Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

Yvonne Bruhat

Magnéto-hydrodynamique relativiste

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 3 (1959-1960), exp. n° 3, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1959-1960__3__A3_0>

6 février 1960

MAGNÉTO-HYDRODYNAMIQUE RELATIVISTE

par Mme Yvonne BRUHAT

1. Introduction.

Les équations des fluides chargés en relativité générale se composent :

1° des équations d'Einstein

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta} , \qquad S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \tag{1.1}$$

où $R_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci de la métrique d'espace-temps $g_{\alpha\beta}$ et $T_{\alpha\beta}$ le tenseur d'impulsion-énergie du schéma fluide chargé considéré ;

2° des conditions de conservation

$$\nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0 \quad ; \tag{1.2}$$

3° des équations de Maxwell

$$\oint \nabla_{\alpha} H_{\beta\gamma} = 0 \ , \text{ c'est-à-dire : } \quad \nabla_{\alpha} H^{*\alpha\beta} = 0 \tag{1.3}$$

($H^{*\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} H_{\gamma\delta}$, tenseur adjoint de $H_{\alpha\beta}$) et

$$\nabla_{\alpha} G^{\alpha\beta} = J^{\beta} \tag{1.4}$$

où $H_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta}$ sont respectivement les tenseurs champ magnétique-induction électrique et champ électrique-induction magnétique. J^{β} est le vecteur courant électrique. Dans un fluide électrique et magnétique parfait, de permittivité électrique ε et de perméabilité magnétique μ, les tenseurs $G_{\alpha\beta}$ et $H_{\alpha\beta}$ sont liés par l'intermédiaire de la vitesse unitaire u^{α}. Définissons les vecteurs quadridimensionnels champ éléctrique et champ magnétique par les relations (cf. [6])

$$e_{\alpha} = H_{\beta\alpha} u^{\beta} , \qquad h_{\alpha} = G^{*}_{\beta\alpha} u^{\beta}$$

les vecteurs induction électrique et induction magnétique étant :

$$d_{\alpha} = G_{\beta\alpha} u^{\beta} , \qquad b_{\alpha} = H^{*}_{\beta\alpha} u^{\beta}$$

les vecteurs $\vec{e}$, $\vec{h}$, $\vec{d}$, $\vec{b}$ sont orthogonaux (au sens de la métrique $g_{\alpha\beta}$) au vecteur vitesse u^{α} :

$$e_{\alpha} u^{\alpha} = h_{\alpha} u^{\alpha} = d_{\alpha} u^{\alpha} = b_{\alpha} u^{\alpha} = 0$$

et ont pour composantes dans un repère propre $(u^0 = 1 \ , \ u^i = 0)$ les valeurs des tenseurs électromagnétiques usuellement désignés par champs et inductions électrique et magnétique.

Dans la théorie de Maxwell, les vecteurs champ et inductions sont proportionnels

$$b_\alpha = H^*_{\beta\alpha} u^\beta = \mu G^*_{\beta\alpha} u^\beta = \mu h_\alpha$$

$$d_\alpha = G_{\beta\alpha} u^\beta = \varepsilon H_{\beta\alpha} u^\beta = \varepsilon e_\alpha \quad .$$

On déduit de ces relations (cf. [6])

$$H_{\gamma\alpha} = \mu G_{\gamma\alpha} - \frac{1 - \varepsilon\mu}{\mu}(H_{\beta\gamma} u^\beta u_\alpha - G_{\beta\alpha} u^\beta u_\gamma) \quad .$$

REMARQUE. - Les conditions de conservation (1.2), jointes aux équations de Maxwell donnent les équations des fluides chargés en relativité restreinte quand on prend pour métrique $g_{\alpha\beta}$ la métrique de Minkowski.

2. Le tenseur d'impulsion-énergie d'un fluide chargé.

C'est la somme du tenseur d'impulsion énergie $t_{\alpha\beta}$ du schéma fluide considéré en l'absence de champ électromagnétique, du tenseur de Maxwell $\tau_{\alpha\beta}$ et éventuellement d'un terme d'interaction dont la forme est discutée.

Pour un fluide parfait de densité ρ , pression p , et vitesse unitaire u_α on a :

$$t_{\alpha\beta} = (\rho + p)\, u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} \quad .$$

Le tenseur de Maxwell, dans un milieu où champs et inductions sont confondus, a pour expression en fonction du tenseur antisymétrique champ électromagnétique $F_{\alpha\beta}$ (on a alors : $G_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}$)

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta}(F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu}) - F_\alpha^{\ \lambda} F_{\beta\lambda} \quad .$$

Dans un milieu où la permittivité électrique ε et la perméabilité magnétique μ ne sont pas égales à 1 , nous appellerons tenseur de Maxwell le tenseur non symétrique :

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta}(G^{\lambda\mu} H_{\lambda\mu}) - G_\alpha^{\ \rho} H_{\rho\beta} \quad ,$$

la divergence de ce tenseur, compte-tenu des équations de Maxwell est en effet :

$$\nabla_\alpha \tau_{\alpha\beta} = J_\lambda H^{\beta\lambda} + \frac{g^{\alpha\beta}}{4}(H^{\rho\sigma} \nabla_\alpha G_{\rho\sigma} - G_{\rho\sigma} \nabla_\alpha H^{\rho\sigma})$$

$J_\lambda H^{\beta\lambda}$ est le quadrivecteur force de Lorentz classique : les trois composantes d'espace sont de la forme $\delta E_i + (\vec{j} \wedge \vec{B})_i$ où δ est la charge apparente,

$\vec{j}$ le courant et $\vec{B}$ le vecteur induction, donné par les composantes d'espace du tenseur $H^{\alpha\beta}$, la composante $J^\lambda H_{\lambda 0} = \vec{j}.\vec{E}$ représente le travail des forces électromagnétiques. Le terme supplémentaire $H^{\rho\sigma} \nabla_\alpha G_{\rho\sigma} - G_{\rho\sigma} \nabla_\alpha H^{\rho\sigma}$ est nul (avec $\varepsilon\mu \neq 1$) si les lignes de courant sont des géodésiques de l'espace orthogonales à une famille d'hypersurfaces entre lesquelles elles définissent une correspondance isométrique (c'est-à-dire si le mouvement est statique au sens de la relativité générale).

Pour pouvoir écrire les équations des fluides chargés dans le cadre de la relativité générale, le tenseur $\tau_{\alpha\beta}$ doit être symétrique : il faut ajouter au tenseur $\tau_{\alpha\beta}$ un tenseur "d'interaction" $\tau'_{\alpha\beta}$ tel que $\tau_{\alpha\beta} + \tau'_{\alpha\beta}$ soit symétrique ceci peut être fait de diverses façons. Une autre solution serait de prendre pour le premier membre des équations d'Einstein une quantité non symétrique. On pourrait penser rejoindre ainsi une interprétation des théories "unitaires", proposée par COSTA de BEAUREGARD et SCIAMA. Toutefois, les identités de conservation de ces théories portant essentiellement sur les quantités symétriques, il ne semble pas possible de les utiliser directement.

Dans le cas dont nous allons nous occuper (fluides de conductivité infinie) le tenseur $\tau_{\alpha\beta}$ lui-même sera symétrique et nous pourrons nous placer dans le cadre de la relativité générale sans terme d'interaction.

3. Expression du tenseur de Maxwell en fonction des champs.

Etant données les définitions des vecteurs $\vec{e}$, $\vec{h}$, $\vec{d}$, $\vec{b}$ le tenseur $\tau_{\alpha\beta}$

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta}(G^{\rho\sigma} H_{\rho\sigma}) - G^{\rho}_{\alpha} H_{\rho\beta}$$

s'exprime en fonction de ces vecteurs et de u_α par

$$\tau_{\alpha\beta} = -(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta})(e_\rho d^\rho + h_\rho b^\rho) - e_\alpha d_\beta - h_\alpha b_\beta - (v_\alpha u_\beta + V_\beta u_\alpha)$$

où

$$v_\alpha = \eta_{\alpha\mu\nu\rho} e^\mu b^\nu u^\rho$$

$$V_\beta = \eta_{\beta\mu\nu\rho} d^\mu h^\nu u^\rho \quad .$$

Ce tenseur n'est en général pas symétrique, même avec des inductions proportionnelles aux champs.

4. Fluides de conductivité infinie.

Le vecteur courant J^β est en général la somme d'un courant de convection γu^β (γ la charge apparente propre) et d'un courant de conduction σe^β

(σ conductivité)

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = J^\beta = \chi u^\beta + \sigma e^\beta$$

dans un fluide de conductivité infinie le champ électrique $\vec{e}$ est nul et l'équation de Maxwell (1.4) est à remplacer par :

(4.1) $$e^\beta = u_\alpha H^{\alpha\beta} = 0 \quad .$$

Les tenseurs $H_{\gamma\lambda}$ et $G_{\gamma\lambda}$ sont alors proportionnels

$$H_{\gamma\lambda} = \mu G_{\gamma\lambda} \quad .$$

On a d'ailleurs (en prenant $\vec{d} = 0$, $\vec{b} = \mu\vec{h}$)

(4.2) $$\tau_{\alpha\beta} = (u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}) \mu|h|^2 - h_\alpha h_\beta$$

on a posé : $-h^\lambda h_\lambda = |h|^2 \geqslant 0$.

On montre d'autre part que $H^*_{\alpha\beta}$ s'exprime en fonction du champ $\vec{h}$ par :

(4.3) $$H^*_{\alpha\beta} = \mu(h^\beta u^\alpha - h^\alpha u^\beta)$$

le premier groupe des équations de Maxwell (1.3) s'écrit donc :

(4.4) $$\nabla_\alpha (h^\beta u^\alpha - h^\alpha u^\beta) = 0 \quad .$$

La force de Lorentz $\nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta}$ est

$$\nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} = (u^\alpha u^\beta - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}) \mu\partial_\alpha|h|^2 + \mu|h|^2 \nabla_\alpha (u^\alpha u^\beta) - \mu \nabla_\alpha(h^\alpha h^\beta) \quad .$$

C'est un vecteur arthogonal à la vitesse u^α et au champ magnétique h^α : compte-tenu de (4.4) on a :

$$u_\beta \nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} = 0 \qquad \text{et} \quad h_\beta \nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} = 0 \quad .$$

5. Equation de continuité, équations du mouvement.

Les conditions de conservation $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ donnent, pour un fluide parfait chargé, l'équation de continuité par la combinaison $u_\beta \nabla_\alpha T^{\alpha\beta}$

$$u_\beta \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = u_\beta \nabla_\alpha \left\{(\rho + p) u^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta}\right\} = 0$$

qui donne la même équation de continuité que pour les fluides non chargés :

(5.1) $$\nabla_\alpha((\rho + p) u^\alpha) - u^\alpha \partial_\alpha p = 0 \quad .$$

Compte-tenu de cette équation, les équations du mouvement $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta}$ s'écrivent :

(5.2) $$(\rho + p) u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta + (u^\alpha u^\beta - g^{\alpha\beta}) \partial_\alpha p + \nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} = 0 \quad .$$

Les équations de la mécanique des fluides chargés de conductivité infinie se compose des équations (5.1), (5.2) et (4.4), et des équations d'Einstein (1.1).

Si l'on néglige les phénomènes de gravitation, on n'a à tenir compte que des équations (5.1), (5.2), (4.4) où la métrique ds^2 est celle de la relativité restreinte (mais n'a pas forcément, dans un repère quelconque, la forme de Minkowski).

6. Problème de Cauchy.

Supposons connues à un instant donné (c'est-à-dire sur une variété initiale S orientée dans l'espace) les quantités u^α, h^α, p ainsi que les potentiels $g_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées premières. Le fluide est supposé admettre une équation d'état $\rho = \rho(p)$. Un raisonnement classique pour les équations d'Einstein montre que les dérivées secondes de $g_{\alpha\beta}$ sont alors déterminées, à un changement de coordonnées près. Pour étudier la détermination des dérivées des u^α, h^α, p, nous prendrons, en un point de S, un repère lorentzien ($g^{00} = 1$, $g_{ij} = -\delta_{ij}$, $g_{io} = 0$) particulier dont nous définirons ainsi les axes $\vec{e}_\alpha$:

$\vec{e}_0$ est orthogonal à S,
$\vec{e}_2$ est orthogonal au 3-plan $\vec{e}_0$, $\vec{u}$, $\vec{h}$,
$\vec{e}_3$ est orthogonal à $\vec{e}_0$ et dans le 2-plan $\vec{u}$, $\vec{h}$,
$\vec{e}_1$ est orthogonal à $\vec{e}_0$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$,
$\vec{e}_2$ étant orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{h}$, on a :

$$u^2 = h^2 = 0 \quad .$$

Le vecteur $\vec{e}_3$ est d'autre part une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{h}$: $\vec{e}_3 = \lambda u + \mu \vec{h}$; les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{h}$ se projettent donc sur le 3-plan $\vec{e}_0$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ suivant des vecteurs colinéaires ; on a :

$$u^0 = ku^1 , \qquad h^0 = kh^1 \quad .$$

Dans le repère mobile envisagé, les dérivées ∂_i d'une quantité quelconque ne dépendent que des valeurs sur S de cette quantité. Cherchons à déterminer les dérivées ∂_0 des composantes de $\vec{h}$ et $\vec{u}$ sur S au point M : les équations (4.4), (5.1) et (5.2) s'écrivent, en désignant par $f(d.C.)$ une fonction des données de Cauchy

(1) $$\partial_0(h^\beta u^0 - h^0 u^\beta) = f(d.\ C.)$$

(2) $$\partial_0((\rho + p)\, u^0) - u^0\, \partial_0\, p = f(d.\ C.)$$

$$(3) \qquad (\rho + p)\, u^0\, \partial_0\, u^\beta + (u^0\, u^\beta - g^{0\beta})\, \partial_0\, p + (u^0\, u^\beta - \tfrac{1}{2}\, g^{0\beta})\, \mu \partial_0 |h|^2$$
$$+ \mu |h|^2\, \partial_0 (u^0\, u^\beta) - \mu \partial_0 (h^0\, h^\beta) = f(d.\ C.) \qquad .$$

7. Ondes d'Alfven.

Les équations (1) et (3) s'écrivent pour $\beta = 2$ (compte-tenu de $u^2 = h^2 = 0$ en M) ;

$$u^0\, \partial_0\, h^2 - h^0\, \partial_0\, u^2 = f(d.\ C.)$$
$$(\rho + p + \mu |h|^2)\, u^0\, \partial_0\, u^2 - \mu h^0\, \partial_0\, h^2 = f(d.\ C.) \qquad .$$

On tire donc de ces équations $\partial_0\, u^2$ et $\partial_0\, h^2$, sauf dans le cas exceptionnel :

$$(7.1) \qquad (u^0)^2\, (\rho + p + \mu |h|^2) - \mu (h^0)^2 = 0 \qquad .$$

Si la variété initiale S a pour équation $f = Cte$ en coordonnées curvilignes quelconques, l'équation (7.1) devient (on pose $\rho + p = r$) :

$$(u^\alpha\, \partial_\alpha\, f)^2\, (r + \mu |h|^2) - \mu (h^\alpha\, \partial_\alpha\, f)^2 = 0 \qquad .$$

Les surfaces solution de cette équation, surfaces caractéristiques pour le système des équations des fluides chargés, sont les ondes d'Alfven. Elles sont en un quelconque de leurs points tangentes au cône dual du cône C_A d'équation

$$(u^\alpha\, X_\alpha)^2\, (r + \mu |h|^2) - \mu (h^\alpha\, X_\alpha)^2 = 0$$

qui se décompose en deux plans orientés dans l'espace. Les cônes duals sont donc des droites orientées dans le temps : les ondes d'Alfven sont les surfaces dont le plan tangent en un point passe par une des droites précédentes.

8. Vitesse de propagation.

La vitesse de propagation d'une onde en un point, par rapport à un repère lorentzien est la pente spatio-temporelle dans ce repère de son plan tangent en ce point ; c'est donc l'inverse de la pente spatio-temporelle de la génératrice du cône dual du cône d'ondes normale au plan d'onde envisagé. Remarquons que cette génératrice a même projection sur l'espace (le 3-plan $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$) que la ligne de plus grande pente du plan d'onde : cette direction spatiale est appelée direction de propagation.

Dans un repère propre, l'équation du plan C_A est

$$(X_0)^2\, (r + \mu |h|^2) - \mu (h^i\, X_i)^2 = 0$$

la pente de la génératrice $X_2 = X_3 = 0$ de ce cône est :

$$\frac{X_0^2}{X_1^2} = \frac{r + \mu|h|^2}{\mu(h_1)^2}$$

h_1 est la projection de $\vec{h}$ dans la direction de propagation. Nous trouvons donc finalement pour vitesse de propagation des ondes d'Alfven

$$(v_A)^2 = \frac{\mu(h_n)^2}{r + \mu|h|^2}$$

où h_n est la projection de $\vec{h}$ sur la direction de propagation. Cette vitesse est toujours inférieure à 1 (vitesse de la lumière) : elle est équivalente, pour p et h d'ordre $1/C^2$ devant ρ à la vitesse d'Alfven de la mécanique non relativiste.

9. Ondes hydrodynamiques.

Posons, au voisinage du point M ,

$$u^1 = ku^0 \ , \qquad h^1 = k' \ h^0$$

dans le repère choisi on a, en M , $k = k'$.

L'équation (1) avec $\beta = 1$ donne :

$$h^0 \ u^0 \ \partial_0(k - k') = f(d.\ C.) \qquad ,$$

d'où l'on tire $\partial_0(k - k')$ en fonction des données de Cauchy si $u^0 \ h^0 \neq 0$.

Les quantités u^3 , h^3 peuvent être calculées en fonction des autres composantes de $\vec{u}$ et $\vec{h}$ à l'aide des relations :

$$u^\lambda \ u_\lambda = 1 \qquad \text{et} \quad h^\lambda \ u_\lambda = 0 \qquad .$$

Les dérivées ∂_0 restant à calculer sont alors celles des quantités u^0 , h^0 , k et p . On peut les tirer de l'équation avec $\beta = 3$ qui s'écrit, si l'on désigne par $f(d.\ C.\ c.)$ une fonction des données de Cauchy et des quantités précédemment calculées :

$$\partial_0\left(\frac{h^0}{u^3}\right) = f(d.\ C.\ c.)$$

et des équations (5.1) avec $\beta = 0$, $\beta = 1$ et $\beta = 3$. On peut remplacer cette dernière par :

$$\partial_0((\rho + p)\ u^0) - u^0\ \partial_0\ p = f(d.\ C.\ c.) \qquad .$$

Les équations (5.1) avec $\beta = 0$ et $\beta = 1$ s'écrivent :

$$\partial_0 \left\{ (\rho + p)(u^0)^2 - g^{00} p + ((u^0)^2 - \frac{g^{00}}{2})(\frac{h^0}{u^3})^2(1 + k^2) - (h^0)^2 \right\} = f(d.\ C.)$$

$$\partial_0 \left\{ (\rho + p)\ k(u^0)^2 + k(u^0)^2(\frac{h^0}{u^3})^2\ (1 + k^2) - k(\frac{h^0}{u^3})^2\ (u^0)^2 \right\} = f(d.\ C.\ c.) ,$$

d'où on tire, par résolution d'un système d'équations linéaires, $\partial_0 u^0$, $\partial_0 k$ et $\partial_0 p$ si le déterminant des coefficients de ces quantités est différent de zéro. L'annulation de ce déterminant donne le cas exceptionnel où S est tangente en M au cône caractéristique hydrodynamique : si S a pour équation $f = Cte$ l'annulation du déterminant précédent (ou l'on remplace u^0 par $u^\alpha \partial_\alpha f$, h^0 par $h^\alpha \partial_\alpha f$ et g^{00} par $g^{\alpha\beta}\partial_\alpha f\ \partial_\beta f$) donne l'équation aux dérivées partielles satisfaite par les ondes hydrodynamiques :

$$(\frac{d\rho}{dp} - 1)(\rho + p)(u^\alpha \partial_\alpha f)^4 + (\rho + p + \mu|h|^2 \frac{d\rho}{dp})(u^\alpha \partial_\alpha f)^2\ g^{\alpha\beta}\partial_\alpha f\partial_\beta f$$
$$- \mu(h^\alpha \partial_\alpha f)^2\ g^{\alpha\beta}\partial_\alpha f\partial_\beta f = 0 .$$

Ces ondes sont, en chacun de leurs points, tangentes à un cône du quatrième ordre dual du cône obtenu en remplaçant dans l'équation précédente $\partial_\alpha f$ par X_α .

Pour étudier ce cône, il est commode de le rapporter au repère propre dont son sommet est l'origine : on a, dans ce repère, $\vec{e}_0 = \vec{u}$, $g^{00} = 1$, $g^{ij} = -\delta_{ij}$ prenons, de plus, pour support de $\vec{e}$, le vecteur $\vec{h}$. L'équation du cône est alors, en posant $r = \rho + p$, $\frac{d\rho}{dp} = \rho'$:

$$(r + \mu|h|^2)\ \rho'\ X_0^4 - \left\{ (r + \mu|h|^2)\ \rho' \sum X_i^2 + \mu|h|^2\ X_1^2 \right\} X_0^2 + \mu|h|^2\ X_1^2 \sum X_i^2 = 0 .$$

On montre que ce cône se compose de deux nappes distinctes $C_H^{(1)}$ et $C_H^{(2)}$. La nappe intérieure $C_H^{(1)}$ est convexe et toute droite issue d'un point intérieur à cette nappe coupe le cône en quatre points réels distincts, sauf dans le cas exceptionnel $\rho' = \frac{r + \mu|h|^2}{\mu|h|^2}$, où il admet une génératrice double dans le 2-plan $\vec{e}_0$, $\vec{e}_1$.

Les plans des ondes d'Alfven C_A sont toujours tangentes à C_H suivant des génératrices du 2-plan $\vec{e}_0$, $\vec{e}_1$. Pour $\rho' > 1$ le cône lumineux C' est intérieur à $C_H^{(1)}$.

10. Propagation des ondes.

Calculons la vitesse de propagation des ondes hydrodynamiques par la méthode indiquée au paragraphe 7 pour les ondes d'Alfven. On trouve dans chaque direction, deux vitesses de propagation :

$$(v)^2 = \frac{r+\mu|h|^2\rho'+\mu|h_n|^2+\{(r+\mu|h|^2\rho'+\mu|h_n|^2)^2-4\mu|h_n|^2\rho'(r+\mu|h|^2)\}^{1/2}}{2\rho'(r+\mu|h|^2)}$$

Ces vitesses coïncident avec les vitesses calculées par H. CABANNES [1] en mécanique non relativiste quand on néglige p et $|h|$ devant ρ par rapport auquel ils sont d'ordre $1/C^2$.

On vérifie d'autre part, qu'elles sont inférieures à 1 (vitesse de la lumière) pour $\rho' > 1$ et encadrent la vitesse d'Alfven. Pour $\rho' = 1$, (fluide incompressible), une de ces vitesses est égale à 1 , l'autre à la vitesse d'Alfven.

11. Mouvement permanent.

Nous dirons, avec LICHNEROWICZ, qu'un mouvement fluide est permanent si la métrique riemannienne associée admet un groupe d'isométries qui laisse invariant $\vec{u}$ et p , et ici $\vec{h}$, à trajectoires orientées dans le temps. LICHNEROWICZ a montré qu'il existait alors des coordonnées dites "adaptées" au caractère stationnaire, où, les trajectoires du groupe étant prises pour lignes de temps, les quantités $g_{\alpha\beta}$, u_α , p_α et h_α sont indépendantes de la variable temporelle x^0 . Dans l'espace à 3 dimensions V_3 , quotient de l'espace-temps par le groupe d'isométries, les caractéristiques du système différentiel d'équations des mouvements permanents des fluides chargés sont donc, en chaque point, tangentes au cône dual des sections des cônes C , C_A , C_H par le plan orthogonal au vecteur $\vec{v}$ générateur du groupe d'isométries. Ces caractéristiques sont toutes réelles si la vitesse du fluide dans le repère adapté est supérieure à $v_H^{(2)}$, sinon certaines sont réelles, d'autres imaginaires : on rencontre ainsi un exemple physique de systèmes différentiels qui ne sont ni totalement hyperboliques, ni elliptiques. Il serait intéressant de trouver les problèmes aux limites qui sont bien posés pour ces systèmes.

12. Equations de choc.

La forme $\nabla_\alpha H^{*\alpha\beta} = 0$ et $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ sous laquelle se présentent les équations des fluides chargés permet d'écrire immédiatement les équations vérifiées par les discontinuités de u^α , h^α , p à la traversée d'une onde de choc (hypersurface orientée dans le temps). On montre en effet que les potentiels de gravitation $g_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées premières ne peuvent pas admettre de discontinuités à la traversée d'une hypersurface non caractéristique. Si les quantités u^α , h^α , p sont continues dans un domaine D , sauf à la traversée d'une hypersurface S orientée dans le temps, les équations des fluides chargés s'écrivent dans des coordonnées locales :

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(h^\alpha u^\beta - h^\beta u^\alpha) = f^\beta$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} T^{\alpha\beta} = g^\beta$$

où f^β et g^β sont des fonctions continues par morceaux dans D. La vérification au sens des distributions de ces équations par des quantités h^α, u^α, p discontinues à la traversée de S entraîne la nullité des mesures singulières, portées par S, introduites par les dérivations figurant au premier membre, c'est-à-dire les équations :

(12.1) $$u_\alpha[h^\alpha u^\beta - h^\beta u^\alpha] = 0$$

(12.2) $$u_\alpha[T^{\alpha\beta}] = 0$$

ou u_α est la normale à S et ou on a désigné par $[A] = A_+ - A_-$ la différence des valeurs d'une même quantité A de part et d'autre de S.

13. Choix d'un repère orthonormé.

Pour étudier les équations 12, il est commode de prendre, en un point M de S (orientée dans le temps) un repère orthonormé défini de la façon suivante :

$\vec{e}_1$ est la normale unitaire $\vec{n}$ à S (spatial)

$\vec{e}_2$ est normal à l'hyperplan $\vec{e}_1$, $\vec{h}_-$, $\vec{u}_-$ (spatial)

$\vec{e}_3$, normal à $\vec{e}_1$ dans le 2-plan $\vec{h}_-$, $\vec{u}_-$ est spatial ou temporel, selon que ce 2-plan coupe le plan tangent à S en M suivant une direction spatiale ou temporelle ;

$\vec{e}_0$ est normal à $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (temporel si $\vec{e}_3$ est spatial, spatial si $\vec{e}_3$ est temporel).

Le vecteur $\vec{e}_3$ du 2-plan $\vec{u}$, $\vec{h}$ est tel que :

$$\vec{e}_3 = \lambda\vec{u} + \mu\vec{h}$$

avec

$$0 = \lambda(\vec{u}, \vec{n}) + \mu(\vec{h}, \vec{n}) \qquad ,$$

$\vec{u}$ étant unitaire et $\vec{h}$ orthogonal à $\vec{u}$ on a :

$$(\vec{e}_3)^2 = \lambda^2 + \mu^2(\vec{h})^2 = \lambda^2 - \mu^2|h|^2$$

($\vec{h}$ étant spatial on a $(\vec{h})^2 < 0$, on pose $(\vec{h})^2 = -|h|^2$). $\vec{e}_3$ est donc spatial (de longueur < 0) si

(13.1) $$(\vec{u}, \vec{n})^2 > \frac{(\vec{h}, \vec{n})^2}{|h|^2}$$

temporel dans le cas contraire.

Pour interpréter l'inégalité, plaçons-nous dans un repère propre. Les quantités $\frac{n_0}{n_i} = v_i$ sont, dans ce repère, les composantes de la vitesse de propagation de l'onde de choc par rapport à ce repère où l'on a :

$$(\vec{u}\ ,\ \vec{n}) = n_0$$

$$(\vec{h}\ ,\ \vec{n}) = -\ h_i\ n_i$$

l'inégalité s'écrit donc :

$$\frac{(\sum h_i\ n_i)^2}{|h|^2} < n_0^2$$

or :

$$(\sum h_i\ n_i)^2 = \cos^2(\vec{h}\ ,\ \vec{n})(\sum n_i^2)|h|^2$$

d'où pour

$$\cos^2(\vec{h}\ ,\ \vec{n}) < v^2 \qquad .$$

On en déduit que $\vec{e}_3$ est spatial si le cosinus de l'angle du champ magnétique avec la normale à l'onde de choc est inférieure à la vitesse de propagation de cette onde par rapport au repère propre (la vitesse de la lumière étant prise pour unité).

Dans le cas contraire, $\vec{e}_3$ est temporel : ce dernier cas est celui traité, pour les chocs, en relativité restreinte, par HOFFMANN et TELLER [4] en prenant un repère où l'onde de choc apparaît comme stationnaire, et tel que le champ magnétique et le vecteur courant soient parallèles.

Il apparaît enfin un cas singulier : c'est celui où le vecteur $\vec{e}_3$ est isotrope, cas où :

$$\cos^2(\vec{h}\ ,\ \vec{n}) = v^2 \qquad .$$

Les ondes de choc correspondantes sont les hypersurfaces $f = Cte$ satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles

$$|h|^2(u^\alpha\,\partial_\alpha f)^2 - (h^\alpha\,\partial_\alpha f)^2 = 0 \qquad .$$

Ce sont les hypersurfaces dont le plan tangent passe par la droite isotrope $\vec{u} - \frac{\vec{h}}{|h|}$.

Les équations satisfaites par les discontinuités à la traversée d'une onde de choc s'écrivent de façon simple dans le repère choisi, différemment selon que l'inégalité (13.1) est vérifiée ou non (cf. [2] et [3]).

Chocs infiniment faibles : quand les discontinuités $[u^\alpha]$, $[h^\alpha]$, p sont infiniment petites, les équations des chocs sont équivalentes à des équations linéaires homogènes. Les chocs correspondants sont donc identiquement nuls, sauf si le détermiant des équations est nul. La condition trouvée exprime que l'hypersurface est singulière au point de vue du problème de Cauchy, c'est-à-dire caractéristique.

On retrouve ainsi les ondes d'Alfven et les ondes hydrodynamiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CABANNES (Henri). - Sur les mouvements d'un fluide compressible doué de conductivité électrique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 245, 1957, p. 1379-1382 ; et Québec, Université Laval, 1957 (Notes multigraphiées).

[2] FOURÈS-BRUHAT (Yvonne). - Conditions de continuité et équations de choc, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 1782-1784.

[3] FOURÈS-BRUHAT (Yvonne). - Fluides chargés de conductivité infinie, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 2558-2560.

[4] HOFFMANN (F. de) and TELLER (E.). - Magneto-hydrodynamic shocks, Phys. Rev., Series 2, t. 80, 1950, p. 692-703.

[5] LICHNEROWICZ (André). - Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. - Paris, Masson, 1955 (Collection d'Ouvrages de Mathématiques à l'usage des Physiciens).

[6] PHAM (Mau Quân). - Etude électromagnétique et thermodynamique d'un fluide relativiste chargé, J. of rat. Mech. and Anal., t. 5, 1956, p. 473-538.