant 0$, l'égalité n'étant obtenue que si $U = 0$, $Y_\alpha = 0$, c'est-à-dire $X_\alpha = 0$.

Inégalité de Schwarz. - Si dans la métrique $g_{\alpha\beta}$, $N(X_\alpha) > 0$, pour $\forall Y_\alpha$ on a:

$$N(X_\alpha).N(Y_\alpha) \leqslant (Y_\alpha X^\alpha)^2 \quad ,$$

l'égalité n'étant obtenue que si $Y_\alpha = kX_\alpha$.

Soit $h^{\alpha\beta}$ la métrique elliptique associée à $g_{\alpha\beta}$ et au vecteur $\nu_\alpha = X_\alpha/\sqrt{N(X_\alpha)}$.

$$h^{\alpha\beta} X_\alpha = (- g^{\alpha\beta} + 2\nu^\alpha \nu^\beta) X_\alpha = X^\beta \quad ,$$

donc

$$(X^\alpha Y_\alpha)^2 = (h^{\alpha\beta} X_\alpha Y_\beta)^2 \quad .$$

Appliquons l'inégalité de Schwarz, valide dans la métrique

$$h^{\alpha\beta} : \; (X^\alpha Y_\alpha)^2 \leqslant (h^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta)(h^{\alpha\beta} Y_\alpha Y_\beta) \quad ,$$

l'égalité n'ayant lieu que si $Y_\alpha = kX_\alpha$. Mais

$$h^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta = X^\alpha X_\alpha = N(X_\alpha) \quad ,$$
$$h^{\alpha\beta} Y_\alpha Y_\beta = - N(Y_\alpha) + 2(X^\alpha Y_\alpha)^2/N(X_\alpha) \quad ,$$

donc :

$$(X^\alpha Y_\alpha)^2 \leqslant - N(X_\alpha).N(Y_\alpha) + 2(X^\alpha Y_\alpha)^2 \quad ,$$

soit

$$N(X_\alpha).N(Y_\alpha) \leqslant (X^\alpha Y_\alpha)^2 \quad ,$$

l'égalité n'étant obtenue que si $Y_\alpha = kX_\alpha$.

7. Existence d'une variété S minima sur W_4

Choisissons sur W_4 un champ v_α cofermé et tel que $N(v_\alpha) \geqslant 1$ (il en existe toujours sous nos hypothèses topologiques). Sur une variété S , définie comme au paragraphe 5, $n^\alpha v_\alpha$ ne s'annule pas et peut être supposé positif. D'après l'inégalité de Schwarz, on a donc $v^\alpha n_\alpha \geqslant 1$. La formule de cohomologie entraîne alors :

$$|P^{-1} \int_{W_4} \varphi_\alpha v^\alpha dv| \geqslant \text{aire } S \quad .$$

Le membre de gauche ne dépend pas de S , les aires des variétés S ont donc une borne supérieure A . Il existe par conséquent une suite de variétés S , soit S_i , d'équations $t = f_i(x)$, telle que $\lim\limits_{i=\infty}$ aire $S_i = A$. Comme W_4 est compacte, les $f_i(x)$ sont également bornées : $0 \leqslant f_i(x) < T$. Comme les S_i sont orientées dans l'espace, les $f_i(x)$ sont équi-continues. D'après le théorème d'Ascoli-Arzela, on peut donc extraire de la suite $f_i(x)$ une suite convergeant uniformément vers une fonction $f_A(x)$ continue. Désignons par S_A la variété d'équation $t = f_A(x)$. L'inégalité de Schwarz est encore le principal instrument pour démontrer, par une technique voisine de celle de Rado [2] la semi-continuité supérieure de l'aire. Il en résulte que :

$$\text{aire } S_A \geqslant \lim \quad \text{aire } S_i = A \quad ,$$

or $A \geqslant$ aire S_A , donc $A =$ aire S_A . S_A est donc une solution faible, de classe C^0 , du problème du maximum de l'aire. En adaptant des résultats de GILLIS [2], MORREY [4], NASH [5], on démontre que S_A est solution forte, donc une variété minima au sens de la géométrie différentielle. Il est clair que $p^{-1}(S_A)$ est formé de variétés minima de V_4 d'équations :

$$t = f_A(x) + k.T \quad , \quad k : \text{ entier} \quad .$$

8.

Soient Σ et Σ' deux variétés minima de V_4 , d'équations $t = f_A(x)$ et $t = f_A(x) + T$. Ainsi $\Sigma' - \Sigma$ est le bord d'une partie V de V_4 telle que $p(\overline{V}) = W_4$ ($\overline{V}$: fermeture de V). Feuilletons V_4 pour les variétés parallèles à Σ ; leurs trajectoires orthogonales sont des géodésiques de vecteur unitaire tangent ν_α .

Si $R_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci de V_4 :

$$R_{\alpha\beta}\, \nu^\alpha = \nabla_\alpha \nabla_\beta \nu^\alpha - \nabla_\beta \nabla_\alpha \nu^\alpha ,$$

d'où

$$R_{\alpha\beta}\, \nu^\alpha \nu^\beta = \nu^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta \nu^\alpha - \nu^\beta \partial_\beta(\nabla_\alpha \nu^\alpha) \quad .$$

Mais

$$\nu^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta \nu^\alpha = \nabla_\alpha(\nu^\beta \nabla_\beta \nu^\alpha) - \nabla_\alpha \nu_\beta \nabla^\beta \nu^\alpha \quad ,$$

or

$$\nu^\beta \nabla_\beta \nu_\alpha = 0 \quad , \qquad \nabla_\alpha \nu_\beta = \nabla_\beta \nu_\alpha \quad ,$$

donc

$$\nu^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta \nu^\alpha = - \nabla_\alpha \nu_\beta \nabla^\alpha \nu^\beta \quad .$$

Ainsi :

$$R_{\alpha\beta} \nu^\alpha \nu^\beta + \nabla_\alpha \nu_\beta \nabla^\alpha \nu^\beta = - \nu^\beta \nabla_\beta(\nabla_\alpha \nu^\alpha) \quad .$$

Intégrons les deux membres sur une géodésique précitée, à partir de Σ . Sur Σ , $\nu_\alpha = n_\alpha$ et $\nabla_\alpha n^\alpha = 0$ puisque Σ est minima, donc :

$$H \equiv \int_0^{\bar{s}} [R_{\alpha\beta} \nu^\alpha \nu^\beta + \nabla_\alpha \nu_\beta \nabla^\alpha \nu^\beta] \, ds = - (\nabla_\alpha \nu^\alpha)_{\bar{s}} \quad .$$

Étudions le signe du crochet, en supposant $R_{\alpha\beta} \nu^\alpha \nu^\beta \geqslant 0$. Le vecteur ν_α est unitaire, on peut donc lui associer, d'après le paragraphe 6, la métrique elliptique $h^{\alpha\beta} = - g^{\alpha\beta} + 2\nu^\alpha \nu^\beta$. Dans cette métrique, $h^{\alpha\lambda} h^{\beta\mu} \nabla_\alpha \nu_\beta \nabla_\lambda \nu_\mu \geqslant 0$, l'égalité n'étant obtenue que si $\nabla_\alpha \nu_\beta = 0$. Or :

$$h^{\alpha\lambda} \nabla_\alpha \nu_\beta = (- g^{\alpha\lambda} + 2\nu^\alpha \nu^\lambda) \nabla_\alpha \nu_\beta = - \nabla^\lambda \nu_\beta$$

car $\nu^\alpha \nabla_\alpha \nu_\beta = 0$;

$$h^{\beta\mu} \nabla_\lambda \nu_\mu = (- g^{\beta\mu} + 2\nu^\beta \nu^\mu) \nabla_\lambda \nu_\mu = - \nabla_\lambda \nu^\beta$$

car $\nu^\mu \nabla_\lambda \nu_\mu = 0$, donc :

$$\nabla_\lambda \nu_\beta \nabla^\lambda \nu^\beta = h^{\alpha\lambda} h^{\beta\mu} \nabla_\alpha \nu_\beta \nabla_\lambda \nu_\mu \geqslant 0 \quad ,$$

l'égalité n'étant obtenue que si $\nabla_\lambda \nu_\beta = 0$.

Il en résulte que $H \geqslant 0$, l'égalité n'étant obtenue que si $R_{\alpha\beta} \nu^\alpha \nu^\beta = 0$, $\nabla_\alpha \nu_\beta = 0$.

Ceci posé, intégrons H sur V , défini au début du paragraphe 8 :

$$\int_V H \, dv = - \int_V \nabla_\alpha \nu^\alpha \, dv = - \int_{\Sigma'} \nu^\alpha n_\alpha \, d\sigma + \int_\Sigma \nu^\alpha n_\alpha \, d\sigma \quad .$$

Mais sur Σ , $\nu^\alpha = n^\alpha$, donc $\int_\Sigma \nu^\alpha n_\alpha \, d\sigma = \text{aire } \Sigma = A$; sur Σ' , d'après l'inégalité de Schwarz, $\nu^\alpha n_\alpha \geqslant 1$, donc

$$\int_{\Sigma'} \nu^\alpha n_\alpha \, d\sigma \geqslant \text{aire } \Sigma' = \text{aire } \Sigma = A \quad .$$

Par suite : $\int_V H \, dv \leqslant 0$. De l'étude du signe de H , on tire $H = 0$, c'est-à-dire $R_{\alpha\beta}\,\nu^{\alpha}\,\nu^{\beta} = 0$, $\nabla_{\alpha}\,\nu_{\beta} = 0$.

9. Cas extérieur ($R_{\alpha\beta} = 0$).

Puisque $\nabla_{\alpha}\,\nu_{\beta} = 0$, V et par suite V_4 sont réductibles. $R_{\alpha\beta} = 0$ et les équations de Gauss-Codazzi entraînent alors $R_{\alpha\gamma\beta\delta} = 0$. V_4 est localement euclidienne.

10. Schéma fluide parfait-champ électromagnétique.

Soient k la constante cosmologique, ρ la densité, p la pression, $F_{\alpha\beta}$ le tenseur champ électromagnétique ; les équations d'Einstein s'écrivent :

$$R_{\alpha\beta} = \chi[(\rho + p)\,u_{\alpha}\,u_{\beta} - \frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta}\,(\rho - p) + \frac{1}{4}\,g_{\alpha\beta}\,F_{\lambda\mu}\,F^{\lambda\mu} - F_{\alpha\rho}\,F_{\beta}{}^{\rho}] - \frac{1}{2}\,kg_{\alpha\beta} \quad .$$

D'après l'inégalité de Schwarz, $(u_{\alpha}\,\nu^{\alpha})^2 \geqslant 1$, donc

$$\chi\,[(\rho + p)(u_{\alpha}\,\nu^{\alpha})^2 - \frac{1}{2}(\rho - p)] \geqslant \frac{\chi}{2}(\rho + 3p) \quad .$$

L'antisymétrie de $F_{\alpha\beta}$ entraîne $F_{\alpha\beta}\,\nu^{\alpha}\,\nu^{\beta} = 0$, donc :

$$\frac{1}{4}F_{\lambda\mu}\,F^{\lambda\mu} - \nu^{\alpha}\,F_{\alpha\rho}\,\nu^{\beta}\,F_{\beta}{}^{\rho} = \frac{1}{4}(-\,g^{\alpha\lambda} + 2\nu^{\alpha}\,\nu^{\lambda})(-\,g^{\beta\mu} + 2\nu^{\beta}\,\nu^{\mu})\,F_{\alpha\beta}\,F_{\lambda\mu}$$
$$= \frac{1}{4}\,h^{\alpha\lambda}\,h^{\beta\mu}\,F_{\alpha\beta}\,F_{\lambda\mu} \geqslant 0 \quad ,$$

l'égalité n'étant obtenue que si $F_{\alpha\beta} = 0$. Par suite :

$$R_{\alpha\beta}\,\nu^{\alpha}\,\nu^{\beta} \geqslant \chi\,[\frac{1}{2}(\rho + 3p) + \frac{1}{4}\,h^{\alpha\lambda}\,h^{\beta\mu}\,F_{\alpha\beta}\,F_{\lambda\mu}] - \frac{1}{2}\,k \quad .$$

Si $k \leqslant 0$, il existe donc des domaines où $R_{\alpha\beta}\,\nu^{\alpha}\,\nu^{\beta} > 0$. Mais c'est impossible d'après le paragraphe 8, donc $k > 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIDAL (Pierre) et de RHAM (Georges). - Les formes différentielles harmoniques, Comment. Math. Helv., t. 19, 1946, p. 1-60.

[2] GILLIS (P.). - Sur les problèmes réguliers du calcul des variations de la forme $I[z] = \int_{D_n} F(p_i)\,d(x^i)$ = minimum, Studia Math., t. 8, 1939, p. 68-77.

[3] LICHNEROWICZ (André). - Théories relativistes de la gravitation. - Paris, Masson, 1955 (Ouvrages de Mathématiques à l'usage des Physiciens).

[4] MORREY (C. B.). - Second order elliptic systems of differential equations, Contributions to the theory of partial differential equations ; p. 101-159. - Princeton, Princeton University Press, 1954 (Annals of Mathematics Studies, 33).

[5] NASH (John). - Parabolic equations, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 43, 1957, p. 754-758.