Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

GEORGES REEB

Problèmes topologiques de la théorie des systèmes dynamiques

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 3 (1959-1960), exp. n° 5, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1959-1960__3__A5_0>

PROBLÈMES TOPOLOGIQUES DE LA THÉORIE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES

par Georges REEB

Introduction.

Les problèmes dont il est question ici ont leur origine dans des travaux de PONTRJAGIN et de EL'SGOL'C, et ont été étudiés récemment par PEIXOTO, MARKUS, SMALE et d'autres (en relation avec la stabilité structurelle).

Ces problèmes sont en quelque sorte placés aux antipodes des problèmes (de dynamique) rattachés aux noms suivants : POINCARÉ, BIRKHOFF, MORSE, ... qui traitent essentiellement des systèmes conservatifs.

1. Rappel des inégalités de Marston Morse (sur une variété).

Plaçons-nous dans les conditions très particulières suivantes (conditions qui ne sont évidemment pas du tout indispensables à la théorie de Morse) :

(H_1) On étudie une fonction numérique f de classe C_∞ sur une variété V_n compacte ; on suppose $df \equiv 0$ seulement en un nombre fini de points, appelés points critiques. De plus $d^2 f$ est supposé non dégénéré en un tel point critique x ; l'index d'inertie $i(x)$ de $d^2 f$ en x est appelé le nombre type de x.

(H_2) La variété V_n est munie d'une structure d'espace de Riemann et on considère les trajectoires du champ $\operatorname{grad} f$. Si l'une de ces trajectoires joint le point critique x au point critique y, alors on suppose que l'un des entiers $i(x)$, $i(y)$ au moins prend l'une des valeurs 0 ou n.

(H_3) Les trajectoires du champ $\operatorname{grad} f$ au voisinage d'un point critique x sont, dans leur ensemble, homéomorphes à l'ensemble des trajectoires au voisinage de 0 de $\operatorname{grad} Q$, où Q est une forme quadratique non dégénérée, d'index $i(x)$.

Ces hypothèses sont assez naturelles en ce sens, que, quitte à remplacer f par une fonction f' voisine, elles sont toujours vérifiées, mais cette remarque ne concerne pas notre objectif.

Posons : N_p = nombre de points critiques x tels que $i(x) = p$

b_p = nombre de Betti de la dimension p de V_n

Les inégalités de Morse s'écrivent :

$$N_0 \geqslant b_0 \qquad\qquad N_1 - N_0 \geqslant b_1 - b_0$$
$$N_1 \geqslant b_1 \qquad\qquad N_2 - N_1 + N_0 \geqslant b_2 - b_1 + b_0$$
$$\cdots$$
$$N_n \geqslant b_n \qquad\qquad \text{etc.}$$

(Les inégalités de gauche sont des conséquences des inégalités de droite). Ces inégalités ne sont pas exhaustives, c'est-à-dire que V_n étant donné, ainsi que des entiers N_p compatibles avec les inégalités de Morse, il n'existe pas nécessairement une fonction f telle que les N_p soient les entiers associés à f.

Le contre-exemple le plus simple est le suivant : soit une sphère homologique V_n ($b_0 = 1$, $b_n(V_n) = 1$ et $b_i(V_n) = 0$ si $0 < i < n$) ; les entiers $N_0 = N_1 = 1$, $N_i = 0 < i < n$ sont compatibles avec les inégalités de Morse. Mais, s'il existe une fonction f associée à ces entiers N_i , on montre que V_n est la sphère ordinaire S_n ; or il existe des sphères homologiques autres que S_n .

Voici l'idée de la démonstration des inégalités de Morse, d'après THOM :

On prend les points critiques de nombre type n , $x_1 \dots x_{N_n}$ et les trajectoires de gradients qui y aboutissent. Ces ensembles constituent un ouvert de V_n homéomorphe à $\sum_{i=1}^{N_n} B_{n,i}$. On pose $K_n = V_n$, $K_{n-1} = V_n - \sum B_{n,i}$. On prend ensuite les points critiques $x'_1 \dots x'_{N_{n-1}}$ de nombre type $n-1$ et les trajectoires de gradients qui y aboutissent. Ces ensembles constituent un ouvert de K_{n-1} homéomorphe à $\sum_{j=1}^{N_{n-1}} B_{n-1,j}$; on pose $K_{n-2} = K_{n-1} - \sum B_{n-1,j}$ et ainsi de suite. (Pour prouver l'affirmation selon laquelle l'ensemble des trajectoires qui aboutissent à un point critique est homéomorphe à une boule, on utilise (H_3) ; pour prouver qu'il est ouvert, on utilise (H_2)).

Rappelons maintenant les formules qui lient l'homologie des espaces K , L et K/L ($L \subset K$) .

(1) $\quad b'_p(L) = b_p(K) - b'_p(K)$

(2) $\quad b'_{p+1}(K/L) = b_p(L) - b'_p(L)$

(3) $\quad b'_p(K) = b_p(K/L) - b'_p(K/L)$

ou encore :

(1) $b_p(K) = b'_p(K) + b'_p(L)$

(2) $b_p(L) = b'_{p+1}(K/L) + b'_p(L)$

(3) $b_p(K/L) = b'_p(K) + b'_p(K/L)$

d'où :

(1)' $b_p(L) + b_p(K/L) - b_p(K) = b'_{p+1}(K/L) + b'_p(K/L) \geqslant 0$

(2)' $b_p(K) + b_{p+1}(K/L) - b_p(L) = b'_p(K) + b'_{p+1}(K) \geqslant 0$

(3)' $b_p(K) + b_{p-1}(L) - b_p(K/L) = b'_p(L) + b'_{p-1}(L) \geqslant 0$

de (1)' résulte :

$$b_p(K_i) + b_p(K_{i+1}/K_i) - b_p(K_{i+1}) = b'_{p+1}(K_{i+1}/K_i) + b'_p(K_{i+1}/K_i) \geqslant 0$$

d'où, par sommation sur i :

$$N_p - b_p(V_n) \geqslant 0$$

ou $N_p \geqslant b_p(V_n)$ (inégalités de Morse de premier type).

On déduit de (4) :

$$\begin{aligned} & b_n(K_i) + b_n(K_{i+1}/K_i) - b_n(K_{i+1}) = b'_{n+1}(K_{i+1}/K_i) + b'_n(K_{i+1}/K_i) \\ & - b_{n-1}(K_i) - b_{n-1}(K_{i+1}/K_i) + b_{n-1}(K_{i+1}) = - b'_n(K_{i+1}/K_i) - b'_{n-1}(K_{i+1}/K_i) \end{aligned}$$

d'où :

$$b_n(K_i) - b_{n-1}(K_i) - b_n(K_{i+1}) + b_{n-1}(K_{i+1}) + b_n(K_{i+1}/K_i) - b_{n-1}(K_{i+1}/K_i) \leqslant 0$$

et, par addition sur i ,

$$- b_n(V_n) + b_{n-1}(V_n) + N_n - N_{n-1} \leqslant 0$$

(inégalités du deuxième type).

On pourrait maintenant compléter ce résultat par l'étude de l'homologie des variétés de niveau d'une fonction numérique.

2. Résultats de EL'SGOL'C, THOM, et SMALE.

Pour démontrer les inégalités précédentes, on n'est pas obligé de considérer un champ de gradients. Il suffit de considérer sur V_n un champ de vecteurs V présentant les propriétés suivantes :

(H_1) Le champ V possède un nombre fini de points singuliers x , la matrice des dérivées partielles de V en x est de rang maximum. Au voisinage d'un point singulier x , le champ V (ou plutôt l'ensemble de ses trajectoires) a même allure topologique que celle d'un champ de gradients. On associera ainsi à tout point singulier x un nombre type $i(x)$.

(H_2) Toute trajectoire part d'un point singulier et aboutit à un point singulier (H_2'). De plus, si une trajectoire joint le point singulier x au point singulier y, alors l'un des entiers $i(x)$ ou $i(y)$ est égal à 0 ou n.

(H_3) Les trajectoires de V au voisinage du point critique x sont, dans leur ensemble, homéomorphes à l'ensemble des trajectoires au voisinage de 0 de grad Q où Q est une forme quadratique non dégénérée d'index $i(x)$.

Dans ce cas, on définit N_0, N_1, ... comme ci-dessus et on démontre les mêmes inégalités entre N_p, b_p, de la même manière.

3. Signification dynamique des hypothèses du paragraphe 2 et stabilité structurelle.

Le gros ennui des hypothèses (H_1), (H_2), (H_3) faites sur V en 2 réside en ceci : on ne connait guère de critères simples qui assurent que (H_1), (H_2) et (H_3) sont satisfaites, et parallèlement, on ne voit pas la signification dynamique de ces hypothèses (H_1), (H_2), (H_3), encore qu'il soit absolument certain qu'il y en ait une.

L'objet des remarques de ce paragraphe 3 est justement d'adoucir le pessimisme qui résulte de la remarque précédente.

REMARQUE 1. - On peut en fait affaiblir (H_1), (H_2) et (H_3) en (H_1) et (H_2') seules.

REMARQUE 2. - (H_2') signifie entre autres qu'il n'y a aucun autre type d'ensemble minimal que les singularités (il n'est pas tout à fait évident que la réciproque soit vraie).

(Cette remarque 2 montre une signification dynamique de (H_2)).

REMARQUE 3. - Les systèmes considérés ont la stabilité structurelle.

Rappelons, d'une façon un peu sommaire, qu'un champ X sur V_n est dit posséder la stabilité structurelle, si à tout $\eta > 0$ on peut associer $\varepsilon > 0$ tel que pour tout champ X' ε-voisin de X (au sens de la C_1 topologie) l'ensemble des trajectoires de X' est homéomorphe à l'ensemble des trajectoires de X dans un η-homéomorphisme).

Il est possible, mais c'est un sujet délicat abordé par SMALE, de savoir jusqu'à quel point stabilité structurelle et (H_2') impliquent (H_1), (H_2), (H_3).

Ces remarques justifient peut-être, pour les systèmes (H_1), (H_2), (H_3), le nom de <u>système très stable</u>.

4. Extension des résultats du paragraphe 3.

Un autre type de système dynamique très intéressant et fort analogue à ceux considérés en 3 est formé des systèmes (V_n, X) admettant un nombre fini de points singuliers et de trajectoires fermées vérifiant les hypothèses $(\overline{H_1})$, $(\overline{H_2})$, $(\overline{H_3})$ analogues aux hypothèses (H_1), (H_2), (H_3) formulées en 3. (Dans l'énoncé de $(\overline{H_1})$, $(\overline{H_2})$, $(\overline{H_3})$ les trajectoires fermées et les points singuliers de X jouent le même rôle que les points singuliers dans l'énoncé de (H_1), (H_2), (H_3)).

Les systèmes vérifiant $(\overline{H_1})$, $(\overline{H_2})$, $(\overline{H_3})$ seront appelés des systèmes P.

Les exemples de systèmes P sont très nombreux. Ainsi, un champ de vecteurs V défini dans le plan et n'admettant que des points singuliers simples est un système P. La plupart des systèmes concrets du type auto-entretenus sont des systèmes P. Malheureusement, il est encore plus difficile d'indiquer des critères simples qui garantissent $(\overline{H_1})$, $(\overline{H_2})$, $(\overline{H_3})$, que d'indiquer de tels critères qui garantissent (H_1), (H_2), (H_3).

Ici encore les relations avec la stabilité structurelle sont très intéressantes. L'étude de ces relations a été abordée par SMALE. J'indiquerai rapidement pour terminer que dans la boule creuse Δ définie par :

$$1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2 \qquad ,$$

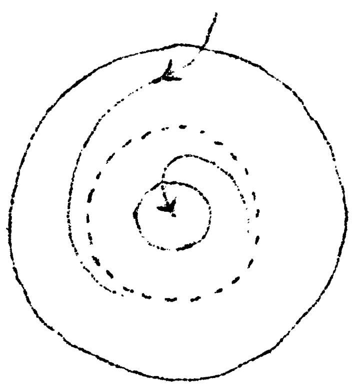
on peut construire un champ de vecteurs V présentant les propriétés suivantes :

(i) V n'a pas de singularités ;

(ii) V sur le bord de Δ est orthogonal à ce bord et dirigé vers l'intérieur de Δ ;

(iii) aucune trajectoire de V ne traverse Δ.

(On remarquera que si on remplace Δ par la couronne Δ' : $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2$, la construction d'un champ analogue est banal, ainsi que le montre la figure :



mais la construction de V sur Δ est bien plus sophistiquée).

On voit aisément (en vertu du théorème de points fixes de Lefschetz) que l'ensemble K des trajectoires de V qui ni ne sortent de Δ ni ne rentrent dans Δ (ces trajectoires sont appelées trajectoires asymplatiques), n'est pas homéomorphe à un complexe. Il semble en particulier que le champ V ne soit pas du type P.

On démontre pour les systèmes P des inégalités analogues aux inégalités de M. MORSE (cf. [1]). Ainsi, si $V_n = S_n$, si le champ X n'a pas de points singuliers, et si (V_n , X) est de type P, il existe au moins $[n/2]$ trajectoires fermées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] SMALE (Stephen). - Morse inequalities for a dynamical system, Bull. Amer. math. Soc., t. 66, 1960, p. 43-49.