Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

Achilles Papapetrou

Champs périodiques partout réguliers dans la théorie d'Einstein-Schrödinger

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 3 (1959-1960), exp. nº 8, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1959-1960__3__A8_0>

Séminaire JANET
(Mécanique analytique et Mécanique céleste)
3e année, 1959/60 , n° 8

14 mai 1960

CHAMPS PÉRIODIQUES PARTOUT RÉGULIERS DANS LA THÉORIE D'EINSTEIN-SCHRÖDINGER

par Achilles PAPAPETROU

La théorie du champ unifié à $g_{\mu\nu}$ non symétrique - théorie d'Einstein-Schrödinger a été créée il y a presque 15 ans. Elle a été, dès le commencement, l'objet de recherches particulièrement détaillées. Mais les résultats de ces recherches n'ont pas justifié les grands espoirs qu'avait fait naître cette théorie. On doit aujourd'hui constater que tous les efforts entrepris pour démontrer la possibilité d'interpréter la théorie comme une théorie du champ gravitationnel et électromagnétique géométriquement unifié, sont restés sans résultat. Quelques exemples : On n'a pu donner une interprétation physique satisfaisante des solutions exactes obtenues (par exemple : solution statique à symétrie sphérique). De même, il n'a pas été possible d'établir une correspondance directe avec la théorie de Maxwell dans le cas des champs faibles. Enfin, la discussion détaillée du problème du mouvement dans la théorie unifiée n'a rien donné de satisfaisant.

En vue de toutes ces difficultés, on a (à côté des propositions de modification peu attrayantes) exprimé l'opinion que, peut-être, cette théorie sous la forme connue serait capable de décrire les faits seulement dans l'échelle microphysique, et une modification convenable (laquelle on devrait encore chercher) en donnerait la forme applicable à la macrophysique. Il est difficile de voir sur quels problèmes microphysiques concrets on pourrait appliquer une théorie, quand on ne connaît pas avec certitude la signification physique des quantités à l'aide desquelles elle se laisse formuler. Or, il y a une possibilité d'application de la théorie sur un problème, qui ne manque pas d'un certain élément spéculatif, mais qui pourrait en revanche, conduire à un progrès important en cas de succès. C'est le problème de construction de modèles des particules matérielles (élémentaires). Pour ce problème, nous avons un programme clair donné par EINSTEIN : les particules matérielles seront décrites, du point de vue de la théorie du champ, par des solutions des équations du champ qui sont partout régulières et satisfont certaines conditions à l'infini. Nous sommes loin d'être certains que le programme d'Einstein soit physiquement correct, mais, dans l'état présent de nos connaissances relatives au problème des particules élémentaires, ce programme nous semble être très raisonnable.

Pour la description des particules <u>permanentes</u>, ayant une masse propre différente de zéro, il y a (dans le système de coordonnées propres) deux possibilités. Dans la première, on utiliserait des solutions (partout régulières) des équations du champ indépendantes du temps (champs statiques ou stationnaires). L'autre possibilité est d'utiliser des solutions qui sont périodiques dans le temps. Les solutions des équations du champ dans la théorie d'Einstein-Schrödinger, qui sont partout régulières et ne dépendent pas du temps, ont été discutées d'un point de vue spécial, et on en a déduit que, si elles existaient, elles ne seraient pas appropriées comme modèles de particules ayant une masse propre différente de zéro : l'énergie totale des solutions de ce type, donc aussi la masse des particules correspondantes, est nulle.

Il reste à discuter le cas des solutions périodiques et ce sera l'objet de ce séminaire de présenter un rapport concernant un calcul fait l'année dernière sur ce problème.

La discussion a été faite dans le cadre de la théorie unifiée aux équations "fortes". Ces équations sont :

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad R_{\mu\nu} = 0 \,, \qquad R_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = 0 \,; \qquad g^{\overset{\mu\nu}{\vee}}_{\;,\nu} = 0 \quad .$$

Les $R_{\mu\nu}$ sont des fonctions de $g_{\mu\nu}$ et leurs dérivées premières et secondes déterminées au moyen de relations bien connues

$$\left.\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\,\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\,\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} \qquad , \\ g_{\underset{+\,-}{\mu\nu};\lambda} &= g_{\mu\nu,\lambda} - g_{\alpha\nu}\,\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} - g_{\mu\alpha}\,\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} = 0 \qquad . \end{aligned}\right\}$$

Les équations fortes ont certains désavantages, le plus caractéristique étant qu'on ne peut pas les déduire d'un principe variationnel. Mais, dans le cas que nous allons discuter, ces désavantages sont peu importants. On sait, en effet, que chaque solution des équations fortes est aussi solution des équations faibles ; de plus, nous verrons à la fin de cet exposé que, dans le cas considéré ici, chaque solution des équations faibles est aussi (au moins dans la première approximation) solution des équations fortes, à cause de la condition à l'infini que nous allons introduire dans la suite. Les résultats que nous déduirons des équations fortes seront donc très probablement identiques à ceux qu'on déduirait des équations faibles.

Une hypothèse supplémentaire, mais d'une importance fondamentale pour le problème que nous considérons est l'imposition d'une condition à l'infini de l'espace à 3 dimensions. Cette condition est d'abord nécessaire du point de vue mathématique, pour qu'il soit possible de raisonner sur des systèmes des solutions des équations du champ (qui sont des équations différentielles) bien déterminées. Mais cette condition est aussi très importante du point de vue physique, car c'est à l'aide de cette condition qu'on pourra formuler la demande, physiquement indispensable, que **l'interaction** entre deux particules devienne infiniment faible quand leur distance sera infiniment grande. En considérant, dans un sens d'approximation, l'une des particules comme une particule d'épreuve se mouvant dans le champ de l'autre, on voit que cette condition sera :

$$g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu} \qquad \text{pour} \quad r \to \infty \quad .$$

Elle a la même forme, comme en relativité générale, mais son contenu sera ici évidemment plus large :

$$g_{\underline{\mu\nu}} \to \eta_{\mu\nu} \qquad g_{\underset{\vee}{\mu\nu}} \to 0 \qquad \text{pour} \quad r \to \infty \quad .$$

A côté de la condition à l'infini, laquelle a la signification physique dont nous venons de parler, nous utiliserons aussi une deuxième condition , la généralisation de la condition isotheme en relativité générale. Cette condition aura pour nous un but bien plus modeste que la condition à l'infini. Ce but est la simplification de la forme des équations du champ que nous aurons **à discuter.** Comme nous le verrons dans la suite, les équations du champ prennent, à l'aide de cette condition, la forme des équations des ondes (homogènes ou non) dans tous les ordres de l'approximation. Cette condition aura ici la forme :

$$g^{\underline{\mu\nu}}{}_{,\nu} = 0 \quad .$$

On remarquera la similarité avec la dernière des équations du champ $g^{\underset{\vee}{\mu\nu}}{}_{,\nu} = 0$.

L'applicabilité d'une méthode d'approximation est une conséquence immédiate de la condition à l'infini : le champ sera nécessairement faible en dehors d'une région finie de l'espace à 3 dimensions, par exemple en dehors d'une sphère de rayon r_0 (ayant son centre à l'origine). Le rayon r_0 pourrait même s'annuler, cas dans lequel le champ serait faible dans tout l'espace. Mais, en général, on devra considérer le cas $r_0 > 0$.

Les équations $g^{\underset{\vee}{\mu\nu}}{}_{,\nu} = 0 = g^{\underline{\mu\nu}}{}_{,\nu}$ montrent qu'il sera convenable de décrire le champ au moyen de la densité contravariante $g^{\mu\nu} = g^{\underline{\mu\nu}} + g^{\underset{\vee}{\mu\nu}}$: ces équations prennent dans ce cas une forme très simple. (Si on utilisait par exemple le tenseur

$g_{\mu\nu}$, on devrait d'abord exprimer $g^{\mu\nu}$ par $g_{\mu\nu}$). Dans la région $r > r_0$ du champ faible, on développera $g^{\underline{\mu\nu}}$ et $g^{\underset{\vee}{\mu\nu}}$ en séries :

$$g^{\underline{\mu\nu}} = \eta^{\mu\nu} + \sum_{s=1}^{\infty} {}_s g^{\underline{\mu\nu}} , \quad g^{\underset{\vee}{\mu\nu}} = \sum_{s=1}^{\infty} {}_s g^{\underset{\vee}{\mu\nu}} .$$

Il s'ensuit des équations $g^{\underset{\vee}{\mu\nu}}_{,\nu} = 0 = g^{\underline{\mu\nu}}_{,\nu}$ qu'on aura

$${}_s g^{\underline{\mu\nu}}_{,\nu} = 0 = {}_s g^{\underset{\vee}{\mu\nu}}_{\nu} \qquad \text{pour tout } s .$$

Nous sommes maintenant arrivés au point où un calcul plutôt long est nécessaire afin de dériver des équations du champ exactes, les équations valables dans les différents ordres d'approximation. C'est un calcul élémentaire, mais laborieux, à cause de la nécessité d'évaluer des expressions assez longues. Le calcul a été effectué pour la première et deuxième approximation, et il suffira de donner ici les résultats dans leur forme finale :

$$\Box\, {}_1 g^{\underline{\mu\nu}} = 0 , \ \Box\, {}_1 g^{\underset{\vee}{\mu\nu}} = 0 ; \qquad {}_1 g^{\underline{\mu\nu}}_{,\nu} = 0 = {}_1 g^{\underset{\vee}{\mu\nu}}_{,\nu} \quad ;$$

$$\begin{aligned}
\Box\, {}_2 g^{\underline{\mu\nu}} = {} & \Box \{ \tfrac{1}{8} \eta^{\mu\nu} [\tfrac{1}{2}(\eta_{\rho\sigma}\, {}_1 g^{\underline{\rho\sigma}})^2 - \eta_{\alpha\beta}\eta_{\rho\sigma}\, {}_1 g^{\underline{\alpha\rho}}\, {}_1 g^{\underline{\beta\sigma}}] + \tfrac{1}{2}\eta_{\rho\sigma}\, {}_1 g^{\underline{\mu\sigma}}\, {}_1 g^{\underline{\rho\nu}} \} \\
& + \{ {}_1 g^{\underline{\mu\beta}}\, {}_1 g^{\underline{\alpha\nu}} - {}_1 g^{\underline{\mu\nu}}\, {}_1 g^{\underline{\alpha\beta}} + \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}\, {}_1 g^{\underline{\rho\beta}}\, {}_1 g^{\underline{\alpha\sigma}} \}_{,\alpha\beta} \\
& - \{ (\eta^{\mu\beta}\, {}_1 g^{\underline{\rho\nu}} + \eta^{\nu\beta}\, {}_1 g^{\underline{\rho\mu}}) \eta_{\rho\sigma}\, {}_1 g^{\underline{\alpha\sigma}}_{,\beta} \}_{,\alpha} \\
& \qquad + \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} \{ \eta_{\rho\sigma}\eta_{\lambda\tau} ({}_1 g^{\underline{\rho\tau}}_{,\alpha}\, {}_1 g^{\underline{\lambda\sigma}}_{,\beta} - \tfrac{1}{2}\, {}_1 g^{\underline{\rho\sigma}}_{,\alpha}\, {}_1 g^{\underline{\lambda\tau}}_{,\beta}) \} \\
& + \Box \{ \tfrac{1}{8}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\rho\sigma}\, {}_1 g^{\underset{\vee}{\alpha\sigma}}\, {}_1 g^{\underset{\vee}{\rho\beta}} + \tfrac{1}{2}\eta_{\rho\sigma}\, {}_1 g^{\underset{\vee}{\mu\sigma}}\, {}_1 g^{\underset{\vee}{\rho\nu}} \} \\
& \qquad + \{ \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}\, {}_1 g^{\underset{\vee}{\rho\alpha}}\, {}_1 g^{\underset{\vee}{\beta\sigma}} - {}_1 g^{\underset{\vee}{\mu\beta}}\, {}_1 g^{\underset{\vee}{\alpha\nu}} \}_{,\alpha\beta} \\
& - \{ (\eta^{\mu\beta}\, {}_1 g^{\underset{\vee}{\rho\nu}}_{,\beta} - \eta^{\beta\nu}\, {}_1 g^{\underset{\vee}{\mu\rho}}_{,\beta}) \eta_{\rho\sigma}\, {}_1 g^{\underset{\vee}{\alpha\sigma}} \}_{,\alpha} - \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\beta\nu}\eta_{\rho\sigma}\eta_{\lambda\tau}\, {}_1 g^{\underset{\vee}{\rho\tau}}_{,\alpha}\, {}_1 g^{\underset{\vee}{\lambda\sigma}}_{,\beta} \quad ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Box\, {}_2 g^{\underset{\vee}{\mu\nu}} = {} & \Box \{ \tfrac{1}{2}\eta_{\rho\sigma} ({}_1 g^{\underset{\vee}{\mu\sigma}}\, {}_1 g^{\underline{\rho\nu}} + {}_1 g^{\underline{\mu\sigma}}\, {}_1 g^{\underset{\vee}{\rho\nu}}) \} + \{ {}_1 g^{\underline{\mu\alpha}}\, {}_1 g^{\underset{\vee}{\beta\nu}} + \ldots \}_{,\alpha\beta} \\
& + \{ \eta^{\mu\beta}\eta_{\rho\sigma}\, {}_1 g^{\underline{\rho\nu}}_{,\beta}\, {}_1 g^{\underset{\vee}{\alpha\sigma}} + \ldots \}_{,\alpha} \quad ;
\end{aligned}$$

$${}_2 g^{\underline{\mu\nu}}_{,\nu} = 0 = {}_2 g^{\underset{\vee}{\mu\nu}}_{,\nu} .$$

Nous considérons d'abord les équations de première approximation pour la partie symétrique ${}_1g^{\underline{\mu\nu}}$:

(1) $$\Box\, {}_1g^{\underline{\mu\nu}} = 0 \ , \quad {}_1g^{\underline{\mu\nu}}_{\ ,\nu} = 0 \quad .$$

On peut exprimer la solution générale de ces équations à l'aide des fonctions d'ondes v arbitraires, $\Box v = 0$, en utilisant certaines matrices antisymétriques aux éléments constants :

$$K^{\mu\nu} = - K^{\nu\mu} = \mathrm{Cte} \quad .$$

On vérifie immédiatement que ${}_1g^{\underline{\mu\nu}} = K^{\mu\alpha} K^{\nu\beta} v_{,\alpha\beta}$ est une solution des équations (1). La discussion détaillée montre que la solution générale ${}_1g^{\underline{\mu\nu}}$ de (1) dépend essentiellement de <u>deux</u> fonctions d'ondes, $v_{(1)}$ et $v_{(2)}$, arbitraires. Nous écrirons symboliquement :

$${}_1g^{\underline{\mu\nu}} = {}_1g^{\underline{\mu\nu}}_{(1)} + {}_1g^{\underline{\mu\nu}}_{(2)} \quad .$$

De plus ${}_1g^{\underline{\mu\nu}}$ doit satisfaire à la condition à l'infini, et pour cela il suffira évidemment d'imposer cette condition sur les fonctions $v_{(1)}$ et $v_{(2)}$. On obtiendra des fonctions $v_{(1)}$, $v_{(2)}$ ayant cette propriété de la manière simple suivante : on considérera les solutions élémentaires de l'équation $\Box v = 0$, qui sont déterminées par la méthode de séparation des variables quand on utilise dans l'espace à 3 dimensions des coordonnées polaires r, θ, φ. Ces solutions élémentaires s'annulent comme $\frac{1}{r}$ pour $r \to \infty$; il suffira par conséquent de prendre pour $v_{(1)}$ et $v_{(2)}$ de sommes de telles fonctions élémentaires à nombre de termes fini (ou de séries absolument convergentes). On devra encore tenir compte de la périodicité de ${}_1g^{\underline{\mu\nu}}$, ce qu'on obtiendra en prenant des fonctions $v_{(1)}$, $v_{(2)}$ périodiques.

Pour la partie antisymétrique ${}_1g^{\overset{\vee}{\mu\nu}}$, on a les équations

$$\Box\, {}_1g^{\overset{\vee}{\mu\nu}} = 0 \ , \quad {}_1g^{\overset{\vee}{\mu\nu}}_{\ ,\nu} = 0 \quad .$$

La solution générale de ces équations peut être discutée par la même méthode que dans le cas de ${}_1g^{\underline{\mu\nu}}$ et le résultat est qu'elle dépend essentiellement de <u>trois</u> fonctions d'ondes $w_{(i)}$ $(i = 1 , 2 , 3)$ arbitraires. Nous écrivons :

$${}_1g^{\overset{\vee}{\mu\nu}} = {}_1g^{\mu\nu}_{(\check{1})} + {}_1g^{\mu\nu}_{(\check{2})} + {}_1g^{\mu\nu}_{(\check{3})} \quad .$$

Ce résultat est en variance avec le résultat correspondant pour la théorie de Maxwell (en relativité restreinte) : le potentiel A_μ ou le champ $F_{\mu\nu}$ de Maxwell dépend de deux fonctions d'ondes arbitraires : $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu(1)} + F_{\mu\nu(2)}$. Les termes $F^{\mu\nu}_{(1)}$ et $F^{\mu\nu}_{(2)}$ ont la même structure que ${}_1g^{\overset{\mu\nu}{\vee}}_{(1)}$ et ${}_1g^{\overset{\mu\nu}{\vee}}_{(2)}$, mais il n'y a pas de terme $F_{\mu\nu(3)}$ correspondant à ${}_1g^{\overset{\mu\nu}{\vee}}_{(3)}$. L'explication de cette différence est simple. Le champ $F_{\mu\nu}$ satisfait (en relativité restreinte) aux mêmes équations que ${}_1g^{\overset{\mu\nu}{\vee}}$:

$$\Box F^{\mu\nu} = 0 \ , \qquad F^{\mu\nu}_{\ \ ,\nu} = 0 \quad .$$

Mais il satisfait encore à la relation $F_{[\mu\nu,\rho]} = 0$, laquelle n'a pas d'analogue dans la théorie unifiée. (Une équation supplémentaire de la forme ${}_1g_{[\overset{\vee}{\mu\nu},\rho]} = 0$ aurait en effet la conséquence de supprimer le troisième terme ${}_1g^{\overset{\mu\nu}{\vee}}_{(3)}$). Mais nous verrons dans la suite que le terme désagréable ${}_1g^{\overset{\mu\nu}{\vee}}_{(3)}$ devra s'annuler pour que ${}_2g^{\overline{44}}$ ne contredise pas à la condition à l'infini.

Nous considérons maintenant l'équation de deuxième approximation pour ${}_2g^{\underline{\mu\nu}}$, $\Box\, {}_2g^{\underline{\mu\nu}} = \ldots$ Nous commençons par une description qualitative de la difficulté qu'on a rencontrée dans la discussion du même problème pour le champ gravifique pur $(g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu})$; de laquelle on a déduit la non-existence des solutions périodiques en relativité générale : il y a des systèmes de coordonnées dans lesquels, si on forme la valeur moyenne sur la période T du deuxième membre de la composante $\mu = \nu = 4$ de cette équation du champ et si l'on considère la partie principale, pour $r \to \infty$, de cette valeur moyenne (s'annulant comme $\frac{1}{r^2}$), on trouve que cette quantité est une somme définie positive. Du fait que cette quantité s'annule comme $\frac{1}{r^2}$ pour $r \to \infty$, il s'ensuit qu'on aura ${}_2g^{\overline{44}} \to \log r$ pour $r \to \infty$, ce qui contredit la condition à l'infini. (Plus exactement, il s'agit seulement des deux derniers termes de l'équation du champ, les autres termes du deuxième membre ayant la forme $\{\ldots\}_{,\alpha}$ et pour cette raison n'étant pas "dangereux"). La seule possibilité d'éviter la contradiction est que cette somme (qui est définie positive et qui s'annule comme $\frac{1}{r^2}$ pour $r \to \infty$) soit identiquement égale à zéro. Mais ceci se montre équivalent à ${}_1g^{\underline{\mu\nu}} \equiv 0$ dans les systèmes de coordonnées utilisés.

Dans la théorie unifiée, la deuxième membre de l'équation du champ $\Box\, {}_2g^{\underline{\mu\nu}} = \ldots$ contient des termes supplémentaires quadratiques en ${}_1g^{\overset{\mu\nu}{\vee}}$. La question suivante se pose alors : l'existence de ces termes supplémentaires aura-t-elle pour conséquence que le résultat trouvé dans le cas gravifique pur ne sera plus valable ici ? La discussion détaillée montre que la réponse à cette question est positive : il y a une contribution du ${}_1g^{\overset{\mu\nu}{\vee}}$ aux termes "dangereux" pour la convergence de ${}_2g^{\overline{44}}$

(qui s'annule aussi comme $\frac{1}{r^2}$ et a le même signe que les termes **gravifiques**); mais cette **contribution** provient **seulement** du troisième terme ${}_1g^{\overset{\vee}{\mu\nu}}_{(3)}$ de ${}_1g^{\overset{\vee}{\mu\nu}}$. Par conséquent, pour éviter la divergence logarithmique de ${}_2g^{44}$ il sera nécessaire et suffisant de prendre

$$ {}_1g^{\underline{\mu\nu}} = 0 \; , \qquad {}_1g^{\mu\nu}_{(3)} = 0 \; , $$

les autres termes ${}_1g^{\overset{\vee}{\mu\nu}}_{(1)}$ et ${}_1g^{\overset{\vee}{\mu\nu}}_{(2)}$ pouvant être arbitraires (mais satisfaisant à la condition à l'infini). C'est-à-dire que nous aurons maintenant en première approximation :

$$ g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + {}_1g^{\overset{\vee}{\mu\nu}}_{(1)} + {}_1g^{\overset{\vee}{\mu\nu}}_{(2)} $$

(et non $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$, comme en relativité générale).

L'équation de deuxième approximation pour ${}_2g^{\overset{\vee}{\mu\nu}}$ devient maintenant

$$ \Box \, {}_2g^{\overset{\vee}{\mu\nu}} = 0 \; , $$

car le deuxième membre est bilinéaire en ${}_1g^{\underline{\mu\nu}}$ et ${}_1g^{\overset{\vee}{\mu\nu}}$ et ${}_1g^{\underline{\mu\nu}} = 0$ d'après le résultat précédent. Cette équation a la même somme que celle de première approximation, $\Box \, {}_1g^{\overset{\vee}{\mu\nu}} = 0$. La solution la **plus** raisonnable de $\Box \, {}_2g^{\overset{\vee}{\mu\nu}} = 0$ est la solution la plus simple, c'est-à-dire :

$$ {}_2g^{\overset{\vee}{\mu\nu}} = 0 \; . $$

On le voit en remarquant qu'une solution ${}_2g^{\overset{\vee}{\mu\nu}} \neq 0$ de cette équation serait en tous cas entièrement indépendante du choix déjà fait pour ${}_1g^{\overset{\vee}{\mu\nu}}$. On aurait alors simplement un champ antisymétrique de départ ${}_1g^{\overset{\vee}{\mu\nu}} + {}_2g^{\overset{\vee}{\mu\nu}}$, plus compliqué que le champ simple ${}_1g^{\overset{\vee}{\mu\nu}}$.

Une détermination complète de ${}_2g^{\underline{\mu\nu}}$ pour un choix concret de ${}_1g^{\overset{\vee}{\mu\nu}}$ n'a pas été entreprise. Mais il a été possible de montrer qu'il y a tout un système de formes de ${}_1g^{\overset{\vee}{\mu\nu}}$, formes qui conduisent à des ${}_2g^{\underline{\mu\nu}}$ acceptables, c'est-à-dire satisfaisant à la condition à l'infini, et n'ayant aucune singularité. Il s'agit de formes de ${}_1g^{\overset{\vee}{\mu\nu}}$ qui sont associées à des fonctions d'ondes $w_{(1)}$ et $w_{(2)}$ n'ayant pas de singularités, lesquelles on devra multiplier par des facteurs constants numériques assez petits pour que le champ ${}_1g^{\overset{\vee}{\mu\nu}}$ soit faible dans tout l'espace $(r_0 = 0)$. Les solutions pour $\underset{2}{g}^{\underline{\mu\nu}}$ auront alors les mêmes propriétés c'est-à-dire que le champ sera partout faible aussi en deuxième approximation ; et il est probable que cette propriété sera conservée aussi dans les approximations suivantes.

L'existence d'une multiplicité trop grande de solutions périodiques partout régulières et satisfaisant à la condition à l'infini ne serait pas agréable. Il serait mieux de trouver un système de solutions relativement restreint, si ces solutions devaient être des modèles des particules matérielles. Or, dans le problème discuté ici, nous sommes arrivés à un critère supplémentaire trop restrictif en calculant l'énergie totale correspondant à chacune de ces solutions. Ne possédant pas actuellement une définition de l'énergie totale qui serait physiquement tout à fait satisfaisante, nous avons été obligés d'utiliser les lois formelles de conservation représentées par les identités associées à la fonction lagrangienne de la théorie. Nous avons considéré le lagrangien non invariant, c'est-à-dire ce qui ne contient pas de dérivées secondes de $g^{\mu\nu}$:

$$\mathfrak{L} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + (g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu})_{,\alpha} - (g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha})_{,\nu} .$$

Le calcul de l'énergie totale devra être effectué en deuxième approximation : dans la première approximation, l'énergie totale est trivialement nulle à cause du choix des quantités de départ $\underset{1}{g}^{\check{\mu\nu}}$, pour lesquelles nous avons pris des sommes de termes oscillants (proportionnels à $\cos \lambda\omega t$ ou $\sin \lambda\omega t$). On trouve dans la deuxième approximation :

$$2(T^4_4 + t^4_4)\sqrt{-g} = \Box\, \underset{2}{g}^{44} + \{\ldots\}_{,\alpha\beta} ,$$

les accolades $\{\ldots\}$ contenant des termes quadratiques en $\underset{1}{g}^{\check{\mu\nu}}$. D'autre part, l'équation du champ pour $\underset{2}{g}^{\underline{\mu\nu}}$ prend, dans le cas $\underset{1}{g}^{\underline{\mu\nu}} = 0$, la forme $\Box\, \underset{2}{g}^{\underline{\mu\nu}} = [\ldots]_{,\lambda\mu}$, où $[\ldots]$ est aussi une somme de termes quadratiques en $\underset{1}{g}^{\check{\mu\nu}}$. Ainsi, on trouve finalement :

$$(T^4_4 + t^4_4)\sqrt{-g} = \{\ldots\}_{,\alpha\beta} .$$

L'énergie totale sera donnée par

$$E = \int (T^4_4 + t^4_4)\sqrt{-g}\, d^3x = \int \{\ldots\}_{,\alpha\beta}\, d^3x .$$

Cette énergie étant constante (à cause de la loi de conservation), on peut aussi la calculer par intégration de la valeur moyenne $\overline{(T^4_4 + t^4_4)\sqrt{-g}}$ (sur la période T). Pour cette valeur moyenne, on trouve, à cause de la périodicité du champ :

$$\overline{(T^4_4 + t^4_4)\sqrt{-g}} = \overline{\{\dots\}}_{,k\ell} \qquad (k\,,\,\ell = 1\,,\,2\,,\,3)$$

et par conséquent

$$E = \int_{S\to\infty} \overline{\{\dots\}}_{,k}\cdot dS_\ell \quad .$$

Maintenant, on déduit de la structure générale de l'intégrant du deuxième membre que l'énergie totale est nulle. En outre, ce résultat est valable non seulement pour les champs ${}_1g^{\underset{\vee}{\mu\nu}}$ qui sont faibles dans tout l'espace, mais aussi pour tous les champs satisfaisant à la condition à l'infini.

Ce résultat n'est certainement pas agréable, mais n'est pas non plus définitivement catastrophique : on pourra encore penser qu'une énergie totale $E \neq 0$ serait trouvée dans une approximation plus élevée, ou peut-être par l'utilisation d'un autre lagrangien, ou enfin par une autre définition de l'énergie. Une situation pareille se présente d'ailleurs en ce qui concerne la charge (électrique) totale du champ. En effet, on déduit de la forme

$${}_1g^{\underset{\vee}{\mu\nu}} = {}_1g^{\underset{\vee}{\mu\nu}}_{(1)} + {}_1g^{\underset{\vee}{\mu\nu}}_{(2)}$$

la relation :

$${}_1g_{\underset{\vee}{[\mu\nu,\rho]}} = 0 \quad .$$

La quantité ${}_1g_{[\mu\nu,\rho]}$ semble donner la seule possibilité de définition du vecteur de courant et change dans la théorie unifiée (l'autre quantité ${}_1g^{\underset{\vee}{\mu\nu}}{}_{,\nu}$ s'annulant à cause des équations du champ). La charge totale de la particule décrite par la solution considérée devrait donc apparaître dans une approximation plus élevée que la première.

Une dernière remarque relative à la question suivante : les difficultés que nous venons de décrire, sont-elles la conséquence possible de l'utilisation des équations fortes ? La réponse semble être négative pour les raisons suivantes. Les équations faibles donnent pour le champ antisymétrique en première approximation :

$$\Box\ {}_1 g_{[\underset{\vee}{\mu\nu},\rho]} = 0 \qquad \text{et} \qquad {}_1 g^{\overset{\vee}{\mu\nu}}{}_{,\nu} = 0 \qquad .$$

Or, il a été possible de montrer que ces équations, jointes à la condition à l'infini : ${}_1 g_{\underset{\vee}{\mu\nu}} \to 0$ pour $r \to \infty$, ont la même solution générale que les équations considérées précédemment $(\Box\ {}_1 g^{\overset{\vee}{\mu\nu}} = 0 = {}_1 g^{\mu\nu}{}_{,\nu})$. L'équation de deuxième approximation pour ${}_2 g^{\underline{\mu\nu}}$ étant la même, $\Box\ {}_2 g^{\underline{\mu\nu}} = \ldots$, on en déduira dans ce cas aussi :

$$ {}_1 g^{\underline{\mu\nu}} = 0 \ , \qquad {}_1 g^{\overset{\vee}{\mu\nu}} = {}_1 g^{\mu\nu}_{(\check{1})} + {}_1 g^{\mu\nu}_{(\check{2})} \qquad ,$$

et il me semble que les autres résultats de la discussion de la deuxième approximation ne changeront pas. Mais on devra considérer cette question d'une manière plus détaillée.