Olivier Costa de Beauregard

Effet Doppler et aberration. Théorie et observation

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 3 (1959-1960), exp. nº 1, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1959-1960__3__A1_0>

Séminaire JANET
(Mécanique analytique et Mécanique céleste)
3e année, 1959/60, n° 1

9 janvier 1960

EFFET DOPPLER ET ABERRATION. THÉORIE ET OBSERVATION

par Olivier COSTA de BEAUREGARD

1. Introduction.

On va rappeler comment se présente la théorie de ces deux effets étroitement parents en cinématique classique, en relativité restreinte, en relativité générale. L'accent sera mis sur certains progrès récents de cette théorie (théorème d'Abelé et Malvaux [1], p. 147-172, et [7], covariance relativiste dans la transformation de Fourier ([5], [8]), applications astronomiques possibles de l'effet Doppler transversal [6]), ainsi que sur le fait qu'on n'a pas encore une exposition correcte en relativité générale de ces deux effets.

2. Théorie classique dans le vide.

Elle conduit aux formules bien connues que l'expérience vérifie. Il faut remarquer que les soi-disant vitesses absolues, ou "vitesses par rapport à l'éther", s'éliminent, pour ne laisser subsister que la vitesse relative source-observateur. En fin de compte, bien que la théorie classique se trouve ici réussir, l'aberration et l'effet Doppler dans le vide parlent pour et non contre le principe de relativité restreinte.

L'aberration et l'effet Doppler semblent bien fournir les seules méthodes permettant la mesure de c sur un parcours aller simple de la lumière. En contrepartie, le récepteur ou la source doivent occuper successivement au moins deux repères galiléens différents. Historiquement, les deux premières mesures de c sont celle de ROEMER (1676) basée sur un phénomène formellement identique à un effet Doppler (la fréquence d'occultation des satellites de Jupiter y joue le même rôle que la fréquence d'émission d'un train d'ondes) et celle de BRADLEY (1828) basée sur l'aberration.

Aujourd'hui, les astronomes ont retourné les termes du problème. Ils partent de la valeur de c mesurée au laboratoire et de mesures astronomiques d'effet Doppler pour évaluer la "constante de l'aberration", c'est-à-dire la vitesse de la Terre sur l'écliptique, puis les dimensions de l'écliptique en termes de mètre étalon.

3. Introduction des milieux transparents. Formule de Fresnel. Théorème d'Abelé et Malvaux ([1], [7]).

L'expérience d'ARAGO (1818) ayant révélé l'absence de l'effet de "vent d'éther" attendu, FRESNEL riposte par sa formule universelle "d'entraînement des ondes par les milieux transparents". Bien que FRESNEL mentionne explicitement que la compensation des effets observables du vent d'éther soit faite au premier ordre en $\beta = v/c$, la portée de cette remarque n'est comprise qu'en 1873-1874, après une incroyable accumulation d'expériences du premier ordre, toutes négatives (théorème général de Veltmann-Potier, montrant que la formule d'entraînement de Fresnel annule identiquement tout effet du "vent d'éther" au premier ordre en β).

L'expérience d'ARAGO et la formule de Fresnel sont à l'effet du premier ordre ce que l'expérience de Michelson et la formule de contraction des longueurs de Fitzgerald-Lorentz sont à l'expérience du second ordre. Dans les deux cas, la formule (affublée vaille que vaille d'un discours interprétatif) est taillée sur mesure pour escamoter tout effet observable du soi-disant "vent d'éther".

Mais, alors que Poincaré, imposant une structure de groupe aux formules de Lorentz, établit ainsi la base de la cinématique relativiste à partir de l'effet du second ordre, c'est tout récemment seulement (ABELÉ et MALVAUX, 1952) qu'on s'est posé la même question à propos de l'effet du premier ordre. Jusque-là, l'opinion s'accrédite d'une soi-disant "équivalence des cinématiques classique et relativiste au premier ordre en β ". Or, la vérité est que cette équivalence n'a lieu que pour autant qu'on n'exige pas une structure de groupe de l'optique cinématique. Si l'on exige une structure de groupe, avec la formule de Fresnel comme formule génératrice, la cinématique relativiste seule résout le problème, ainsi que l'ont montré MM. ABELÉ et MALVAUX ([1], [7]). Rappelons leur démonstration.

Postulons

a. que la formule de Fresnel

$$w = u + v(1 - u^2) \quad , \tag{1}$$

où v est petit devant u , w et $(1 - u)$ (v vitesse du milieu transparent, u vitesse de la lumière par rapport à ce milieu, w vitesse résultante de la lumière) représente la forme infinitésimale en v d'une loi universelle de composition des vitesses ;

b. que cette loi s'exprime dans une formule caractérisant un groupe ;

c. que ce groupe **est** continu et connexe ;

d. que l'ensemble des vitesses **est** ordonné.

Il résulte alors de la théorie des groupes à un paramètre que le groupe cherché est isomorphe au groupe additif des nombres réels (voir par exemple [3] chapitre V, paragraphe 3, exercice 2), c'est-à-dire que la loi de composition cherchée a la forme

$$F(w) = F(u) + F(v) \tag{2}$$

avec, puisque $w = u$ pour $v = 0$,

$$F(0) = 0 \quad . \tag{3}$$

En vertu du postulat (a), la formule (1) représente le début d'un développement de Taylor en les puissances de v, et l'on a donc

$$1 - u^2 = \frac{\partial w(u\ ,\ 0)}{\partial v} = \left\{\frac{F'(v)}{F'(w)}\right\}_{v\ =\ 0} = \frac{F'(0)}{F'(u)} \tag{4}$$

et par conséquent, A désignant une constante,

$$F'(u) = \frac{A}{1 - u^2}\ , \qquad F(u) = \frac{A}{2}\ \mathrm{Log}\ \frac{1 + u}{1 - u} \quad ; \tag{5}$$

d'où, en portant dans (2),

$$\frac{1 + w}{1 - w} = \frac{1 + u}{1 - u}\cdot\frac{1 + v}{1 - v}\ , \qquad w = \frac{u + v}{1 + uv} \quad : \tag{6}$$

c'est la loi relativiste de composition des vitesses (écrite avec des unités telles que $c = 1$).

En 1907, M. von LAUE avait remarqué que la formule de Fresnel est directement conséquence de la loi relativiste de composition des vitesses. En 1952, MM. ABELÉ et MALVAUX établissent la réciproque, en s'appuyant en outre sur le postulat d'une structure de groupe isomorphe au groupe additif des nombres réels.

Il est aisé de remonter de la formule (6_2) de composition des vitesses à celles de Lorentz-Poincaré. Le plus simple est pour cela de remarquer que cette formule n'est autre que celle de la composition additive des tangentes hyperboliques :

$$\mathrm{Th}\ W = \frac{\mathrm{Th}\ U + \mathrm{Th}\ V}{1 + \mathrm{Th}\ U\ \mathrm{Th}\ V}\ , \qquad W = U + V \quad . \tag{7}$$

Postulons donc encore, avec MM. ABELÉ et MALVAUX,

e. la loi d'inertie de Galilée, c'est-à-dire le mouvement rectiligne uniforme d'un point matériel libre dans une certaine famille "galiléenne" de repères spatio-temporels ;

f. que les trois mobiles impliqués dans la formule (6_2) ou (7_1) sont des repères galiléens.

Si les trois tangentes hyperboliques impliquées dans la formule (7) doivent s'interpréter comme des rapports x/t attachés à trois repères galiléens, il faut nécessairement que les formules de changement de repère galiléen puissent être figurées comme une rotation d'axes x , t "pseudo-orthogonaux", suivant les formules de Lorentz-Poincaré

$$\begin{cases} x' = x \,\mathrm{Ch}\, U + t \,\mathrm{Sh}\, U , \\ t' = t \,\mathrm{Sh}\, U + x \,\mathrm{Ch}\, U , \end{cases} \quad \begin{cases} x = x' \,\mathrm{Ch}\, U - t' \,\mathrm{Sh}\, U \\ t = - t' \,\mathrm{Sh}\, U + x \,\mathrm{Ch}\, U \end{cases} \quad . \tag{8}$$

ou

$$\begin{cases} \alpha x' = x + vt , \\ \alpha t' = t + vx , \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha x = x' - vt' , \\ \alpha t = t' - vx' , \end{cases} \tag{9}$$

$$\alpha \equiv \sqrt{1 - v^2} , \qquad (c = 1) \quad . \tag{10}$$

L'écart cinématique de MM. ABELÉ et MALVAUX est le correspondant de la classique vitesse relative $v = w - u$. Il s'écrit

$$v = \frac{w - u}{1 - uw} \tag{11}$$

ou, si v est infiniment petit,

$$Du = \frac{du}{1 - u^2} \quad . \tag{12}$$

Il est remarquable que la substitution (12) portée dans la formule de l'accélération longitudinale d'un point matériel soit justement celle qui fait disparaître le "scandale" de la "masse longitudinale non maupertuisienne". En bref, on a, pour l'accélération **totale,**

$$d(m\vec{v}) = m \, D\vec{v} \quad , \tag{13}$$

où m est la masse maupertuisienne.

La formule (6_1) se récrit sous forme d'un rapport anharmonique

$$\frac{1 + v}{1 - v} = \frac{1 + w}{1 - w} \cdot \frac{1 - u}{1 + u} = (-1 , +1 , w , u) \quad , \tag{14}$$

avec nécessairement, du fait de (5_2),

$$-1 < w , u < +1 \quad ; \tag{15}$$

la loi relativiste de composition des vitesses apparaît ainsi comme la loi la plus simple compatible avec l'existence d'une vitesse limite (± 1) . Notons aussi, avec MM. ABELÉ et MALVAUX, la forme anharmonique de la loi de composition

(16) $$(-1\,,+1\,,u\,,w) = (-1\,,+1\,,u\,,v).(-1\,,+1\,,\mathbf{v}\,,w) \quad .$$

4. Les formules relativistes de l'aberration et de l'effet Doppler.

Elles sont directement contenues dans celles de la transformation du quadrivecteur fréquence lors d'un changement de repère galiléen ou, disons mieux, lorentzien.

L'équation de Gordon

(17) $$(\partial_\lambda^\lambda - k^2)\,\psi(x) = 0 \quad ,$$

($\lambda\,,\mu\,,\ldots = 1\,,2\,,3\,,4\,;\ x_4 = ict$) des ondes de la mécanique ondulatoire admet des solutions planes monochromatiques

(18) $$\psi(x) = \zeta(k)\, e^{ik^\lambda x_\lambda}$$

telles que

(19) $$k_\lambda k^\lambda + k^2 = 0 \quad ;$$

la fréquence propre k des ondes matérielles étant réelle, la quadrifréquence k_λ est du genre temps ;

(20) $$\vec{f} = \vec{k}/2\pi \qquad \text{et} \qquad \nu = ck_4/2\pi i$$

sont le vecteur nombre d'ondes et la fréquence classiques.

Vitesse de groupe d'un petit faisceau d'ondes planes. - Postulons une dispersion δk_λ sur la quadrifréquence respectant la fréquence propre k , c'est-à-dire telle que

(21) $$k_\lambda \delta k^\lambda = 0 \quad .$$

A un petit vecteur dx_λ correspond un déphasage

(22) $$d\psi = k^\lambda dx_\lambda$$

et donc, dx_λ étant supposé fixe, un

(23) $$\delta d\psi = \delta k^\lambda dx_\lambda \quad .$$

La vitesse de groupe s'obtient en écrivant la condition

(24) $$\delta d\psi \equiv 0$$

c'est-à-dire, d'après (21) et (22),

(25) $$k^{\lambda} = A\, dx^{\lambda}$$:

l'énergie de l'onde plane chemine le long de ses rayons (du genre temps). C'est le théorème de la vitesse de groupe de Louis de BROGLIE [4] qui n'est autre, on le voit, que l'extension quadridimensionnelle d'un théorème classique de Fresnel ("argument des zones de Fresnel") : l'éclairement d'une source S en un point R est dû principalement au petit paquet d'ondes planes dont les vecteurs de propagation ont des directions voisines de R - S .

Ceci étant, les formules relativistes de l'aberration et de l'effet Doppler en général ne sont autres que les formules de Lorentz appliquées à la quadrifréquence :

(26) $$f'_1 = \frac{f_1 + c^{-2} v\nu}{\sqrt{1-\beta^2}} , \quad \nu' = \frac{\nu + v f_1}{\sqrt{1-\beta^2}} .$$

Cas particuliers.

1° Cas transversal pur (onde matérielle quelconque) : $f_1 = 0$,

(27) $$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{f'_1}{c\,\nu'} = \frac{v}{c} , \qquad \nu' = \frac{\nu}{\sqrt{1-\beta^2}} .$$

D'après le théorème de la vitesse de groupe, α est l'angle suivant lequel est reçue l'énergie des ondes ; (27_1) est la formule de Bradley bien connue. La formule (27_2), du second ordre en β et inconnue de la théorie classique, est celle de "l'effet Doppler transversal", vérifié au laboratoire par IVES et STILWELL (1941)

2° Lumière dans le cas longitudinal :

(28) $$f_1 = \nu/c , \qquad \nu' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = 1 + \beta + \ldots ;$$

(28_2) est la formule bien connue pour l'effet Doppler pur dans le cas de la lumière.

A cause du caractère "rigide et objectif", pseudo-euclidien, de l'espace de Minkowski, le v des formules précédentes s'interprète directement comme la vitesse relative de la source et du récepteur. Il n'en sera plus de même en relativité générale où la notion de parallélisme absolu disparaît. Toutefois, pourvu que la courbure soit localement assez faible pour qu'on ait le droit de raisonner dans l'espace minkowskien tangent (et de continuer d'y parler d'ondes planes monochromatiques) les précédentes formules subsistent avec une interprétation purement locale : elles correspondent à l'effet d'une rotation locale des axes lorentziens. En ce sens (et à cette approximation) l'effet Doppler et l'aberration liés à la circulation de la Terre sur l'écliptique restent expliqués ([1]).

5. <u>Expressions covariantes de la transformation de Fourier, etc.</u> ([5], p. 49-61 et [8]).

Nous les donnons pour rendre manifeste l'harmonie profonde entre la relativité restreinte et la mécanique ondulatoire ou quantique (deux théories nées l'une et l'autre de la physique des ondes : leur propagation d'une part, leur émission-absorption de l'autre).

<u>Formule de Fourier directe pour les solutions de l'équation de Gordon</u> (17).

(29) $$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \iiint_{\eta} e^{ik^{\lambda} x_{\lambda}} \zeta(k)\ \varepsilon(k)\ d\eta \qquad ;$$

η désigne l'hyperboloïde d'équation (19) ; la considération des deux nappes η_+ et η_- est indispensable pour qu'on ait en général une orthobase complète dans l'espace de Hilbert ; $\psi(x)$ et $\zeta(k)$ sont deux spineurs ou tenseurs de même variance ; $d\eta$ est le module du quadrivecteur élément de volume $d\eta_{\lambda}$ sur η (colinéaire à k_{λ}) ;
$\varepsilon(k) = +1$ sur η_+ , -1 sur η_- s'introduit inévitablement dans la formule soit directe, soit réciproque.

<u>Formule de Fourier réciproque</u> :

(30) $$\zeta(k) = -\frac{i}{2k}(2\pi)^{-3/2} \iiint_{\sigma} e^{-ik^{\lambda} x_{\lambda}} [\partial^{\mu}]\ \psi(x)\ d\sigma_{\mu} \qquad ;$$

k^{λ} satisfaisant par hypothèse à (30), $e^{-ik^{\lambda} x_{\lambda}}$ et $\psi(x)$ sont deux solutions de l'équation de Gordon ;

(31) $$[\partial^{\mu}] = \underset{\rightarrow}{\partial^{\mu}} - \underset{\leftarrow}{\partial^{\mu}}$$

est "l'opérateur du courant de Gordon" ; pour deux solutions de l'équation de Gordon, on a identiquement

(32) $$\partial_{\mu} \left\{ \bar{\psi}^{a}\ [\partial^{\mu}]\ \psi^{b} \right\} = 0$$

([1]) Cette remarque a été faite indépendamment par M. A. METZ.

en sorte que l'intégrale (30), étendue à une hypersurface arbitraire du genre espace σ, est indépendante de σ pourvu que ψ décroisse suffisamment vite à l'infini spatial.

Egalité de Parseval :

(33) $$-\frac{i}{2k}\iiint_{\sigma}\bar{\psi}^a\,[\partial^{\mu}]\,\psi^b\,d\sigma_{\mu}=\iiint_{\eta}\bar{\zeta}^a\,\zeta^b\,\varepsilon(k)\,d\eta\quad .$$

Posons trois définitions :

(34) $$e(kx)=\bar{e}(-kx)=\begin{cases}(2\pi)^{-3/2}\,e^{ik^{\lambda}x_{\lambda}} & \text{si } k^{\lambda}k_{\lambda}+k^2=0\ ,\\ 0 & \text{si } k^{\lambda}k_{\lambda}+k^2\neq 0\ ;\end{cases}$$

c'est une solution de l'équation de Gordon sous ses deux formes (17) et

(35) $$(k_{\lambda}k^{\lambda}+k^2)\,\zeta(k)=0\quad .$$

Définitions du produit scalaire hermitien de deux solutions de l'équation de Gordon :

(36) $$\langle\psi^a|\psi^b\rangle_{\sigma}=\overline{\langle\psi^b|\psi^a\rangle_{\sigma}}=-\frac{i}{2k}\iiint_{\sigma}\bar{\psi}^a\,[\partial^{\mu}]\,\psi^b\,d\sigma_{\mu}\quad ,$$

(37) $$\langle\zeta^a|\zeta^b\rangle_{\eta}=\overline{\langle\zeta^b|\zeta^a\rangle_{\eta}}=\iiint_{\eta}\bar{\zeta}^a\,\zeta^b\,\varepsilon(k)\,d\eta\quad ;$$

les formules (29), (30), (33) se récrivent

(38) $$\psi(x)=\langle e(-kx)|\zeta(k)\rangle_{\eta}\quad ,$$

(39) $$\zeta(k)=\langle e(kx)|\psi(x)\rangle_{\sigma}\quad ,$$

(40) $$\langle\psi^a|\psi^b\rangle_{\sigma}=\langle\zeta^a|\zeta^b\rangle_{\eta}\quad .$$

Définition du propagateur de Jordan-Pauli :

(41) $$D(x)=-(2\pi)^{-3}\iiint_{\eta}e^{ik^{\lambda}x_{\lambda}}\,\varepsilon(k)\,d\eta\quad :$$

c'est une fonction impropre, solution de l'équation de Gordon pour tout x (y compris $x=0$), paire en $\vec{x}$ et impaire en x_4, nulle pour x du genre espace (une rotation de Lorentz peut alors transformer $D(x)$ en $+D(x)$ et $-D(x)$ à la fois).

Il suit de (41), (34) et (40)

(42) $$D(x'' - x') = \langle e(-kx') | e(-kx'') \rangle_{\nu} = \langle D(x - x') | D(x - x'') \rangle_{\sigma}$$:

en particulier, deux fonctions de x, $D(x - x')$ et $D(x - x'')$ telles que le vecteur $x' - x''$ soit du genre espace, sont orthogonales au sens impliqué dans (36) et (37).

Substituant (30) dans (29) et tenant compte de (41), l'on résout formellement le problème de Cauchy sous la forme

(43) $$\psi(x) = \langle D(x - x') | \psi(x') \rangle_{\sigma'}$$

(impliquant la connaissance sur σ' du ψ' et de sa dérivée normale). C'est aussi la formule développant le $\psi(x)$ sur le système orthogonal et complet des propagateurs $D(x - x')$ attachés à une σ'.

6. Deux applications astronomiques possibles de l'effet Doppler transversal [6].

Il est tentant de chercher à mesurer les vitesses transversales des corps célestes en se servant de l'effet Doppler transversal. Mais celui-ci étant normalement largement dominé par l'effet Doppler ordinaire, l'effet doit être recherché comme un effet différentiel.

Soit ν_0 la fréquence propre d'émission de la source (supposée corrigée de l'effet Doppler de gravitation : nous raisonnons en relativité restreinte). La formule de l'effet Doppler est

(44) $$\nu_0 = \frac{(1 + \beta_x)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \nu \left\{ 1 + \beta_x + \frac{1}{2} (\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2) + \dots \right\}$$

d'où

(45) $$\frac{d\nu_0}{\nu_0} = 0 \simeq \frac{d\nu}{\nu_0} + d\beta_x (1 + \beta_x) + \beta_y \, d\beta_y + \beta_z \, d\beta_z + \dots$$

Nous allons considérer deux cas : récepteur décrivant un cercle de grand diamètre (Terre sur son orbite), sources décrivant un cercle de grand diamètre (périphérie d'une galaxie). Dans les deux cas, il y a deux points diamétralement opposés où l'effet Doppler longitudinal s'annule : $d\beta_x = 0$. Le trièdre trirectangle Oxyz peut alors être orienté de manière qu'en ces points $d\beta_z = 0$. Il reste donc

(46) $$\frac{d\nu}{\nu_0} \simeq - \beta_y \, d\beta_y$$.

<u>Premier cas</u>. - <u>Etoile rapide à raies fines observée depuis la Terre en circulation</u>. - Pour la Terre $cd\beta_y \simeq 2.\ 30$ km/sec., $d\beta_y \simeq 2.\ 10^{-4}$. Pour l'étoile, $\beta_y \lessapprox 10^{-3}$. L'effet serait au plus en 10^{-7}.

<u>Deuxième cas</u>. - <u>Galaxie en rotation</u>. - On peut avoir, aux extrémités du petit axe de son image, $d\beta_y \simeq 2.\ 10^{-3}$. On n'a encore aucune donnée sur les vitesses transversales des galaxies ; admettons à titre d'hypothèse $c\beta_y \backsimeq 3\,000$ km/sec., ou $\beta_y \simeq 10^{-2}$: l'effet serait en 10^{-5}. Malheureusement les raies sont ici beaucoup moins fines que dans le cas précédent.

7. <u>Difficultés de la théorie de l'effet Doppler et de l'aberration en relativité générale</u>.

1° Il n'y a plus de parallelisme à distance, et la notion de vitesse relative source-récepteur devient très équivoque.

2° Conceptuellement comme observationnellement, l'effet Doppler ordinaire et l'effet Doppler de gravitation deviennent inséparables l'un de l'autre. De droit, il en faudrait dire autant de l'aberration ordinaire et de l'aberration de gravitation (distorsion des rayons lumineux par les masses graves) ; mais ce dernier problème est en fait académique dans la majorité des cas.

3° Dans un espace-temps riemannien, il n'y a plus ni ondes planes monochromatiques ni transformations de Fourier.

Pour qui veut parler d'effet Doppler et d'aberration il ne reste plus alors... qu'à refermer les coupoles des observatoires. Et pourtant, tous les observatoires font de la spectroscopie et des pointés en direction, bien que leurs instruments soient placés dans le champ de gravitation solaire, terrestre et lunaire... Il y a là une situation de fait qu'il serait intéressant de légitimer.

Le problème impliqué derrière ce modeste cas particulier n'est rien moins que celui d'une théorie synthétique de la relativité générale et des quanta. L'effet Doppler de gravitation implique essentiellement à la fois la relativité générale et les quanta. Il en va de même de l'argument fort intéressant d'Einstein et de Bohr relativement à la quatrième relation d'indétermination [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABELÉ (J.) et MALVAUX (P.). - Vitesse et univers relativiste. - Paris, SEDES, 1954.

[2] BOHR (Niels). - Discussion with Einstein on epistomological problems in atomic physics, in Albert Einstein : Philosopher-Scientist, 2d edition, p. 199-241. - New York, Tudor Publishing Company, 1951 (The Library of living Philosophers).

[3] BOURBAKI (Nicolas). - Livre III : Topologie générale, Chap. V-VIII. - Paris, Hermann, 1947 (Act. scient. et ind., 1029 ; Éléments de Mathématique , 5).

[4] BROGLIE (Louis de). - Recherches sur la théorie des quanta, Ann. Physique, t. 3, 1925, p. 22-128.

[5] COSTA de BEAUREGARD (Olivier). - Théorie synthétique de la relativité restreinte et des quanta. - Paris, Gauthier-Villars, 1957 (Les grand Problèmes des Sciences, 8).

[6] COSTA de BEAUREGARD (Olivier). - Sur deux applications possibles de l'effet Doppler transversal à la mesure des vitesses transversales des corps célestes, Bull. astron., t. 21, 1957, p. 49-53.

[7] MALVAUX (Pierre). - Recherche d'une loi intrinsèque de composition des vitesses, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 235, 1958, p. 1009-1011.

[8] RIESZ (Marcel). - Sur certaines notions fondamentales en théorie quantique relativiste, Comptes rendus du 10e Congrès des Mathématiciens scandinaves [1946. Copenhague], p. 123-148. - København, J. Gjellerups, 1947.