Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

Jean Kovalevsky

Quasi-résolution des équations de la dynamique dans le système solaire

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 3 (1959-1960), exp. nº 6, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1959-1960__3__A6_0>

QUASI-RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE DANS LE SYSTÈME SOLAIRE

par Jean KOVALEVSKY

Première partie : Position du problème

1. Introduction.

La résolution des équations différentielles de la dynamique peut être considérée sous trois aspects différents.

1° Montrer qu'il existe une variable liée au temps, de façon biunivoque et bicontinue, telle que la solution puisse s'écrire sous forme de séries convergentes de cette variable et qu'une telle expression existe quelle que soit la valeur donnée au temps. Dans le cas du problème des trois corps, l'aboutissement de cette idée a été la théorie de Sundmann. Cependant, il semble que la variable de Sundmann soit pratiquement inutilisable dans les cas réels par suite de la convergence très lente des séries et du trop grand nombre de termes dont il faudrait tenir compte dans un calcul numérique d'application. Telle est la conclusion qui se dégage des travaux de BELORITZKY [1], mais il semble qu'il serait bon de reprendre ce travail à la lumière des possibilités offertes actuellement par les calculateurs électroniques et en faisant une analyse numérique plus poussée du problème.

2° Donner des expressions analytiques approchées de la solution. Ces expressions comprennent un nombre fini de termes des solutions formelles des équations et représentent la trajectoire avec une certaine précision dans un intervalle de temps fini donné d'avance. Cette précision décroît lorsqu'on augmente l'intervalle de temps.

Nous proposons le nom de quasi-résolution des équations aux méthodes de ce type, par analogie avec les orbites quasi-périodiques qu'on rencontre en mécanique céleste. En effet, de même que les orbites quasi-périodiques sont des orbites qui ne s'écartent d'une solution périodique que d'une quantité aussi petite qu'on veut dans un intervalle de temps déterminé, nous avons ici des expressions qui ne s'écartent de la solution réelle (tant numériquement qu'analytiquement) que d'une quantité aussi petite qu'on veut dans un certain intervalle de temps.

Ce sont ces méthodes que nous allons discuter et ce sont elles qui sont, en fait, utilisées en mécanique céleste appliquée.

3° Calculer des tables numériques des solutions des équations avec une précision donnée dans un intervalle de temps fini donné. On atteint ce but en intégrant numériquement les équations différentielles du mouvement. Ces méthodes sont très employées à l'heure actuelle car elles s'adaptent merveilleusement au calcul automatique. Mais à l'extérieur de l'intervalle calculé, la méthode ne fournit aucun renseignement, même qualitatif. Aussi est-il difficile d'employer le mot révolution pour qualifier ces procédés.

2. Forme des équations.

L'étude des mouvements d'un corps de masse m dans le système solaire conduit au système d'équations suivant, rapporté à un système d'axes centré sur le corps attractif principal (Soleil en général)

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k(1+m)\,x}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k(1+m)\,y}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k(1+m)\,z}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial z} \end{aligned}\right. \qquad \text{avec } r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

où R, la fonction perturbatrice, est donnée par

$$R = \sum_{i=1}^{n} km_i \left(\frac{1}{\Delta_i} - \frac{xx_i + yy_i + zz_i}{r_i^3}\right) \qquad \begin{aligned} r_i^3 &= x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \\ \Delta_i^2 &= (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2 \end{aligned}.$$

x_i, y_i, z_i étant les coordonnées du i-ième corps perturbateur, de masse m_i. Ce sont des fonctions du temps que l'on supposera connues d'après une étude antérieure du mouvement de ces corps. Si elles ne sont pas connues, on sera conduit à écrire n systèmes supplémentaires du type (1), ce qui mettra entièrement en équation le problème général des mouvements des corps du système solaire. Les méthodes de résolution de ce problème nous amènent d'ailleurs à résoudre d'abord indépendamment les systèmes (1) où, les x_i y_i z_i ont des expressions approchées au lieu des expressions exactes. Aussi pouvons-nous supposer dans la suite que les x_i y_i z_i sont des fonctions connues du temps.

REMARQUES.

1° Dans le cas d'un mouvement autour du Soleil, les m_i sont petits (1/1050 pour Jupiter, 1/3500 pour Saturne, beaucoup plus faible encore pour les autres planètes) R est une quantité petite devant $\frac{k(1+m)}{t^2}$. On entrevoit ainsi la possibilité de ;

- négliger certains termes de la fonction perturbatrice (négliger R en bloc conduit au problème des deux corps) ;
- n'introduire que des solutions approchées de x_i y_i z_i, ce qui justifie ce qui a été dit au sujet du problème général.

2° Dans le cas d'un mouvement autour d'une planète, la masse du Soleil intervient par un terme de la fonction perturbatrice, le coefficient km_S étant beaucoup plus important que $k(1+m)$. Mais R est faible parce que Δ_S est beaucoup plus grand que r. Dans $\frac{\partial R}{\partial x}$, etc. on aura des quantités de la forme $\frac{km_S}{\Delta^2}$ qu'on écrira $\frac{km_S}{a'^2} \times \frac{a'^2}{\Delta^2}$ où a' est la valeur moyenne prise par Δ et $\frac{km_S}{a'^2}$ sera une quantité petite par rapport à $\frac{k(1+m)}{a^2}$ où a est la valeur moyenne de r. On pourra, en général, négliger les actions perturbatrices des planètes, mais on sera parfois conduit à ajouter les perturbations des autres satellites (cas de certains satellites de Jupiter et de Saturne) et parfois les perturbations dues à la non sphéricité de la planète (satellites artificiels). Dans ce cas, il faut ajouter à R la quantité

$$R' = \sum_{h=2}^{\infty} \frac{B_h}{r^{h+1}} P_h\left(\frac{z}{r}\right)$$

où $P_h\left(\frac{z}{r}\right)$ est le polynôme de Legendre d'ordre h. Les planètes ayant une forme voisine d'une sphère, les B_h sont des nombres faibles, décroissant rapidement avec h.

3. Changements de variables.

Certaines théories résolvent les équations (1) en coordonnées rectangulaires. Telles sont la théorie de la Lune de BROWN [3] ou la théorie des planètes de BROUWER [2].

Toutefois, on est assez souvent conduit, pour simplifier les calculs ou les raisonnements à remplacer le système (1) par des systèmes équivalents. Si on choisit les éléments elliptiques osculateurs (éléments qu'aurait le mouvement si à l'instant t, R devenait identiquement nul) comme inconnues, on obtient avec a : demi grand axe de l'ellipse

e : excentricité de l'ellipse

i : inclinaison du plan de l'ellipse sur xOy

Ω : longitude du nöeud ascendant

ω : angle entre la ligne des noeuds et le grand axe de l'ellipse

τ : instant de passage au périhélie (ou périastre)

$$(2)\left\{\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= -\frac{2}{n^2 a}\frac{\partial R}{\partial \tau}\\
\frac{de}{dt} &= -\frac{1-e^2}{n^2 a^2 e}\frac{\partial R}{\partial \tau} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial \omega}\\
\frac{di}{dt} &= \frac{\operatorname{cotg} i}{na^2 \cdot \sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \Omega}\\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i}\\
\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\operatorname{cotg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} \qquad \text{avec} \quad n^2 a^3 = k(1+m)\\
\frac{d\tau}{dt} &= \frac{r}{n^2 a}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{n^2 a^2 e}\frac{\partial R}{\partial e}
\end{aligned}\right.$$

Ce système a bien des défauts (non validité pour e et i voisins de zéro). Cependant, il permet d'obtenir le plus aisément possible des résultats qualitatifs et quantitatifs concernant les mouvements.

On utilise enfin, pour les développements mathématiques, le système de Delaunay, avec les variables :

$$L = \sqrt{k(1+m)\,a} \qquad G = L\sqrt{1-e^2} \qquad H = G\cos i$$
$$\ell = n(t-\tau) \qquad g = \omega \qquad h = \Omega$$

qui donne le système d'équations canoniques suivant :

$$(3)\left\{\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \ell}\,; & \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial g}\,; & \frac{dH}{\partial t} &= \frac{\partial R}{\partial h}\\
\frac{d\ell}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial L} & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial G}\,; & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial H}
\end{aligned}\right.$$

Deuxième partie : Principes de la quasi-résolution

1. Théorème de Poincaré.

C'est une généralisation du théorème de Cauchy sur la solution d'un système d'équations différentielles. Il s'énonce ainsi :

Soit un système différentiel résolu

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_j , \varepsilon_k , t)$$

où les seconds membres dépendent des paramètres $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$. Supposons que, pour les valeurs $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n = 0$ de ces paramètres, il existe une solution $x_i = x_i^0(t)$ continue de la variable t dans un intervalle fini de t . Supposons aussi que, dans le même intervalle, les seconds membres des équations soient des fonctions continues de t , holomorphes des variables et des paramètres pour le système de valeurs

$$x_i = x_i^0(t) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_j = 0 \quad .$$

Dans ces conditions, la solution se développe en séries entières des ε_j , convergente dans une sphère fixe de l'espace des variables x_i quel que soit t , les ε_j étant dans une certaine sphère de l'espace des ε . On a :

$$(4) \quad x_i = x_i^0(t) + \varepsilon_1 x_i^{11}(t) + \varepsilon_2 x_i^{21}(t) + \dots + \varepsilon_1^2 x_i^{211}(t) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 x_i^{212}(t) + \dots$$

On trouvera la démonstration de ce théorème dans les "Méthodes nouvelles"([6],p.53) ou encore dans la Mécanique céleste de CHAZY([4], page 133).

Les hypothèses de ce théorème sont vérifiées par le système (3) . Elles le sont aussi par le système (2) si i et e ne sont pas nuls. Les singularités ainsi introduites ne sont qu'apparentes et on les déplace en changeant les axes (pour i) ou on les supprime par le changement de variables de Poincaré, en prenant pour nouvelles variables $e \cos(\omega + \ell)$ et $e \sin(\omega + \ell)$. L'holomorphie est assurée s'il n'y a pas de chocs réels ou imaginaires possibles, ce qui écarte, sous certaines conditions, le système Neptune-Pluton.

1° Application aux théories planétaires. - On prendra pour ε les quantités km_i . On prendra pour x_i^0 , la solution du problème des deux corps $(R = 0)$, puis, comme le théorème le permet, on développera la solution en séries entières des m_i , dont la petitesse est assurée.

La suite du calcul résultera également du théorème de Poincaré. On peut en effet, considérer à part la solution $\varepsilon_1 \neq 0$ et $\varepsilon_j = 0$. Cette solution, obtenue en appliquant le théorème de Poincaré, avec un seul paramètre, est holomorphe et peut servir de solution de départ pour développer la solution en fonction d'autres paramètres. On pourra ainsi fractionner le problème en ne considérant, à chaque fois, qu'une seule partie de R . On procédera pratiquement de la façon suivante :

- Les expressions du premier ordre en ε_1 seront obtenues indépendamment en partant de la solution elliptique ;
- Celles du deuxième ordre, en ε_1^2 , $\varepsilon_1 \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 \varepsilon_3$, etc. seront obtenues en partant de la solution du premier ordre en ε , et en faisant varier tous les paramètres, et ainsi de suite. Par exemple, pour les besoins pratiques de la théorie des planètes, on ne fera intervenir les termes du troisième ordre que dans les perturbations par Jupiter. Les seuls termes du quatrième ordre utilisés sont ceux dûs à l'interaction de Jupiter et de Saturne.

2° Application aux théories des satellites. - On procède de façon analogue, les petites quantités étant les B_h et $\frac{km_S}{a'^2}$. Il est d'ailleurs rare qu'il soit utile de considérer ensemble ces deux types de perturbations.

3° Introduction des orbites périodiques.

Il n'est pas toujours souhaitable de prendre pour x_i^0 la solution du problème des deux corps, qui est parfois trop éloignée de la solution réelle, et la convergence du processus décrit est lente. C'est ce qui se passe par exemple pour la théorie de la Lune. Mais supposons qu'il soit possible de trouver une solution d'un système d'équation où R est remplacé par une quantité R' voisine. Le système (1) peut s'écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{h(1 + m)\, x}{r^3} - \frac{\partial R'}{\partial x} = \frac{\partial (R - R')}{\partial x} \\ \\ \ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

R - R' étant plus petit que R . On aura alors des calculs plus rapides si on prend pour x_i^0 la solution des équations sans seconds membres. Ceci est effectivement utilisé quand on peut trouver un R' tel que la solution exacte des équations sans second membre est connue et donne une orbite périodique. Ces orbites périodiques (comme l'orbite variationnelle de Hill dans la théorie de la Lune de BROWN) jouent dans la résolution des équations le même rôle que la solution du problème des deux corps dans les méthodes décrites ci-dessus.

L'intérêt de l'étude des orbites périodiques est donc de donner une solution de départ plus proche de la solution définitive que l'orbite keplérienne. Ces orbites périodiques sont ainsi utilisées surtout quand R est grand (corps en résonnance, fortes perturbations solaires d'un satellite) et permettent de réduire l'importance des seconds membres, ce qui revient à diminuer le rayon de la sphère dans laquelle les hypothèses du théorème de Poincaré doivent être satisfaites.

2. Développement de la fonction perturbatrice.

Supposons, pour simplifier l'exposition, qu'il n'y a qu'un seul corps perturbateur qui se déplace sur une ellipse képlérienne. Les coordonnées x' y' z' sont donc les coordonnées d'un mobile se déplaçant suivant le problème des deux corps. On peut définir, pour ce corps, une anomalie u' qui sera liée à l'anomalie moyenne $\ell' = n'(t - \tau')$ par la relation

$$u' - e' \sin u' = \ell' \quad .$$

Il est aisé de montrer que u_i peut être développée en série de Fourier absolument convergente quels que soient ℓ_i et e_i

$$u' = \ell' + \sum_{p=1} \frac{2J_p(pe')}{p} \sin p\ell' \tag{5}$$

où J_p est la fonction de Bessel d'ordre p. Toutes les autres fonctions de u', telles l'anomalie vraie, le rayon vecteur, x', y', z' peuvent être développées de façon analogue. On obtient ainsi des développements à coefficients numériques avec un seul argument dépendant de ℓ'.

Ce n'est que si on désirait un développement entièrement analytique, c'est-à-dire en particulier, où e' n'est pas remplacé par sa valeur numérique, que la série obtenue devient semiconvergente. En particulier, si on l'ordonne selon les puissances croissantes de e', la convergence n'est assurée que pour $e' < 0{,}6627$ limite d'ailleurs suffisante pour les planètes principales dont l'excentricité ne dépasse pas 0,1. Les propriétés de convergence sont démontrées par TISSERAND ([8], p.262) ou, de fa on plus complète, par WINTNER ([9], p. 213).

Supposons maintenant que l'on veuille résoudre le système sous sa forme (2) ou (3). On doit, dans ce cas, exprimer R en fonction des variables képlériennes du corps étudié. Il faudra donc développer x, y, z et certaines de leurs fonctions comme ci-dessus, mais le développement devra être littéral, et nous retrouverons ici les limitations de convergence pour de fortes valeurs de l'excentricité (la valeur de 0,6627 ne doit pas pouvoir être atteinte par e dans l'intervalle de temps pour lequel on désire avoir une solution valable).

De toute façon, le calcul formel reste possible, et on obtient la fonction perturbatrice sous la forme suivante

$$R = \sum_\alpha \sum_\beta \sum_\gamma \sum_\delta \sum_\varepsilon \sum_\zeta A_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta} \cos(\alpha\ell' + \beta\ell + \gamma g + \delta h + \varepsilon g' + \zeta\ell') \tag{6}$$

d'une série de Fourier dépendant de 6 arguments angulaires, les coefficients A

étant fonction de a, a', e, e', i et i'. La convergence est assurée pour des valeurs pas trop fortes de e et e'.

On peut montrer, en se servant des propriétés des formules donnant les coordonnées en fonction des éléments elliptiques, que $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ sont liées par certaines relations et que R s'écrit

$$(7)\quad R = \sum_k \sum_{k'} \sum_{k''} \sum_{k'''} A_{kk'k''k'''}[k(h + g + \ell - h' - g' - \ell') + k'(g + \ell) + k''\ell + k'''\ell']$$

$$= \sum_{kk'k''k'''} A_{kk'k''k'''}[kD + k'F + k''\ell + k'''\ell'] \quad \text{. (Notations de Delaunay)}$$

Remarquons que si on développe u aussi en série entière de e, le premier terme de $J_p(pe)$ contient $\left(\frac{e}{2}\right)^p \times \frac{1}{p!}$ en facteur, et tend vers zéro si p augmente, et ce d'autant plus vite que e est petit. Il y aura donc une relation entre la puissance de e dans A et la valeur de k''. En fait, il y a plusieurs relations de ce type :

sin i a une puissance au moins égale à $|k'|$
e a une puissance au moins égale à $|k''|$
e' a une puissance au moins égale à $|k'''|$.

On en déduit ainsi une certaine règle permettant d'évaluer l'ordre de grandeur des termes. Cependant, il n'y a pas de règle de récurrence en ce qui concerne les coefficients numériques de ces termes qui, d'ailleurs, croissent avec les $|\mathbf{k}|$. On n'a donc que des présomptions quand on décide d'arrêter le développement à tel ou tel terme. Certains tests numériques permettent cependant d'évaluer la valeur du développement. Nous remplaçons ainsi les équations (2) ou (3) par des équations analogues où les seconds membres sont limités à un certain nombre de termes. Nous ne résolvons donc pas tout à fait le système original, mais un système voisin dont on s'assure ainsi que, pour un certain intervalle de temps, **il représente bien** numériquement le problème à résoudre.

3. Théorèmes de Delaunay-Tisserand.

L'utilisation du développement (7) s'impose dans le cas des théories des satellites perturbés par le Soleil. On montre, ainsi que l'a fait DELAUNAY [5] que la solution du système (3) où R a la forme (6) se met sous forme d'une série analogue à (6), seuls ℓ, h et g pouvant avoir, en plus, un terme linéaire en t les quatre arguments D, F, ℓ et ℓ' étant des fonctions linéaires du temps.

TISSERAND a démontré le même théorème pour le cas du Soleil et de 2 planètes réagissant l'une sur l'autre, tandis que LINSTEDT et NEWCOMB l'ont étendu au cas où il y a un nombre quelconque de planètes, montrant que les éléments L , G et H s'exprimaient dans la solution sous la forme

(8) $\sum A \cos(k\lambda + k'\lambda' + \ldots)$ λ , λ' ... : fonctions linéaires du Temps ,

tandis que les variables conjuguées s'expriment sous la forme

$$xt + x' + \sum B \sin(k\lambda + k'\lambda' + \ldots)$$

$xt + x'$ étant une fonction linéaire à coefficients entiers des λ, λ' , ...
Si on applique maintenant le théorème de Poincaré, on voit que les coefficients A et B se mettent sous forme de série entière en $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$. On a ainsi la forme générale de la solution.

4. Théories du type planétaire.

Parfois, certains de ces arguments ont une période très longue, de l'ordre de 100 ou 1000 fois l'intervalle des observations. Ceci se présente en particulier, pour les arguments g et h des planètes. On peut alors, sans entraîner de modifications dans la convergence des séries dans un intervalle de temps de l'ordre de celui des observations, développer les lignes trigonométriques de ces arguments en fonction entière du temps et, en pratique, n'en conserver que les tout premiers termes. Les solutions prennent alors la forme (8) et (9), avec un nombre réduit d'arguments λ, λ' ... , mais A et B sont désormais des polynômes en t .

REMARQUE. - Ceci n'est qu'un nouvel artifice de calcul ; beaucoup plus limitatif que le procédé de Delaunay qui ne fait appel qu'à la convergence par rapport à e . Ici, on limite de façon draconienne la représentativité des solutions à un intervalle très limité. Son utilisation a cependant été jusqu'à présent indispensable par suite de l'immensité des calculs entraînés par la méthode générale. Dernièrement, malgré l'emploi de machines électroniques, BROUWER a échoué dans une tentative de résoudre le problème plan Jupiter-Saturne sans développements par rapport à t . Il est à noter que l'emploi exclusif de ces méthodes dans les théories planétaires a conduit à concevoir de nombreux faux problèmes dont le plus connu est celui de l'invariabilité des grands axes et le théorème de Poisson. Ces problèmes ne se posent que parce qu'on n'a pas encore été capable de mettre la solution sous sa forme réelle, qui découle du théorème de Delaunay-Tisserand.

5. Détermination de la solution formelle.

Les techniques de détermination des séries (7) et (8) sont variées. Les diverses théories de la Lune (HANSEN, DELAUNAY, BROWN) ou des planètes (LAPLACE, LE VERRIER, HANSEN, HILL, BROUWER) diffèrent plus par ces techniques que par le choix, assez secondaire, des inconnues. Cependant, toutes les méthodes sont essentiellement des méthodes d'approximations successives, la solution de la $(n-1)$-ième approximation étant substituée dans les seconds membres et l'intégration de l'ensemble donnant la n-ième approximation, chaque approximation différant de la précédente par le degré des polynômes A et B.

Le problème qui nous reste à traiter est celui de la validité et de la convergence de la solution formelle ainsi calculée.

Troisième partie : Convergence des développements

Il faut distinguer la convergence au sens mathématique de la possibilité d'en calculer la somme. Les séries de Sundmann sont convergentes et pourtant ne sont pas calculables. Les séries auxquelles nous sommes arrivés ne sont pas convergentes, pourtant la somme d'un certain nombre de termes a une signification précise.

1. Convergence des séries partielles.

Considérons d'abord les séries représentant une solution indépendante des ε. Ce sont donc des séries coefficients des ε_i dans la solution définitive, ou encore les séries de la solution en première approximation. Pour que ces séries convergent, il faut que l'intégrale par rapport au temps des séries représentant les seconds membres des équations (2) ou (3) en supposant connus les arguments forme des séries convergentes. Si une de ces équations se développe sous la forme :

$$\sum_{kk'\ldots k^{(p)}} A_{k,k'\ldots k^{(p)}} \sin(k\lambda + k'\lambda' + \ldots + k^{(p)}\lambda^{(p)}) \quad ,$$

l'intégrale serait :

$$(9) \quad \sum_{kk'\ldots k^{(p)}} \frac{A_{kk'\ldots k^{(p)}}}{kn + k'n' + \ldots k^{(p)} n^{(p)}} \sin(k\lambda + k'\lambda' + \ldots + k^{(p)}\lambda^{(p)})$$

où $n^{(i)}$ est le coefficient du temps de $\lambda^{(i)} = n^{(i)}(t - t_0)$.

La série (9) ne peut converger que si $A = 0$ chaque fois que le dénominateur est petit. Or, cette éventualité n'ayant aucune raison de se produire, si n, n' ... ont leurs valeurs exactes, la série a des termes non bornés et ne converge pas.

Pratiquement, on ne connaît pas n, n'... exactement, mais certaines valeurs approchées. POINCARÉ ([7], p. 94) a montré, en utilisant la propriété de la deuxième partie, paragraphe 3 concernant les facteurs contenus dans A, qu'on peut prendre pour n une valeur approchée de la forme $\sqrt{p/q}$ telle que tous les termes restent bornés. Cependant, des valeurs infiniment voisines de n changeraient les résultats, ce qui fait que la justification de Poincaré n'en est pas une.

Une meilleure justification de l'utilisation de cette méthode semble être la suivante. Soit Δt l'intervalle de temps pour lequel on désire avoir une solution précise. Les termes à longue période par rapport à Δt, qui sont les seuls en cause ci-dessus, pourront être considérés comme constants dans l'intervalle considéré et leur intégrale sera incluse dans les termes séculaires éventuels. Les autres termes conservés forment une série convergente. Nous avons ainsi convergence dans l'intervalle de temps Δt. La pratique prouve aussi qu'à l'exception des cas où les excentricités sont très fortes (comme le VIIIe satellite de Jupiter), le nombre de termes à conserver pour obtenir la somme de la série avec une précision convenable n'est pas trop grand.

2. Convergence des séries complètes.

Pour que les séries complètes, développées en $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$ soient uniformément convergentes, il faut pouvoir appliquer le théorème de Poincaré. Pour cela, il faudrait que les séries de la première approximation qui jouent le rôle des x_i^0 convergent dans un certain intervalle des conditions initiales. Or, les n, n' ... dépendent de ces conditions et, même avec l'artifice de Poincaré, la convergence dans un intervalle ne peut être satisfaite. Il n'y a donc pas convergence uniforme de la solution formelle obtenue en se servant conjointement des théorèmes de Poincaré et de Delaunay-Tisserand. Sans le démontrer, POINCARÉ pense que ces séries ne convergeraient même pas pour certaines valeurs particulières de la variable.

Cependant, nous avons vu que pour l'intervalle de temps Δt, les séries x_i^0 convergeraient à condition de supprimer les termes à longue période. Il est possible par le même artifice de supprimer tous les termes susceptibles de devenir à longue période si les conditions initiales varient dans un certain domaine petit. Soit T la plus petite valeur que peuvent prendre l'une au moins des périodes des termes qui sont ainsi supprimés. La convergence sera assurée ainsi que la sommabilité avec la précision désirée dans un intervalle $\Delta T \ll T$.

Dès lors, pour cet intervalle de temps, on pourra appliquer le théorème de Poincaré et la solution ainsi modifiée sera uniformément convergente pour l'intervalle Δt . On ne conservera des termes ainsi obtenus que ceux qui sont suffisamment grands pour être significatifs eu égard à la précision désirée.

3. Théories du type planétaire.

Ce qui vient d'être dit s'applique également aux solutions du type planétaire pour lesquels on ne supprime pas les termes à longue période, mais on les développe en série entière du temps.(En fait, négliger les termes critiques revient à arrêter ces développements au terme constant). Les développements de la forme Delaunay-Tisserand, tels qu'ils sont effectivement utilisés ne sont donc que des développements du type planétaire plus élaborés.

Les caractéristiques des divers types de théories sont les suivantes :

- Les théories de la forme Delaunay-Tisserand (improprement appelées théories générales) négligent seulement les termes tels que la combinaison des arguments donnent une période grande par rapport à Δt .

- Les théories planétaires négligent a priori tous les arguments qui ne sont pas des moyens mouvements, mais admettent des développements par rapport au temps des lignes trigonométriques de ces arguments jusqu'à t^2 ou t^3 .

On peut imaginer des théories du type intermédiaire, quoique à ma connaissance elles n'aient pas été employées jusqu'à maintenant. Si une combinaison simple des arguments a une grande période par rapport à Δt , on peut développer par rapport au temps chaque terme qui contient cette combinaison d'arguments. C'est la solution qui paraît s'imposer dans la théorie du VIIIe satellite de Jupiter où une combinaison d'arguments a une période 10 000 fois supérieure à celle des arguments fondamentaux.

6. Ordre de grandeur des intervalles de convergence.

L'intervalle Δt que nous avons introduit dépend essentiellement du problème et de la méthode employée pour le résoudre. Prenons, à titre d'exemple, le problème du système Jupiter-Saturne.

Une théorie du type planétaire revient à développer par rapport au temps les mouvements des noeuds et des périhélies dont les périodes sont de l'ordre de 50 000 années. En arrêtant les développements à t^2 et en conservant une précision de 10^{-5} sur les termes les plus importants, on assure la convergence et une précision suffisante sur 500 années. Pousser les développements jusqu'à t^3 élargirait l'intervalle à 3 000 ans, avec la même précision relative pour les termes séculaires et mixtes.

Une théorie du type Delaunay-Tisserand avec les arguments h et g impliquerait que 50000 ans est une période courte dans la théorie. En comparant avec la théorie de la Lune, on peut prévoir que les petits diviseurs critiques correspondent à des périodes 1000 fois plus grandes. En négligeant ces termes critiques, on aura Δt = 50 000 ans. Si on développe les termes critiques par rapport à t, l'intervalle pourra atteindre 1 000 000 d'années. Ceci est encore très petit par rapport à l'âge du système solaire, mais il est à craindre, en ce qui concerne les études sur la stabilité du système, qu'au delà il faille tenir compte des variations éventuelles des masses des corps du système solaire.

5. Conclusion.

On voit que l'ensemble des méthodes de quasi-résolution des équations différentielles de la dynamique dans le système solaire conduit à construire une solution formelle non convergente, puis, par une série d'artifices, d'en tirer une expression finie, purement trigonométrique ou mixte, qui représente la solution avec une précision donnée dans un intervalle de temps donné Δt. Cette représentation n'est pas seulement numérique, mais analytique car les expressions sont des solutions d'équations différentielles ne différant des équations complètes que par des quantités de l'ordre de la précision dans l'intervalle Δt. Elles représentent, à l'heure actuelle, le meilleur compromis possible entre les exigences de rigueur des mathématiciens et les desiderata de simplicité des astronomes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BELORITZKY (D.). - Recherches sur l'application pratique des solutions générales du problème des trois corps, J. des Observateurs, t. 16, 1933.

[2] BROUWER (Dirk). - Integration of the equation of general planetary theory in rectangular coordinates, Astron. J., t. 51, 1944, p. 37-43.

[3] BROWN (Ernest W.). - An introductory treatise on the lunar theory. - Cambridge, 1896, 308 pages.

[4] CHAZY (Jean). - Mécanique céleste, Equations canoniques et variations de constantes. - Paris, Presses universitaires de France, 1953 ("Euclide", 1re section : Mathématiques et Astronomie mathématique).

[5] DELAUNAY (Charles). - Théorie du mouvement de la Lune. - Paris, Gauthier-Villars, 1860-1867 (Mém. Acad. Sc. Inst. France, t. 28 et 29).

[6] POINCARÉ (Henri). - Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, t. 1. - Paris, Gauthier-Villars, 1892.

[7] POINCARÉ (Henri). - Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, t. 2. - Paris, Gauthier-Villars, 1893.

[8] TISSERAND (F.). - Traité de mécanique céleste, Perturbations des planètes d'après la méthode de la variation des constantes arbitraires, t. 1. - Paris, Gauthier-Villars, 1889.

[9] WINTNER (Aurel). - The analytical foundations of celestial mechanics. - Princeton, Princeton University Press, 1947 (Princeton mathematical Series, 5).