Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

André Lichnerowicz

Propagateurs. Quantification du champ

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 3 (1959-1960), exp. n° 4, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1959-1960__3__A4_0>

Séminaire JANET
(Mécanique analytique et Mécanique céleste)
3e année, 1959/60, n° 4

27 février 1960

PROPAGATEURS. QUANTIFICATION DU CHAMP

par André LICHNEROWICZ

Le problème de la quantification du champ électromagnétique et du champ gravitationnel en relativité générale se trouve étroitement lié, dans ma conception, à la notion de radiation. L'étude de cette notion a conduit PIRANI et moi-même à considérer qu'en relativité générale, le "vrai champ gravitationnel" est décrit par le tenseur de courbure. Dans une première partie, nous étudierons les équations du champ correspondantes. Une seconde partie sera consacrée à la quantification des champs électromagnétique et gravitationnel libres à l'approximation linéaire. La quantification rigoureuse en relativité générale du champ électromagnétique libre, celle du champ gravitationnel tout au moins dans un espace à courbure constante repose sur la théorie des propagateurs tensoriels que j'analyserai dans la dernière partie. Il semble que ces propagateurs doivent jouer, dans beaucoup de problèmes physiques de la relativité générale, un rôle essentiel.

I. Les équations de champ.

1. Les équations de Maxwell et les équations d'Einstein.

a. Sur l'espace-temps V_4 de la relativité générale, supposé orienté et muni de la métrique riemannienne de type hyperbolique normal

$$(1.1) \qquad ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad (\alpha , \beta = 0 , 1 , 2 , 3)$$

nous appelons produit scalaire $(T , U)_x$, en $x \in V_4$, de deux tenseurs T et U d'ordre p :

$$(1.2) \qquad (T , U)_x = \frac{1}{p!} T^{\alpha_1 \dots \alpha_p} U_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \quad .$$

Si U est à support compact, nous posons :

$$(1.3) \qquad \langle T , U \rangle = \int_{V_4} (T , U)_x \, d\tau \quad ,$$

où $d\tau$ désigne l'élément de volume riemannien.

Nous appelons tenseur-distribution T d'ordre p une fonctionnelle linéaire continue à valeurs scalaires sur les tenseurs U d'ordre p suffisamment différentiables à support compact ($U \in \mathcal{D}^k_{V_4}$) . Nous notons $\langle T , U \rangle$ la valeur de T pour le tenseur U ; (1.3) définit le tenseur-distribution défini par le tenseur ordinaire T . On obtient les courants au sens de G. DE RHAM en se limitant aux tenseurs antisymétriques ou p-formes. Pour éviter toute confusion avec le courant électrique, nous emploierons l'expression de p-forme-distribution au lieu de celle de courant de G. DE RHAM. Nous désignons par $*$ l'opérateur adjoint sur les formes défini par la métrique : à toute p-forme distribution, il fait correspondre une (4 - p)-forme distribution.

b. Soit d l'opérateur de différentiation extérieure ($d^2 = 0$) , $\delta = (-1)^p \, *^{-1} \, d*$ l'opérateur de codifférentiation extérieure sur les p-formes ou p-formes distributions. Un champ électromagnétique est défini dans V_4 par une 2-forme distribution F satisfaisant les équations de Maxwell

$$dF = 0 \qquad \delta F = J \tag{1.4}$$

où J est la 1-forme distribution définie par le courant électrique. Les équations (1.4) peuvent s'écrire explicitement en repères locaux

$$S \, \nabla_\alpha F_{\beta\gamma} = 0 \qquad - \nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = J^\beta \tag{1.4}$$

où ∇ désigne la dérivation covariante, S la sommation après permutation circulaire sur les indices α , β, γ . Pour J = 0 , on a les équations de Maxwell du vide (ou du champ libre).

c. Sur les tenseurs symétriques d'ordre 2 , considérons l'application μ qui, à tout tenseur P , fait correspondre le tenseur $Q = \mu(P)$ défini par :

$$Q_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(g^{\lambda\mu} P_{\lambda\mu}) \quad .$$

On vérifie aisément que cette application est involutive et $P = \mu(Q)$; P et Q sont dits associés l'un à l'autre.

Si R est le tenseur de Ricci de V_4 , son tenseur d'Einstein S est :

$$S = \mu(R) \quad .$$

La métrique de V_4 est en général astreinte à satisfaire aux équations d'Einstein suivantes : si T est le tenseur d'impulsion, énergie des distributions énergétiques, ces équations s'écrivent usuellement :

$$P \equiv S - T = 0 \tag{1.5}$$

Si nous posons :

$$Q = \mu(P) \qquad U = \mu(T) \quad ,$$

il résulte du caractère involutif de μ que ces équations peuvent aussi s'écrire :

(1.6) $$Q \equiv R - U = 0 \quad .$$

Sous ces formes, les équations du champ gravitationnel semblent profondément différentes des équations de Maxwell.

2. Les vraies équations du champ gravitationnel.

a. Soit $R_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ le tenseur de courbure de l'espace-temps. Ce tenseur satisfait aux identités de Bianchi,

(2.1) $$S\,\nabla_\alpha R_{\beta\gamma,\lambda\mu} = 0$$

qui entraînent comme conséquence :

(2.2) $$\nabla_\alpha R_{\beta\gamma,\ \mu}{}^{\alpha} = \nabla_\beta R_{\gamma\mu} - \nabla_\gamma R_{\beta\mu} \quad .$$

D'autre part, il satisfait aux équations d'Einstein

(2.3) $$P_{\alpha\beta} \equiv S_{\alpha\beta} - T_{\alpha\beta} = 0$$

qui peuvent aussi s'écrire :

(2.4) $$Q_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - U_{\alpha\beta} = 0 \quad .$$

De (2.2) on déduit par contraction que $S_{\alpha\beta}$ est conservatif ; il résulte de (2.3) qu'il en est de même pour $T_{\alpha\beta}$; $U_{\alpha\beta}$ est donc le tenseur associé d'un tenseur conservatif. D'autre part, de (2.2) et (2.4), il résulte que le tenseur de courbure vérifie les équations :

(2.5) $$\nabla_\alpha R_{\beta\gamma,\ \mu}{}^{\alpha} = \nabla_\beta U_{\gamma\mu} - \nabla_\gamma U_{\beta\mu} \quad .$$

b. Nous sommes ainsi conduits à considérer un champ décrit par un tenseur d'ordre 4 , $R_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ satisfaisant aux identités algébriques :

(2.6) $$R_{\alpha\beta,\lambda\mu} = - R_{\beta\alpha,\lambda\mu} = - R_{\alpha\beta,\mu\lambda} = R_{\lambda\mu,\alpha\beta} \qquad SR_{\alpha\beta,\gamma\mu} = 0$$

en vérifiant les équations de champ (2.1) et (2.5) où U est le tenseur associé à un tenseur conservatif T . De (2.2) conséquence de (2.1) et (2.5), on déduit par soustraction :

(2.7) $$\nabla_\beta Q_{\gamma\mu} - \nabla_\gamma Q_{\beta\mu} = 0 \quad .$$

D'autre part, par contraction de (2.2), S est conservatif ; T l'est par hypothèse. Il en est donc de même pour $P = S - T$ et, en vertu de (2.7), pour Q :

(2.8) $$\nabla_\alpha Q^\alpha{}_\beta = 0 \quad .$$

De (2.7) et (2.8), il résulte que, pour le champ envisagé, <u>les équations d'Einstein $Q = 0$ peuvent être considérées comme de simples conditions initiales.</u> D'une façon précise, soit Σ une hypersurface de V_4 orientée dans l'espace et sur laquelle $Q = 0$. Sous les hypothèses faites, Q est aussi nécessairement nul en dehors de Σ : il suffit pour l'établir d'observer que pour $\beta = 0$, $\gamma = u$ $(u = 1, 2, 3)$ (2.7) s'écrit :

(2.9) $$\nabla_0 Q_{u\mu} = \nabla_u Q_{0\mu}$$

et que, pour $\beta = 0$, (2.8) s'écrit :

(2.10) $$g^{00} \nabla_0 Q_{00} = -2g^{0u} \nabla_u Q_{00} - g^{uv} \nabla_u Q_{v0} \quad .$$

Si Σ a pour équation locale $x^0 = 0$, g^{00} est $\neq 0$ sur Σ et pour une donnée initiale nulle sur Σ, le système (2.9) (2.10) n'admet d'autre solution que la solution nulle.

Le résultat précédent est en particulier applicable au cas où :

$$T_{\alpha\beta} = -\lambda g_{\lambda\beta} \qquad U_{\alpha\beta} = \lambda g_{\lambda\beta} \qquad (\lambda = \mathrm{Cte}) \quad .$$

Les équations (2.5) se réduisent alors à :

(2.11) $$\nabla_\alpha R_{\beta\gamma,}{}^\alpha{}_\mu = 0 \quad .$$

Si sur Σ on a $R_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$, il en est encore de même en dehors de Σ.

c. Un champ gravitationnel sera donc décrit dans la suite par un tenseur d'ordre 4, $H_{\alpha\beta,\gamma\delta}$, jouissant des propriétés de symétrie

(2.12) $$H_{\alpha\beta,\gamma\delta} = -H_{\beta\alpha,\gamma\delta} = -H_{\alpha\beta,\delta\gamma} = H_{\gamma\delta,\alpha\beta} \quad .$$

Etant donné un tenseur conservatif T, le champ H est astreint à satisfaire les "vraies équations de champ"

(2.13) $$S\, \nabla_\alpha H_{\beta\gamma,\lambda\mu} = 0$$

et

(2.14) $$\nabla_\alpha H^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu} = \nabla_\gamma U_{\beta\mu} - \nabla_\mu U_{\beta\lambda} \quad ,$$

où U est le tenseur associé de T. On pourra ajouter la condition supplémentaire :

(2.15) $$H_{\alpha\beta} = U_{\alpha\beta} \quad ,$$

condition qu'il suffit de vérifier sur une hypersurface Σ orientée dans l'espace.

De plus, la variété étant de dimension 4 , le tenseur antisymétrique $SH_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ est à dérivée covariante nulle d'après (2.13). Ainsi :

$$SH_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \mu \, \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} \qquad (\mu = \mathrm{Cte})$$

où $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est le tenseur élément de volume. Si H est nul en un point, ou s'annule à l'infini, il vérifie nécessairement l'identité :

(2.16) $$\dot{S}H_{\alpha\beta,\gamma\delta} = 0 \quad .$$

II. Quantification à l'approximation linéaire.

3. Quantification du champ électromagnétique libre en relativité restreinte.

Nous allons indiquer un processus de quantification directe du champ électromagnétique libre en relativité restreinte, sans recours au potentiel-vecteur. Ce processus qui est étroitement lié à la notion de radiation électromagnétique peut être adapté à une quantification du champ gravitationnel à l'approximation linéaire.

a. Prenons pour espace-temps V_4 l'espace-temps de Minkowski que nous supposons rapporté à un repère orthonormé (e_α) . La métrique de V_4 rapportée à un tel repère sera désignée par :

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \, dx^\alpha \, dx^\beta \quad .$$

Considérons un champ électromagnétique libre, c'est-à-dire satisfaisant aux équations de Maxwell

(3.1) $$S\partial_\alpha F_{\beta\gamma} = 0 \qquad \partial_\alpha F^\alpha{}_\beta = 0$$

où ∂ désigne ici la dérivation ordinaire. Sous des hypothèses simples (distributions tempérées), F est une transformée de Fourier d'une distribution N et (3.1) s'écrit :

(3.2) $$Sp_\alpha N_{\beta\gamma} = 0 \qquad p^\alpha N_{\alpha\beta} = 0 \quad .$$

De l'étude de la radiation électromagnétique et de (3.2), il résulte que N est une 2-forme distribution portée par le cône isotrope dans l'espace des moments.

A la 2-forme distribution F , substituons une 2-forme désignée par la même notation, satisfaisant au même système (3.1) et correspondant à une fonctionnelle à valeurs dans un espace vectoriel M d'opérateurs de l'espace de Hilbert complexe. Par abus de langage, nous dirons que F au lieu d'être à valeurs scalaires est à valeurs dans M. Nous désignons par $*$ le passage d'un de ces opérateurs à l'opérateur adjoint et **nous supposons que les valeurs de F sont des <u>opérateurs hermitiens</u>.**

A partir du caractère hermitien, on peut établir que (avec l'abus de notation usuel chez les physiciens)

$$(3.3) \qquad F = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{C^+} (G e^{i\ell x} + G^* e^{-i\ell x})\, d\Omega(\ell)$$

où C^+ est le demi-cône isotrope positif et $d\Omega(\ell)$ l'élément d'aire invariant usuel sur ce cône :

$$d\Omega(\ell) = \frac{d\ell^1\, d\ell^2\, d\ell^3}{\ell^0} \quad .$$

Le système (3.1) se traduit par :

$$(3.4) \qquad S\ell_\alpha G_{\beta\gamma} = 0 \qquad \ell^\alpha G_{\alpha\beta} = 0 \quad .$$

Supposons que G soit une 2-forme à valeurs scalaires satisfaisant (3.4). Ces relations expriment que la 2-forme G est singulière. A chaque $\ell \in C^+$ associons deux vecteurs orthogonaux, de carrés -1, $n^{(1)}(\ell)$ et $n^{(2)}(\ell)$, tangents au cône isotrope le long de ℓ. On sait que, dans ces conditions, il existe deux scalaires $a(i, \ell)$ $(i = 1, 2)$ tels que :

$$(3.5) \qquad G_{\alpha\beta} = \sum_i a(i, \ell)(\ell_\alpha n_\beta^{(i)} - \ell_\beta n_\alpha^{(i)}) \quad .$$

(3.5) traduit ce que les physiciens appellent le double état de polarisation du champ. Par l'introduction d'une forme linéaire sur M à valeurs scalaires, on voit que si G est à valeurs dans M et satisfait (3.4) la formule (3.5) est encore valable à condition de prendre pour les $a(i, \ell)$ des éléments de M.

La quantification du champ F s'effectuera en postulant les conditions de crochet :

$$(3.6) \qquad \begin{cases} [a(i, \ell), a(j, \ell')] = 0 \\ [a^*(i, \ell), a(j, \ell')] = \frac{h}{i} \delta_{ij}\, \delta_\Omega(\ell, \ell') \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2)$$

ou $\ell, \ell' \in C^+$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker et où δ_Ω est le biscalaire de Dirac relatif au cône isotrope muni de l'élément de volume $d\Omega$. On peut obtenir un formalisme plus condensé en introduisant des indices A , B prenant les valeurs + 1 et - 1 et en posant :

$$a^A(i , \ell) = a(i , \ell) \quad \text{pour } A = 1 , \qquad a^A(i , \ell) = a^*(i , \ell) \quad \text{pour } A = - 1 .$$

Avec ces notations, les conditions (3.6) s'écrivent :

$$(3.7) \qquad [a^{-A}(i , \ell) , a^B(j , \ell')] = \frac{\hbar}{i} A\delta_{AB} \, \delta_{ij} \, \delta_{\Omega}(\ell , \ell') .$$

b. Dans le calcul des relations de commutation auxquelles satisfait, en vertu de (3.7), le champ F , nous utilisons la formule géométrique suivante qu'il est aisé d'établir :

$$(3.8) \qquad \sum_{i,j} \delta_{ij}(\ell_\alpha \, n_\beta^{(i)} - \ell_\beta \, n_\alpha^{(i)})(\ell_\lambda \, n_\mu^{(j)} - \ell_\mu n_\lambda^{(j)}) =$$

$$- (\eta_{\alpha\lambda} \ell_\beta \ell_\mu + \eta_{\beta\mu} \ell_\alpha \ell_\lambda - \eta_{\alpha\mu} \ell_\beta \ell_\lambda - \eta_{\beta\lambda} \ell_\alpha \ell_\mu) .$$

Etant données des quantités à 4 indices $L_{\alpha\lambda,\beta\gamma}$ nous poserons dans la suite :

$$\hat{\sum_{\alpha\beta\lambda\mu}} L_{\alpha\lambda,\beta\mu} = L_{\alpha\lambda,\beta\mu} + L_{\beta\mu,\alpha\lambda} - L_{\alpha\mu,\beta\lambda} - L_{\beta\lambda,\alpha\mu}$$

de telle sorte que :

$$\sum_{i,j} \delta_{ij}(\ell_\alpha \, n_\beta^{(i)} - \ell_\beta \, n_\alpha^{(i)})(\ell_\lambda \, n_\mu^{(j)} - \ell_\mu \, n_\lambda^{(j)}) = - \hat{\sum} \eta_{\alpha\lambda} \ell_\beta \ell_\mu .$$

Cela posé, on a, d'après (3.3) et (3.5) :

$$(3.9) \qquad F = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{A,i} \int_{C^+} a^A(i , \ell) \, e^{iA\ell x}(\ell \wedge n^{(i)}) \, d\Omega(\ell) .$$

De (3.7) on déduit, avec l'aide de (3.8), une expression du bi-2-tenseur [F(x) , F(x')] rapporté au repère unique (e_α) . Dans cette expression apparaît la distribution scalaire :

$$D(x) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \sum_A \int_{C^+} A e^{-iA\ell \cdot x} \, d\Omega(\ell) ,$$

ou plutôt le biscalaire distribution :

$$D(x , x') = D(x - x')$$

D(x , x') ou <u>propagateur de Jordan-Pauli</u> est antisymétrique en x , x' , a pour chaque x' son support sur le cône isotrope issu de ce point et satisfait l'équation

$$\Delta_x D(x , x') = 0$$

où Δ est l'opérateur défini en repères mobiles arbitraires par $\Delta = - \nabla^{\rho} \nabla_{\rho}$.
A partir de $D(x , x')$, on obtient :

(3.10) $$[F_{\alpha\beta}(x) , F_{\lambda\mu}(x')] = \frac{\hbar}{i}(\hat{\Sigma} \eta_{\alpha\beta} \partial_{\beta} \partial_{\mu}) D(x , x')$$

où les dérivations ont lieu par rapport au point x . Dans (3.10) nous retrouvons la relation de commutation classique de la théorie quantique du champ électromagnétique.

c. Supposons qu'à chaque point x d'un voisinage U de V_4 nous associons un repère arbitraire $e_{\alpha}(x)$. Procédons de même pour un second voisinage U' ; nous obtenons les repères $e_{\lambda'}(x')$. Si le champ est rapporté en x à (e_{α}) et en x' à $(e_{\lambda'})$, on obtient par changement de repères et en introduisant les dérivées par rapport à x' :

(3.11) $$[F_{\alpha\beta}(x) , F_{\lambda'\mu'}(x')] = -\frac{\hbar}{i}(\hat{\Sigma} (e_{\alpha} \cdot e_{\lambda'}) \nabla_{\beta} \nabla_{\mu'}) D(x , x') \quad .$$

Considérons le bi-1-tenseur symétrique t défini par $t_{\alpha\lambda'} = e_{\alpha} \cdot e_{\lambda'}$. Il est à dérivée covariante nulle en x et en x' et pour $x' = x$ se réduit au tenseur métrique. Si nous introduisons le bi-1-tenseur distribution

$$D^{(1)} = tD$$

(3.11) peut s'écrire sous la forme simple et invariante :

(3.12) $$[F(x) , F(x')] = -\frac{\hbar}{i} d_x d_{x'} D^{(1)}$$

où le second membre vérifie manifestement les équations de Maxwell.

4. Quantification du champ gravitationnel libre à l'approximation linéaire.

a. Supposons V_4 porté par un espace-temps minkowskien rapporté à un repère orthonormé pour la métrique minkowskienne. Si le champ de gravitation est faible, le tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ de V_4 peut s'écrire :

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \varepsilon \psi_{\alpha\beta} \quad ,$$

où ε est l'infiniment petit principal. Dans une région sans sources, la partie principale $H_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ du tenseur de courbure vérifie (2.12), (2.16) et satisfait les équations de champ :

(4.1) $$S\partial_{\alpha} H_{\beta\gamma,\lambda\mu} = 0$$

et

(4.2) $$\partial_{\alpha} H^{\alpha}{}_{\beta,\lambda\mu} = 0 \quad .$$

Pour les équations d'Einstein $R_{\alpha\beta}=0$, on a la condition supplémentaire :

(4.3) $$H_{\alpha\beta}=0 \quad .$$

La quantification du champ H peut s'effectuer par un procédé identique à celui employé pour le champ électromagnétique. Sous les mêms hypothèses et avec des notations évidentes

(4.4) $$H=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{C^+}(Ke^{i\ell x}+K^* e^{-i\ell x})\, d\,\Omega(\ell)$$

avec

(4.5) $$S\,\ell_\alpha K_{\beta\gamma,\lambda\mu}=0 \qquad \ell_\alpha K_{\alpha\beta,\lambda\mu}=0 \quad .$$

Il en résulte :

(4.6) $$K_{\alpha\beta,\gamma\delta}=\sum_{i,j} a(i\,,\,j\,,\,\ell)(\ell_\alpha\, n_\beta^{(i)}-\ell_\beta\, n_\alpha^{(i)})(\ell_\gamma\, n_\delta^{(i)}-\ell_\delta\, n_\gamma^{(j)})$$

$$\{a(i\,,\,j\,,\,\ell)=a(j\,,\,i\,,\,\ell)\}$$

Sur la forme quadratique de polarisation $a(i\,,\,j\,,\,\ell)$, (4.3) se traduit par la condition de trace :

(4.7) $$a(1\,,\,1\,,\,\ell)+a(2\,,\,2\,,\,\ell)=0 \quad .$$

Au moyen du formalismæ condensé introduit dans le cas électromagnétique, on écrira les conditions de crochet compatibles avec (4.7) sous la forme :

(4.8) $$[a^{-A}(i\,,\,j\,,\,\ell)\,,\,a^{B}(h\,,\,k\,,\,\ell')]$$

$$=\frac{\bar h}{i}\,A\delta_{AB}(\delta_{ih}\,\delta_{jh}+\delta_{ik}\,\delta_{jh}-\delta_{ij}\,\delta_{hk})\,\delta_\Omega(\ell\,,\,\ell') \quad .$$

De cette relation et de (4.4), il résulte :

(4.9) $$[H_{\alpha\beta,\gamma\delta}(x)\,,\,H_{\lambda\mu,\nu\rho}(x')]=\frac{\bar h}{i}\left\{\widehat{\sum_{\lambda\mu\nu\rho}}\partial_\nu\,\partial_\lambda\,\widehat{\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}}\partial_\gamma\,\partial_\alpha(\eta_{\beta\mu}\,\eta_{\delta\rho}+\eta_{\delta\mu}\,\eta_{\beta\rho})\right.$$

$$\left.-\widehat{\sum_{\lambda\mu\nu\rho}}(\eta_{\mu\rho}\,\partial_\nu\,\partial_\lambda)\widehat{\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}}(\eta_{\beta\delta}\,\partial_\gamma\,\partial_\alpha)\right\}\,D(x\,,\,x')$$

où les dérivations sont faites par rapport à x . Introduisons des repères mobiles arbitraires ; le premier terme du second membre donne :

$$\widehat{\sum_{\lambda'\mu'\nu'\rho'}}\nabla_{\nu'}\nabla_{\lambda'}\widehat{\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}}\nabla_\beta\,\nabla_\alpha\{(t_{\beta\mu'}\,t_{\delta\rho'}+t_{\delta\mu'}\,t_{\beta\rho'})\,D\} \quad .$$

Nous sommes ainsi conduits à introduire sur les tenseurs symétriques L d'ordre 2 l'opérateur Q défini par :

$$(4.10) \qquad Q_{\alpha\beta\gamma\delta}(L) = \widehat{\sum_{\alpha\beta\lambda\delta}} \bar{\nabla}_\gamma \bar{\nabla}_\alpha L_{\beta\delta}$$

et le bi-2-tenseur symétrique K défini par :

$$K_{\beta\delta,\mu'\rho'} = (t_{\beta\mu'} t_{\delta\rho'} + t_{\delta\mu'} t_{\beta\rho'}) D \quad .$$

Pour exprimer le second terme de (4.9), introduisons sur les scalaires φ l'opérateur P défini par :

$$P = Q(g\varphi)$$

où g est le tenseur métrique. Avec ces notations, (4.9) s'écrit sous la forme invariante :

$$(4.11) \qquad [H(x) , H(x')] = \frac{\hbar}{i} \left\{ Q_{x'} Q_x K(x , x') - P_{x'} P_x D(x , x') \right\} \quad .$$

Compte tenu de (4.7), la quantification précédente conduit à une représentation irréductible caractérisée par la masse 0 et le spin 2 . Le procédé beaucoup plus arbitraire employé par PAULI et FIERZ peut être justifié a posteriori par la comparaison des deux méthodes. DROZ-VINCENT et CAPPELLA ont adapté la méthode précédente à la quantification en première approximation de la théorie de Jordan-Thiry.

III. Propagateurs tensoriels et applications.

5. Le bitenseur de transport.

a. Sur une variété différentiable V_n munie d'une connexion linéaire, soit U un voisinage de x homéomorphe à une boule ouverte tel que tout $x' \in U$ puisse être joint à x par un arc géodésique et un seul dans U . Le transport le long de cet arc définit un isomorphisme canonique de l'espace vectoriel T_x , tangent en x sur l'espace vectoriel $T_{x'}$ tangent en x' . Cet isomorphisme définit un bi-1-tenseur t(x , x') élément de $T^*_x \otimes T_{x'}$ de composantes $t_\alpha^{\lambda'}(x , x')$; pour chaque x , t(x , x') est transporté relativement à x' le long de l'arc et :

$$(5.1) \qquad t_\alpha^{\lambda'}(x , x' = x) = \delta_\alpha^\lambda \qquad \nabla_{\rho'} t_\alpha^{\lambda'}(x , x' = x) = 0 \quad .$$

b. Si V_n est une variété riemannienne, nous définisson ainsi un bi-1-tenseur euclidien symétrique en x et x' , dont nous désignerons les composantes covariantes par $t_{\alpha\lambda'}$. Ce bi-1-tenseur coïncide en relativité restreinte avec celui que nous avons désigné par la même notation.

Si T est un tenseur d'ordre p à support compact, le bitenseur-distribution $\delta^{(p)}(x , x')$ tel que :

$$\langle \delta^{(p)}(x\ ,\ x')\ ,\ T(x) \rangle = T(x')$$

peut être représenté par la formule :

(5.2) $$\delta^{(p)} = (\overset{p}{\otimes}\ t)\ \delta$$

où δ est le biscalaire de Dirac relatif à l'élément de volume riemannien.

En munissant U de repères déduits d'un repère en x par transport le long des différents arcs géodésiques issus de x, on peut établir la formule importante :

(5.3) $$\nabla_\alpha \delta = - \nabla_{\lambda'}(t_\alpha^{\lambda'} \delta) \quad .$$

6. Opérateurs différentiels linéaires sur les tenseurs.

a. Sur la variété riemannienne V_n, considérons l'opérateur différentiel linéaire sur les tenseurs d'ordre p défini par :

$$(\bar{\Delta} T)_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = - \nabla^\rho \nabla_\rho T_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = - g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \nabla_\sigma T_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \quad .$$

Donnons-nous un champ B d'applications linéaires de tenseurs d'ordre $(p + 1)$ dans les tenseurs d'ordre p en x et un champ C d'opérateurs en x sur les tenseurs d'ordre p. Introduisons l'opérateur différentiel L défini par :

(6.1) $$LT = \bar{\Delta} T + B^\rho \nabla_\rho T + CT \qquad (T \text{ tenseur d'ordre } p) \quad .$$

L'opérateur transposé L^* de L peut s'écrire :

(6.2) $$L^* U = \bar{\Delta} U - \nabla_\rho (B^{*\rho} U) + C^* U$$

où $*$ indique le passage aux transposés. Si $B^\rho = 0$, $C = C^*$, L est auto-adjoint.

b. Sur les p-formes T, Georges de RHAM a introduit le laplacien :

(6.3) $$\Delta T = (d\delta + \delta d)\ T \quad .$$

Cet opérateur peut s'écrire explicitement :

(6.4) $$(\Delta T)_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = (\bar{\Delta} T)_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} + \sum_k R_{\alpha_k \mu} T_{\alpha_1 \ldots}{}^{\mu}{}_{\ldots \alpha_p} - \sum_{k \neq l} R_{\alpha_k \rho, \alpha_l \sigma} T_{\alpha_1 \ldots}{}^{\rho}{}_{\ldots}{}^{\sigma}{}_{\ldots \alpha_p} \quad .$$

Pour tout tenseur T, antisymétrique ou non, nous appellerons <u>laplacien de</u> T et désignerons par ΔT le tenseur défini par (6.4). Cet opérateur est <u>auto-adjoint</u>. En ce qui concerne un tenseur symétrique d'ordre 2 :

(6.5) $$(\Delta T)_{\alpha\beta} = - \nabla^{\rho} \nabla_{\rho} T_{\alpha\beta} + R_{\alpha}{}^{\rho} T_{\rho\beta} + R_{\beta}{}^{\rho} T_{\alpha\rho} - 2R_{\alpha\rho,\beta\sigma} T^{\rho\sigma} \quad .$$

Si T présente une symétrie ou antisymétrie par rapport à un couple d'indices, il en est de même pour ΔT .

7. Propagateurs associés aux opérateurs auto-adjoints sur les tenseurs.

a. Soit V_{2n} une variété riemannienne de dimension paire dont la métrique est de type hyperbolique normal. Si $\Gamma^{+}_{x'}$ et $\Gamma^{-}_{x'}$ sont les deux demi-conoïdes caractéristiques en x' , il existe pour une boule ouverte U deux solutions élémentaires locales $E^{(p)\pm}_{x'}(x)$ de L , c'est-à-dire pour chaque x' deux systèmes de distributions dans U à support respectivement dans et sur $\Gamma^{+}_{x'}$ ou dans et sur $\Gamma^{-}_{x'}$ vérifiant

(7.1) $$L^{*}_{x} E^{(p)\pm}_{x'}(x) = \delta^{(p)}_{x'}(x) \quad .$$

De l'unicité des deux solutions élémentaires définies et du caractère tensoriel en x' du second membre de (7.1), il résulte que $E^{(p)\pm}_{x'}(x)$ est un tenseur en x' . Il en résulte l'existence dans $U \times U$ de deux noyaux élémentaires $E^{(p)\pm}(x' , x)$ qui sont des bitenseurs-distributions. On a enfin le théorème d'unicité suivant : tout tenseur distribution dans U qui est solution de l'équation homogène $LT = 0$ et dont le support est dans et sur un demi-conoïde caractéristique $\Gamma^{+}_{x'}$ (ou $\Gamma^{-}_{x'}$) est nécessairement nul.

b. Supposons L auto-adjoint. S'il en est ainsi, on a par un raisonnement classique :

$$E^{(p)+}(x , x') = E^{(p)-}(x' , x) \quad .$$

Nous appelons propagateur associé à l'opérateur auto-adjoint L , le bi-p-tenseur distribution défini par :

(7.2) $$E^{(p)}(x , x') = E^{(p)+}(x' , x) - E^{(p)-}(x' , x)$$

$E^{(p)}$ est antisymétrique en x , x' ; pour chaque x' il a son support dans et sur le conoïde caractéristique $\Gamma_{x'}$, et il vérifie l'équation homogène :

(7.3) $$L_{x} E^{(p)}(x' , x) = 0 \quad .$$

On montre aisément que pour l'espace-temps de la relativité restreinte :

(7.4) $$E^{(p)} = (\overset{p}{\otimes} t) D \quad .$$

8. Propagateurs antisymétriques associés à l'opérateur $(\Delta + c)$ sur les formes.

L'opérateur auto-adjoint $(\Delta + c)$ où c est un scalaire covariant, opère sur les p-formes. En antisymétrisant les noyaux élémentaires correspondants, on obtient deux noyaux $G^{(p)\pm}(x', x)$ qui pour chaque x' ont leurs supports respectivement dans et sur $\Gamma^+_{x'}$, ou $\Gamma^-_{x'}$, et qui vérifient :

$$(\Delta_x + c)\, G^{(p)\pm}(x', x) = (\overset{p}{\Lambda} t)\, \delta \quad .$$

Nous appelons <u>propagateur antisymétrique</u> relatif à $(\Delta + c)$ la différence :

$$G^{(p)}(x, x') = G^{(p)+}(x', x) - G^{(p)-}(x', x)$$

qui jouit des trois propriétés des propagateurs.

$G^{(p)\pm}$ et $G^{(p)}$ vérifient des relations différentielles importantes que nous allons former. Les opérateurs Δ_x et δ_x permutant

$$(\Delta_x + c)\, \delta_x\, G^{(p)\pm}(x', x) = \delta_x(\overset{p}{\Lambda} t\delta) \quad .$$

D'autre part Δ_x et $d_{x'}$ permutant :

$$(\Delta_x + c)\, d_{x'}\, G^{(p-1)\pm}(x', x) = d_{x'}(\overset{p-1}{\Lambda} t\delta) \quad .$$

Or, il résulte immédiatement de (5.3) que :

$$\delta_x(\overset{p}{\Lambda} t\delta) = d_{x'}(\overset{p-1}{\Lambda} t\delta) \qquad (p = 1, \ldots, n) \quad .$$

On en déduit par soustraction

$$(\Delta_x + c)(\delta_x\, G^{(p)\pm} - d_{x'}\, G^{(p-1)\pm}) = 0 \quad .$$

Du théorème d'unicité, il résulte :

$$\delta_x\, G^{(p)\pm} = d_{x'}\, G^{(p-1)\pm} \quad .$$

Les propagateurs antisymétriques des différents ordres satisfont aussi aux relations

$$\delta_x\, G^{(p)} = d_{x'}\, G^{(p-1)} \qquad (p = 1, \ldots, n) \quad . \tag{8.1}$$

9. <u>Propagateur symétrique attaché à l'opérateur</u> $(\Delta + c)$.

Supposons que $(\Delta + c)$ opère sur un tenseur symétrique d'ordre 2 . Par symétrisation des noyaux élémentaires, on obtient deux noyaux $K^{\pm}(x', x)$ qui sont deux bi-2-tenseurs distributions symétriques satisfaisant :

$$(\Delta_x + c)\, K^{\pm}_{\alpha\beta, \lambda'\mu'} = (t_{\alpha\lambda'}\, t_{\beta\mu'} + t_{\alpha\mu'}\, t_{\beta\lambda'})\, \delta \quad . \tag{9.1}$$

Leur différence définira le <u>propagateur symétrique</u> K d'ordre 2 . Posons

$K_{\lambda'\mu'} = g^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta,\lambda'\mu'}$. Par un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent, on établira les relations :

(9.2) $$K_{\lambda'\mu'} = 2g_{\lambda'\mu'} \; G^{(0)}$$

et <u>si le tenseur de Ricci est à dérivée covariante nulle</u>

(9.3) $$\nabla^{\mu'} K_{\alpha\beta,\lambda'\mu'} = -\left(\nabla_\alpha \; G^{(1)}_{\beta\lambda'} + \nabla_\beta \; G^{(1)}_{\alpha\lambda'}\right)$$

où $G^{(0)}$ et $G^{(1)}$ sont les propagateurs d'ordre 0 et 1 relatifs à $(\Delta + c)$.

10. <u>Quantification du champ électromagnétique libre en relativité générale.</u>

Dans un espace-temps V_4 de métrique <u>donnée</u> quelconque, considérons un champ électromagnétique F satisfaisant aux équations de Maxwell du vide. Nous nous proposons de quantifier ce champ, c'est-à-dire pour évaluer le crochet $[F(x) , F(x')]$ de construire une bi-2-forme distribution X antisymétrique en x , x' , qui pour chaque x' ait son support dans et sur le conoïde caractéristique $\Gamma_{x'}$ et qui satisfasse :

(10.1) $$d_x X = 0 \qquad \delta_x X = 0 \quad .$$

Si nous voulons sortir du cas purement local, nous supposerons que V_4 est <u>globalement hyperbolique</u> au sens de LERAY.

L'étude faite en relativité restreinte nous conduit à considérer ici la bi-2-forme distribution

(10.2) $$X = d_x \, d_{x'} \; G^{(1)}$$

où $G^{(1)}$ est le propagateur d'ordre 1 associé à Δ ; X est manifestement antisymétrique et satisfait à la condition de support. De plus

(10.3) $$X = d_x \, \delta_x \; G^{(2)} = \Delta_x \; G^{(2)} - \delta_x \, d_x \; G^{(2)} = - \delta_x \, d_x \; G^{(2)}$$

où $G^{(2)}$ est le propagateur antisymétrique d'ordre 2 . Des expressions (10.2) et (10.3) il résulte que X satisfait (10.1). Ainsi la relation

(10.4) $$\boxed{[F(x) , F(x')] = - \frac{\hbar}{i} \, d_x \, d_{x'} \; G^{(1)}(x , x')}$$

nous fournit une quantification rigoureuse du champ éléctromagnétique libre en relativité générale.

11. Le problème de la quantification du champ gravitationnel.

a. Sur un espace-temps V_4 de métrique donnée satisfaisant aux équations d'Einstein

$$R_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$$

nous décrivons le champ à quantifier au moyen d'un 4-tenseur H jouissant des propriétés de symétrie du tenseur de courbure, vérifiant l'identité

(11.1) $$S H_{\alpha\beta,\gamma\delta} = 0$$

et satisfaisant aux équations de champ analogues aux équations de Maxwell

(11.2) $$\underset{\gamma\delta\varepsilon}{S} \nabla_\varepsilon H_{\alpha\beta,\gamma\delta} = 0$$

et

(11.3) $$\nabla_\alpha H^\alpha{}_{\beta,\gamma\delta} = 0$$

avec la condition supplémentaire $H_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$. Quantifier la champ H, c'est construire un bi-4-tenseur distribution, antisymétrique en x, x', qui pour chaque x' a un support dans $\Gamma_{x'}$ et qui permet d'évaluer le crochet $[H(x), H(x')]$ de manière compatible avec (11.2), (11.3) et la condition supplémentaire.

b. L'étude faite à l'approximation linéaire nous conduit à envisager l'opérateur Q sur les tenseurs symétriques :

$$Q_{\alpha\beta,\gamma\delta}(L) = \widehat{\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}} \nabla_\gamma \nabla_\alpha L_{\beta\delta} \quad .$$

En général, cet opérateur n'est pas symétrique par rapport aux couples et ne vérifie pas (11.1). Au contraire, il résulte de l'identité de Ricci que l'opérateur $\bar{Q}$ défini par :

(11.4) $$\bar{Q}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(L) = Q_{\alpha\beta,\gamma\delta}(L) + R_{\alpha\beta,\delta}{}^\rho L_{\rho\gamma} - R_{\alpha\beta,\gamma}{}^\rho L_{\rho\delta}$$

satisfait aus identités désirées.

Considérons un tenseur symétrique $M(v)$ défini par $M_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha$, où v est une forme linéaire arbitraire. On montre que :

(11.5) $$\begin{aligned}\bar{Q}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(M) = &- 2 \nabla^\rho R_{\alpha\beta,\gamma\delta} v_\rho - R^\rho{}_{\beta,\gamma\delta}(\nabla_\alpha v_\rho - \nabla_\rho v_\alpha) \\ &- R_{\alpha,\gamma\delta}{}^\rho(\nabla_\beta v_\rho - \nabla_\rho v_\alpha) - R_{\alpha\beta,\delta}{}^\rho(\nabla_\gamma v_\rho - \nabla_\rho v_\gamma) \\ &- R_{\alpha\beta,\gamma}{}^\rho(\nabla_\delta v_\rho - \nabla_\rho v_\delta) \quad .\end{aligned}$$

c. En ce qui concerne les opérateurs figurant dans (11.2) et (11.3) on a :

(11.6) $$\underset{\gamma\delta\varepsilon}{S} \nabla_\varepsilon \bar{Q}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(L) = - S \nabla^\rho R_{\alpha\beta,\gamma\delta} L_{\rho\varepsilon} - SR^\rho{}_{\beta,\gamma\delta}(\nabla_\alpha L_{\rho\varepsilon} - \nabla_\rho L_{\alpha\varepsilon})$$
$$- SR_\alpha{}^\rho{}_{,\gamma\delta}(\nabla_\beta L_{\rho\varepsilon} - \nabla_\rho L_{\beta\varepsilon}) + SR^\rho{}_{\varepsilon,\alpha\beta}(\nabla_\gamma L_{\rho\delta} - \nabla_\delta L_{\rho\gamma})$$

et

(11.7) $$\nabla_\alpha \bar{Q}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(L) \simeq - \nabla_\gamma R_\beta{}^\rho{}_{,\delta}{}^\tau L_{\rho\delta} + \nabla_\delta \nabla_\beta \nabla^\alpha L_{\alpha\gamma} - \nabla_\gamma \Delta L_{\beta\delta}$$
$$+ 2\lambda \nabla_\gamma L_{\beta\delta} - R_\beta{}^\rho{}_{,\gamma}{}^\sigma(\nabla_\sigma L_{\rho\delta} - \nabla_\delta L_{\rho\sigma}) - R_\gamma{}^\rho{}_{,\delta}{}^\sigma \nabla_\rho L_{\beta\sigma}$$

modulo les termes obtenus par échange de γ et δ et soustraction.

12. Cas d'un espace à courbure constante.

Si V_4 est un espace à courbure constante

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta} = k(g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) \qquad (\lambda = 3k) \quad .$$

De (11.5) et (11.6) il résulte que, quel que soit $M(v)$:

(12.1) $$\bar{Q}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(M) = 0$$

et quel que soit L :

(12.2) $$\underset{\gamma\delta\varepsilon}{S} \nabla_\varepsilon \bar{Q}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(L) = 0 \quad .$$

Introduisons l'opérateur sur les scalaires φ défini par :

$$\bar{P}(\varphi) = \bar{Q}(g\varphi)$$

et considérons le double-4-tenseur distribution :

(12.3) $$X = \bar{Q}_{x'} \bar{Q}_x(K - gg' G^{(0)}) = \bar{Q}_{x'} \bar{Q}_x(K) - \bar{P}_{x'} \bar{P}_x(G^{(0)})$$

ou $G^{(0)}$ et K sont respectivement les propagateurs scalaire et symétrique d'ordre 2 relatifs à l'opérateur $\Delta - 6k = \Delta - 2\lambda$. De (12.2) il résulte que X vérifie (11.2) ; (11.7) se réduit pour K à :

$$\nabla^\alpha \bar{Q}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(K) \simeq (\nabla_\delta \nabla_\beta + kg_{\beta\delta}) \nabla^\alpha K_{\alpha\gamma,\lambda'\mu'} - 2kg_{\beta\delta} g_{\lambda'\mu'} \nabla_\gamma G^{(0)}$$

compte-tenu de (9.2). D'autre part :

$$\nabla^\alpha \bar{P}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(G^{(0)}) \simeq - 2kg_{\beta\delta} \nabla_\gamma G^{(0)} \quad .$$

De (9.3) et (12.1) on déduit :

$$\bar{Q}_{x'} \cdot \nabla^{\alpha} \bar{Q}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(K) - \bar{P}_{x'} \cdot \nabla^{\alpha} \bar{P}_{\alpha\beta\gamma\delta}(G^{(0)}) = 0$$

et X vérifie (11.3) ; on a donc la condition de crochet (compatible aussi avec la condition supplémentaire)

(12.4) $$\boxed{[H(x) \, , \, H(x')] = \frac{\hbar}{i} \bar{Q}_{x'} \, \bar{Q}_{x}(K - gg' \, G^{(0)})}$$

qui fournit une quantification rigoureuse du champ gravitationnel pour un espace-temps de de SITTER par exemple.