

SÉMINAIRE JANET. MÉCANIQUE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE CÉLESTE

JEAN COLLEAU

Au sujet de l'allure extrême du mouvement de trois corps (contre-exemple de K. A. Sitnikov à la théorie de J. Chazy)

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 2 (1958-1959), exp. n° 9, p. 1-33

http://www.numdam.org/item?id=SJ_1958-1959__2__A9_0

© Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

-:-:-

Séminaire de MÉCANIQUE ANALYTIQUE
et de MÉCANIQUE CÉLESTE

28 février 1959

Année 1958/59

-:-:-

AU SUJET DE L'ALLURE EXTRÊME DU MOUVEMENT DE 3 CORPS
(Contre-exemple de K. A. SITNIKOV à la théorie de J. CHAZY)

par Jean COLLEAU

Dans la conférence qu'il a bien voulu faire l'an dernier à ce Séminaire, A. N. KOLMOGOROV a cité en particulier [10] une étude faite sous sa direction, par K. A. SITNIKOV, sur le problème des 3 corps [14] ; il s'agit d'un contre-exemple à la théorie publiée par CHAZY, en trois mémoires successifs, [4], [5], [6], sur l'allure finale du mouvement dans le problème des 3 corps. Les précédents contre-exemples à cette théorie avaient été obtenus par intégration numérique, et n'étaient donc pas entièrement satisfaisants, ainsi que A. N. KOLMOGOROV le remarquait dans sa conférence ; au contraire, le contre-exemple construit par SITNIKOV est entièrement basé sur des raisonnements de mécanique et d'analyse, et est par conséquent décisif.

M. JANET m'a demandé de vous présenter aujourd'hui ce travail, dont j'ai pu vérifier les diverses démonstrations, grâce à la traduction que J.-P. BENZÉCRI a eu l'aimable obligeance de me dicter.

Avant de vous exposer les démonstrations de K. A. SITNIKOV, je vais rappeler les résultats publiés par J. CHAZY et les grandes lignes de ses démonstrations ; j'indiquerai quelques conséquences pratiques de cette théorie ; je mentionnerai d'autre part quelques autres travaux entrepris sur cette question.

I

1. - Examinons d'abord le problème des 2 corps ; en laissant de côté le mouvement du centre de gravité, qui est rectiligne et uniforme, on obtient le mouvement comme solution d'un système différentiel canonique d'ordre 6. On introduit alors un espace à 6 coordonnées : les 3 variables q_1, q_2, q_3 définissant la position relative des 2 corps et leurs 3 variables conjuguées p_1, p_2, p_3 . Dans cet espace, on pourra représenter chaque mouvement par une courbe orientée.

Si le vecteur des aires n'est pas nul, le mouvement peut être étudié pour toute valeur de t , arbitrairement grande, positive ou négative. La trajectoire relative peut-être :

- une ellipse : la distance des 2 corps reste bornée quand $t \rightarrow \infty$
- une hyperbole : la distance des 2 corps $\rightarrow \infty$ comme $|t|$
- une parabole : la distance des 2 corps $\rightarrow \infty$ comme $t^{2/3}$

Si le vecteur des aires est nul, il y a choc des 2 corps ; il est alors possible, analytiquement, de prolonger le mouvement au-delà du choc, en utilisant la théorie de Sundmann. On obtient alors un mouvement rectiligne qui, quand $t \rightarrow \infty$, se comporte, soit comme un mouvement elliptique, soit comme un mouvement hyperbolique, soit comme un mouvement parabolique ; et on peut donc faire rentrer ce cas dans l'une des classes précédentes.

La classe d'un mouvement (hyperbolique, parabolique, elliptique) est entièrement déterminée par le signe de la constante h de l'énergie cinétique. La variété $h = 0$, où sont représentés les mouvements paraboliques, est une variété algébrique à 5 dimensions, qui partage l'espace de configuration en 2 domaines ouverts connexes, disjoints, où sont représentés, d'une part les mouvements hyperboliques ($h > 0$), d'autre part les mouvements elliptiques ($h < 0$). Enfin, h , étant fonction paire de p_1, p_2, p_3 , aura même valeur pour un mouvement et son mouvement inverse. Donc l'allure du mouvement est la même, lorsque $t \rightarrow \pm \infty$

2. - Dans le problème des 3 corps, les possibilités d'allure finale du mouvement se multiplient et h ne suffit pas à partager les divers cas ; toute étude sur la comparaison des deux allures extrêmes doit donc se faire par des moyens plus puissants.

Outre le mouvement du centre de gravité, qui est rectiligne et uniforme, le mouvement s'obtient comme solution d'un système canonique d'ordre 12. L'espace de configuration a 12 coordonnées : les 6 variables $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ définissent la position relative des 3 corps, et leurs 6 variables conjuguées $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$. Le mouvement y sera représenté par une courbe orientée.

J. CHAZY utilise des propriétés topologiques de cet espace de configuration à 12 dimensions (p_i, q_i) ; ou plutôt de l'espace à 12 dimensions des trajectoires, qui est l'espace quotient par le groupe des g_t de l'espace de configuration à 13 dimensions (p_i, q_i, t) .

Dans l'un ou l'autre cas, la variété $h=0$ est une variété algébrique à 11 dimensions qui partage l'espace en deux domaines ouverts et connexes, l'un où $h < 0$, l'autre où $h > 0$.

Tous les mouvements où il y a choc de 2 corps peuvent être prolongés au-delà du choc grâce à la théorie de Sundmann. Seuls doivent être écartés les mouvements où se produit un choc des 3 corps ; une condition nécessaire (mais non suffisante) de ce phénomène est l'annulation du vecteur des aires, soit 3 conditions algébriques entre les 12 variables ; les représentations de tels mouvements seront donc situées sur une variété à 9 dimensions, que l'on peut retrancher de l'espace à 12 dimensions.

3. - J. CHAZY commence par établir un catalogue limitatif des différentes classes de mouvements possibles, suivant l'allure finale ($t \rightarrow +\infty$) [4]

a - mouvement hyperbolique, où les 3 distances mutuelles $\rightarrow \infty$, comme t ($h > 0$ obligatoirement)

b - mouvement hyperbolique-elliptique, où une distance mutuelle reste bornée, et les 2 autres $\rightarrow \infty$, comme t ; h peut alors prendre, suivant les cas, des valeurs > 0 , < 0 , ou nulles. On est amené à distinguer parmi ces mouvements, trois classes suivant que c'est la masse m_1 , la masse m_2 ou la masse m_3 qui s'écarte indéfiniment des deux autres.

c - mouvement borné, où, quand $t \rightarrow +\infty$, les trois distances mutuelles restent bornées ($h < 0$ obligatoirement)

d - mouvement oscillant, où, quand $t \rightarrow +\infty$, les distances mutuelles peuvent être, tantôt arbitrairement grandes, tantôt bornées ; de tels mouvements dont l'existence n'est ni prouvée, ni démentie, nécessitent aussi $h < 0$.

e - mouvement parabolique-elliptique, où une distance mutuelle reste bornée, et les 2 autres $\rightarrow \infty$, comme $t^{2/3}$; ces mouvements, pour lesquels $h < 0$, forment évidemment trois classes distinctes.

f - mouvement hyperbolique-parabolique, où une distance mutuelle $\rightarrow \infty$ comme $t^{2/3}$, et les 2 autres comme t ; ces mouvements, pour lesquels $h > 0$ forment évidemment trois classes distinctes.

g - mouvement parabolique, où les 3 distances mutuelles $\rightarrow \infty$, comme $t^{2/3}$ ($h = 0$ obligatoirement)

4.- La question suivante est d'examiner comment se repartissent, dans l'espace à 12 dimensions, les représentations de ces différentes classes de mouvement.

J. CHAZY en se basant sur la continuité de l'allure finale du mouvement par rapport aux conditions initiales dans la région $h > 0$ [4], établit que les 4 domaines correspondant aux mouvements hyperboliques et hyperboliques-elliptiques (avec la restriction $h > 0$) de chaque classe sont ouverts. Il étend cette démonstration aux domaines correspondant aux mouvements hyperboliques elliptiques de chaque classe dans la région $h \leq 0$ [5].

Dans le cas des mouvements hyperboliques-elliptiques, paraboliques-elliptiques et hyperboliques-paraboliques, le mouvement, lorsque $t \rightarrow +\infty$, peut être décomposé en 2 mouvements, par un choix classiques des variables q_1 : d'une part, le mouvement relatif des 2 corps qui restent les plus proches, d'autre part le mouvement du 3e corps par rapport à leur centre de gravité. J. CHAZY établit [4] que ces 2 mouvements sont osculateurs à 2 mouvements képlériens, l'un elliptique, l'autre hyperbolique (ou l'un elliptique, l'autre parabolique ; ou l'un parabolique, l'autre hyperbolique) ; il en résulte que l'on peut alors introduire les 12 éléments osculateurs à l'infini. J. CHAZY en tire diverses conséquences.

Chacune des 3 classes de mouvements hyperboliques-paraboliques (ou paraboliques-elliptiques) dépend de 11 paramètres seulement, puisque l'une des excentricités osculatrices à l'infini est fixée et égale à 1. Les éléments osculateurs étant fonctions analytiques des conditions initiales, il résulte que les représentations de ces 6 classes de mouvements sont sur 6 variétés analytiques à 11 dimensions de l'espace à 12 dimensions.

D'autre part, grâce à l'existence des éléments osculateurs à l'infini, fonctions analytiques des conditions initiales, J. CHAZY établit [5] que les 3 domaines de chaque classe hyperbolique-elliptique sont connexes ; et que les 6 variétés à 11 dimensions précitées sont de même connexes. Considérant que le domaine hyperbolique-elliptique de chaque classe est limité, dans la région $h > 0$ par la variété hyperbolique-parabolique de même classe, et dans la région $h < 0$ par la variété parabolique-elliptique de même classe, il en déduit la connexion : d'une part du reste de la région $h > 0$, occupé par les mouvements hyperboliques [6] ; d'autre part du reste de la région $h < 0$, occupé par les mouvements bornés et oscillants [5]. Il faut noter que, si les mouvements oscillants existent, ils ne peuvent sans doute être séparés des mouvements bornés, mais forment avec eux un seul domaine ouvert connexe.

5. - Dans le cas des mouvements paraboliques les 3 vitesses relatives tendent vers des vitesses limites nulles lorsque $t \rightarrow +\infty$; la configuration géométrique des 3 corps tend alors vers l'une des configurations d'équilibre relatif des 3 corps [3].

La configuration géométrique peut tendre vers la figure d'Euler, où les 3 corps sont alignés ; on obtient ainsi 3 classes de mouvements paraboliques suivant que m_2 est entre m_1 et m_3 , ou m_3 entre m_1 et m_2 , ou m_1 entre m_2 et m_3 . Chacune de ces classes de mouvements forme une variété analytique à 10 dimensions située sur la variété $h = 0$.

Elle peut tendre aussi vers la figure de Lagrange, où les 3 corps sont aux sommets d'un triangle équilatéral, on obtient ainsi une 4e classe de mouvements paraboliques, qui forme une variété analytique à 9 dimensions située sur la variété $h = 0$ (et qui donc ne la régionne pas).

Enfin, les 3 variétés de la région $h > 0$ correspondant à chaque classe de mouvements hyperboliques-paraboliques et les 3 variétés de la région $h < 0$ correspondant à chaque classe de mouvements paraboliques-elliptiques se raccordent sur la variété $h = 0$ suivant les 3 variétés correspondant à chaque classe de mouvements paraboliques à figure limite d'Euler : ainsi, la variété 1-hyperbolique-parabolique et la variété 1-parabolique-elliptique, qui limitent le domaine 1-hyperbolique-elliptique, se raccordent sur $h = 0$ avec les variétés paraboliques correspondant aux figures d'Euler (1, 2, 3) (où se raccordent aussi les variétés 3-hyperbolique-parabolique et 3-parabolique-elliptique) et (1, 3, 2) (où se raccordent aussi les variétés 2-hyperbolique-parabolique et 2-parabolique-elliptique) [5].

6. - La répartition des différentes classes de mouvements dans l'espace à 12 dimensions, peut alors, d'après CHAZY [6] être représentée par le schéma suivant :

T. S. V. P.

1 - H - P

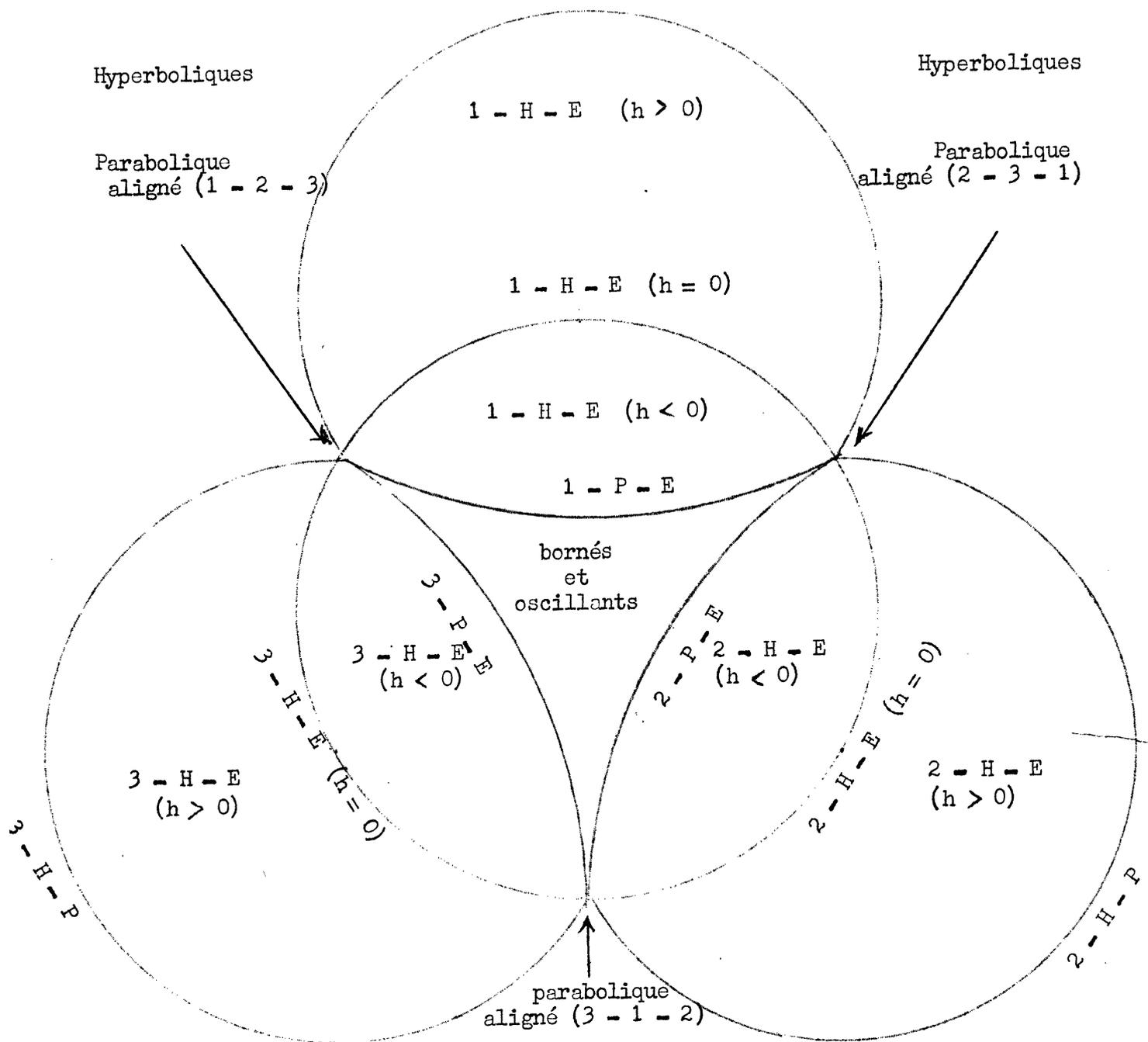


Figure 1

Ce schéma ne peut évidemment rendre compte des variétés à 9 dimensions qui correspondent:

- d'une part aux mouvements où le vecteur des aires est nul
- d'autre part aux mouvements paraboliques où la figure limite est le triangle équilatéral de Lagrange.

7. - Le point important (et controversé) de l'étude de J. Chazy est la réversibilité : la classe du mouvement quand $t \rightarrow +\infty$ et quand $t \rightarrow -\infty$ est-elle la même ?

La valeur de h étant la même pour deux mouvements inverses, l'ensemble des mouvements $h < 0$, pris globalement, est réversible ; de même l'ensemble des mouvements $h > 0$; de même l'ensemble des mouvements $h = 0$; mais ce résultat est insuffisant, puisque, dans chacun de ces cas, il y a plusieurs classes de mouvements.

CHAZY montre d'abord la réversibilité de chaque classe dans la région $h \leq 0$ (en considérant comme formant une seule classe les mouvements bornés et oscillants). [5].

En effet le système canonique d'ordre 12 admet un invariant intégral d'ordre 12. L'invariant intégral, appliqué au faisceau de trajectoires de même classe constituant un voisinage d'une trajectoire donnée, est fini s'il s'agit de mouvements bornés ou oscillants quand $t \rightarrow +\infty$ (par exemple) (en cas de choc de 2 corps cette intégrale converge). Il en résulte alors que les trajectoires bornées ou oscillantes quand $t \rightarrow +\infty$ possèdent, dans leur ensemble, la stabilité à la Poisson ; qu'elles possèdent encore cette stabilité à la Poisson quand $t \rightarrow -\infty$; ce qui les oblige à être aussi bornées ou oscillantes quand $t \rightarrow -\infty$.

Il résulte de là que le reste de la région $h \leq 0$, pris globalement, est réversible : si pour $h \leq 0$, un mouvement est hyperbolique-elliptique quand $t \rightarrow +\infty$, il le sera aussi quand $t \rightarrow -\infty$; il en sera de même pour les mouvements paraboliques-elliptiques. Comme les 3 classes hyperboliques-elliptiques sont disjointes : ou bien la classe est la même quand $t \rightarrow +\infty$, ou bien les classes s'échangent en bloc :

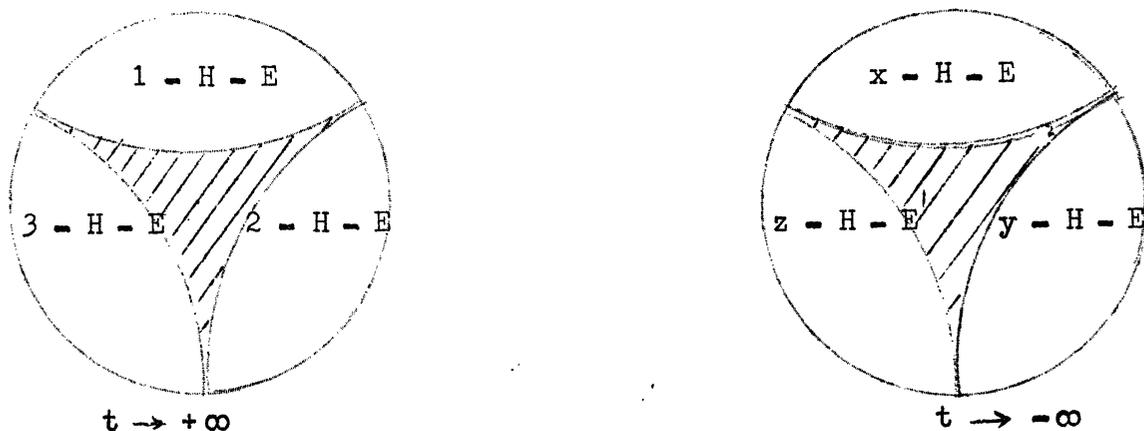


Figure 2

Il reste à démontrer que $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, ce qui se fait en trouvant un mouvement réversible dans chacune des 3 classes. J. CHAZY utilise, d'une part l'argument de vraisemblance, d'autre part un raisonnement par continuité qui n'est pas entièrement convaincant, où il fait tendre 2 des masses vers 0.

En fait, il existe une démonstration de BIRKHOFF, [2], prouvant que, dans le problème des 3 corps, $h < 0$ et si le vecteur des aires n'est pas nul, en prenant le moment d'inertie du système à l'instant initial suffisamment petit, on peut trouver des mouvements hyperboliques-elliptiques de même classe quand $t \rightarrow \pm \infty$, ceci dans chacune des 3 classes ; et même montrer que de tels mouvements ont une probabilité non nulle.

Ainsi est prouvée la réversibilité de chaque classe dans la région $h \leq 0$.

J. CHAZY pense enfin étendre la réversibilité à chacune des classes de la région $h > 0$ ([6], p. 416-417) ses arguments sont essentiellement basés sur les propriétés topologiques des 3 variétés hyperboliques-paraboliques ; ces arguments sont d'ailleurs peu accessibles et peu convaincants ; il est à craindre qu'ils n'impliquent la réversibilité des mouvements hyperboliques-paraboliques ; et c'est d'ailleurs dans ce cas que des contre-exemples prouvent que les conclusions de J. CHAZY sont fausses.

II

Examinons quelques-unes des conséquences pratiques de la théorie de Chazy, si elle est exacte. CHAZY en développe d'ailleurs quelques unes [6].

1. - Dislocation spontanée du système solaire. - Le problème s'est trouvé posé en particulier pour Jupiter et Saturne : la commensurabilité de leurs périodes donne en effet une perturbation séculaire sur les grands axes, qui augmente celui de Saturne et diminue celui de Jupiter.

En utilisant le raisonnement de l'invariant intégral, on trouve que, le système Soleil-Jupiter-Saturne ayant un mouvement borné quand $t \rightarrow -\infty$ aura un mouvement borné (ou oscillant) quand $t \rightarrow +\infty$, ce qui exclut toute possibilité de dislocation spontanée du système Solaire.

2. - Capture des comètes - Evasion des comètes. - Il s'agit, en gros, du même problème.

Il est impossible que la présence de Jupiter freine un objet cométaire étranger au système solaire de telle sorte qu'il s'y intègre définitivement ; il est de

même impossible, si les comètes ont une origine intérieure au système solaire, que la présence de Jupiter accélère une comète suffisamment pour qu'elle quitte le système solaire.

Or la plupart des comètes ont une orbite nettement elliptique. Mais il existe aussi des orbites cométaires telles que l'on peut presque sûrement affirmer qu'elles s'évadent (ce qui est couramment attribué à Jupiter).

Il faut d'ailleurs noter que la première démonstration sur ce sujet, due à SCHWARZSCHILD [13] porte sur la capture des comètes. SCHWARZSCHILD prend le système Soleil-Jupiter-Comète ; il écrit les équations canoniques de la comète, dont les seconds membres dépendent du temps, mais avec la période T de Jupiter ; il utilise le dernier multiplicateur 1, et la méthode de l'invariant intégral, mais en prenant pour intervalles successifs $0, T, 2T, 3T, \dots$. Il faut noter que sa démonstration est insuffisante sur 2 points : il ne prouve pas que le domaine des mouvements bornés ni le domaine des mouvements C -hyperboliques elliptiques sont ouverts ; il laisse dans l'ombre la possibilité de mouvements oscillants.

Les études concernant l'origine des objets cométaires devraient donc tenir compte de l'étude de J. CHAZY. En fait, des astronomes m'ont signalé les 2 objections suivantes :

- d'une part lorsque l'un des corps a une masse nulle, sa position disparaît dans l'énergie cinétique et le système canonique, et les résultats précédents cessent d'être valables. On doit donc utiliser la méthode de Schwarzschild, mais elle suppose la périodicité du mouvement de Jupiter, ce qui n'est pas le cas du fait des perturbations de Saturne.

- d'autre part, l'action physique du Soleil sur la comète produit des forces qui ne sont pas newtonniennes.

3. - Dislocation provoquée du système solaire. - Supposons le système des 3 corps constitués du Soleil S , d'une planète P et d'une étoile E se trouvant traverser le système solaire.

Quand $t \rightarrow -\infty$, la classe est E -hyperbolique-elliptique. Le cas d'un mouvement P -hyperbolique-elliptique étant invraisemblable, il reste trois possibilités quand $t \rightarrow +\infty$:

- mouvement E -hyperbolique-elliptique
- mouvement S -hyperbolique-elliptique (échange) [1]
- mouvement hyperbolique [14]

D'après J. CHAZY, seule la 1^{re} éventualité est possible.

4. - Extension au problème des n corps. - J. CHAZY indique [5] que le raisonnement de l'invariant intégral du $(6n-6)^{\text{e}}$ ordre s'étend à un système de n corps où, quand $t \rightarrow -\infty$, le mouvement est borné ou oscillant (il reste malgré tout à prouver que ces mouvements occupent un domaine ouvert). Ceci, qui, dans un amas d'étoiles isolé, interdit toute évasion ou toute capture, répond à l'une des questions posées par M. HÉNON [8] dans le précédent exposé.

5. - On pourrait songer à des extrapolations au problème des n corps ; il pourrait être intéressant de montrer par de telles méthodes, qu'un amas ne pourrait perdre aucun élément, même du fait du passage d'autres objets à proximité [8].

III

1. - Le premier contre-exemple à la théorie de J. CHAZY est certainement celui de L. BECKER [1], antérieur même à la théorie.

BECKER construit un système binaire temporaire, qui est de classe 3-hyperbolique-elliptique quand $t \rightarrow -\infty$, et de classe 2-hyperbolique-elliptique quand $t \rightarrow +\infty$. Son étude est basée sur l'intégration numérique.

Les 7 exemples de BECKER possèdent la propriété de symétrie : le mouvement relatif de C par rapport à A à l'instant $+t$ est symétrique par rapport à un axe Ax du mouvement inverse du mouvement relatif de B par rapport à A à l'instant $-t$, quel que soit t (B et C ayant même masse).

Ces exemples sont cités et discutés par J. CHAZY lui-même, qui les considère comme non probants, l'étude n'étant faite que pour des valeurs insuffisamment grandes de $|t|$: J. CHAZY indique même, pour plusieurs, quelle est à son avis la véritable classe.

Il est exact que les courbes tracées sont insuffisamment probantes dans plusieurs cas, ce qui est d'ailleurs l'avis de A. N. KOLMOGOROV [10], qui trouve dans ce travail au moins des insuffisances logiques.

2. - C'est le contre-exemple fourni par une intégration numérique de O. J. SMIDT [15] qui relance la question en U. R. S. S. en 1947.

Une intégration numérique n'est évidemment jamais décisive, car elle ne peut donner que des résultats approchés et pour des valeurs limitées de t .

Le travail de K. A. SITNIKOV [14], en 1953, entièrement basé sur des raisonnements de mécanique et d'analyse, comble donc une lacune. Son raisonnement est basé : sur un critère de mouvement hyperbolique dû à G. T. KHILMI [9] et un critère de mouvement hyperbolique-elliptique, qu'il établit lui-même.

De 1952 à 1954, il faut citer divers travaux de MERMAN et de ses collaborateurs, qui établissent des critères de mouvements hyperboliques, des critères de mouvements hyperboliques-elliptiques, et des critères de capture.

Par ailleurs, il faut aussi des recherches numériques, pour trouver les frontières du domaine de capture : ainsi 50 exemples dans le problème hyperbolique-plan restreint [12].

3. - Par ailleurs, il y a quelques études critiques du travail de CHAZY .

GAZARIAN [7], discutant la démonstration de CHAZY quand $h \leq 0$, montre que J. CHAZY prouve seulement que, dans cette région, les captures ne sont pas exclues, mais ont une probabilité nulle. MERMAN [11], poussant plus loin, indique qu'on ne peut affirmer l'impossibilité des captures dans la région $h \leq 0$ qu'en démontrant que :

Toute trajectoire-limite d'un ensemble de trajectoires hyperboliques-elliptiques de classe déterminée ($h \leq 0$), mais n'appartenant pas à cette classe, est une trajectoire parabolique-elliptique de même classe.

Pour le cas $h > 0$, GAZARIAN se contente de citer les arguments de J. CHAZY qui semblent lui paraître peu convaincants.

IV

1.- L'exemple construit par K. A. SITNIKOV est un problème plan, où les 3 corps α, β, γ ont même masse.

Les unités fondamentales seront les unités de longueur et de temps, la constante universelle de gravitation étant choisie égale à l'unité ; les masses seront alors de dimension $L^3 T^{-2}$

K. A. SITNIKOV choisit ses 3 masses égales à l'unité. J'ai préféré rétablir M , pour l'homogénéité des formules.

Pour $t = 0$, les 3 corps sont alignés sur l'axe des x ; leurs abscisses sont :

$$\alpha : -\frac{c}{u} ; \quad \beta : +\frac{c}{u} ; \quad \gamma : -2R$$

où R désigne une longueur, u une vitesse linéaire, C une vitesse aréolaire, ces 3 paramètres vérifient $u > U_0$, $\frac{RM}{C^2} > 300$.

2. - Il y a lieu d'étudier tout d'abord le mouvement qu'auraient α et β s'ils étaient seuls.

Ils ont pour vitesses initiales respectives les vecteurs \vec{u} et $-\vec{u}$, \vec{u} ayant les composantes 0 et u ; de la sorte leur vitesse aréolaire relative est $-2C$.

Les équations de ce mouvement sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} r^2 \theta' = -4C \\ r'^2 + r^2 \theta'^2 - \frac{4M}{r} = 4u^2 - \frac{2Mu}{C} \end{array} \right.$$

Si $u > \frac{M}{2C}$ (ce qui sera toujours supposé), il s'agit d'une orbite hyperbolique de demi-axe

$$a = \frac{M}{2u^2 - \frac{Mu}{C}} .$$

Son excentricité est :

$$e = \frac{4Cu}{M} - 1 .$$

On en déduit le demi-angle λ des asymptotes :

$$\cos \lambda = \frac{1}{e} = \frac{M}{4Cu - M} \quad \text{tg } \lambda = \frac{4C}{M} \sqrt{u^2 - \frac{Mu}{2C}}$$

Les vitesses limites de α et β sont \vec{V}_1 et $-\vec{V}_1$, définies par :

$$V_1 = \sqrt{u^2 - \frac{Mu}{2C}} \quad (\vec{V}_1 \text{ suivant l'asymptote})$$

Enfin, rappelons que, quand t varie de 0 à ∞ , $\frac{d\alpha}{dt}$ croît de 0 à $2u - \frac{M}{2C}$ (quand $\alpha = \beta = \frac{8C^2}{M}$), puis décroît de cette valeur à $2V_1$.

3. - Ceci étant précisé, la vitesse initiale de γ est égale à $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$, où \vec{V}_1 est la vitesse-limite précédemment définie et où \vec{V}_2 a pour composantes 0 et $\sqrt{\frac{M}{R}}$

K. A. SITNIKOV partage en 3 parties la variation du temps :

$$|t| < \frac{4R}{u} \quad t > \frac{4R}{u} \quad t < -\frac{4R}{u}$$

Pour $|t| < \frac{4R}{u}$, il compare le mouvement réel au mouvement d'un système "auxiliaire", où il n'y aurait pas d'action gravifique entre γ d'une part, et α et β d'autre part. Dans ce système auxiliaire, le mouvement de α et β est donc le mouvement hyperbolique précédemment étudié ; le mouvement de γ est rectiligne uniforme de vitesse $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$.

Et il démontre le théorème suivant :

Si on désigne par $\vec{g}_\alpha(t)$, $\vec{g}_\beta(t)$, $\vec{g}_\gamma(t)$ la différence de position entre les corps α , β , γ du système étudié et les corps correspondants du système auxiliaire, et si, de même, on désigne par $\vec{h}_\alpha(t)$, $\vec{h}_\beta(t)$, $\vec{h}_\gamma(t)$ la différence de vitesse,

THÉORÈME 1 - 2. - Pourvu que $u > U_1$

$$\forall |t| \leq \frac{4R}{u} : |\vec{g}_\alpha(t)|, |\vec{g}_\beta(t)|, |\vec{g}_\gamma(t)| < \frac{M t^2}{R^2}$$

$$|\vec{h}_\alpha(t)|, |\vec{h}_\beta(t)|, |\vec{h}_\gamma(t)| < \frac{2M |t|}{R}.$$

$$\text{Or, pour } |t| = \frac{4R}{u}, \quad \frac{M t^2}{R^2} = \frac{16M}{u^2} \quad \text{et} \quad \frac{2M |t|}{R} = \frac{8M}{u}$$

quantités qui peuvent être rendues arbitrairement petites, pourvu que $u > U_2$.

Examinons la configuration (géométrique et cinématique) du système auxiliaire quand $t = \frac{4R}{u}$

Tout d'abord, γ est en mouvement rectiligne et uniforme de vitesse $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$, dont les composantes sont :

$$V_1 \cos \lambda < \frac{M}{4C}, \quad V_1 \sin \lambda + V_2 = u \left(1 - \frac{\frac{M}{4C}}{u - \frac{M}{4C}}\right) + \sqrt{\frac{M}{R}}$$

Donc, pour $t = \frac{4R}{u}$,

$$-2R < x(\gamma) < -2R + \frac{MR}{Cu}$$

$$y(\gamma) = 4R \left(1 - \frac{\frac{M}{4C}}{u - \frac{M}{4C}}\right) + 4 \sqrt{\frac{MR}{u}}$$

et donc, pourvu que $u > U'_1$, γ' se trouve alors arbitrairement proche du point $(-2R, +4R)$ avec la vitesse $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$.

On a ensuite, pour les composantes de la vitesse de α' :

$$0 \leq x'(\alpha') < V_1 \cos \lambda < \frac{M}{4C}$$

$$u \gg y'(\alpha') > V_1 \sin \lambda = u \left(1 - \frac{\frac{M}{4C}}{u - \frac{M}{4C}}\right)$$

Donc, pour $t = \frac{4R}{u}$

$$-\frac{C}{u} < x(\alpha') < -\frac{C}{u} + \frac{MR}{Cu}$$

$$4R \gg y(\alpha') > 4R \left(1 - \frac{\frac{M}{4C}}{u - \frac{M}{4C}}\right)$$

et donc, pourvu que $u > U'_2$, α' se trouve alors arbitrairement proche du point $(0, 4R)$.

Quant à β' , il occupe une position symétrique par rapport à 0. On a alors :

$$\alpha' \beta' \gg 2y(\alpha') > 8R \left(1 - \frac{\frac{M}{4C}}{u - \frac{M}{4C}}\right) > \frac{8C^2}{M}$$

pourvu que $u > U'_3$, puisque $\frac{RM}{C^2} > 300$. Dans ces conditions,

$\forall t > \frac{4R}{u}$, $\frac{d(\alpha' \beta')}{dt} > 2V_1$
 et, comme $V_1 = \sqrt{u^2 - \frac{Mu}{2C}} > \frac{u}{2}$ pourvu que $u > U'_4$. On pourra écrire que,
 pourvu que $u > U'_3, U'_4$, $\forall t > \frac{4R}{u}$,

$$\alpha' \beta' > 4R + Cu \left(t - \frac{4R}{u}\right) = ut.$$

Donc $|\overrightarrow{J_{\alpha'}}, (t)| < \frac{M}{u^2 t^2}$ et :

$$\left| \overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_{\alpha'}}, \left(\frac{4R}{u}\right) \right| < \int_{\frac{4R}{u}}^{\infty} \frac{M dt}{u^2 t^2} = \frac{M}{4Ru}$$

et donc peut être rendu arbitrairement petit pourvu que $u > U'_5$

Finalement, on a montré que, si on pose $U_3 = \sup(U'_1, U'_2, U'_3, U'_4, U'_5)$
 en choisissant $u > U_3$, on peut rendre la configuration (géométrique et cinématique)

du système auxiliaire arbitrairement proche de la configuration suivante, lorsque $t = \frac{4R}{u}$

$$(H) \begin{cases} \alpha' : \text{position } (0, 4R) ; \text{ vitesse } \vec{V}_1 \\ \beta' : \text{position } (0, -4R) ; \text{ vitesse } -\vec{V}_1 \\ \gamma' : \text{position } (-2R, 4R) ; \text{ vitesse } \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \end{cases}$$

Il est clair que, de même, en choisissant $u > U_3$, on peut rendre la configuration du système auxiliaire arbitrairement proche de la configuration suivante, lorsque $t = -\frac{4R}{u}$:

$$(H') \begin{cases} \alpha' : \text{position } (0, -4R) ; \text{ vitesse } \vec{W}_1 \\ \beta' : \text{position } (0, 4R) ; \text{ vitesse } -\vec{W}_1 \\ \gamma' : \text{position } (-2R, -4R) ; \text{ vitesse } \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \end{cases}$$

(\vec{W}_1 symétrique de \vec{V}_1 par rapport à Oy)

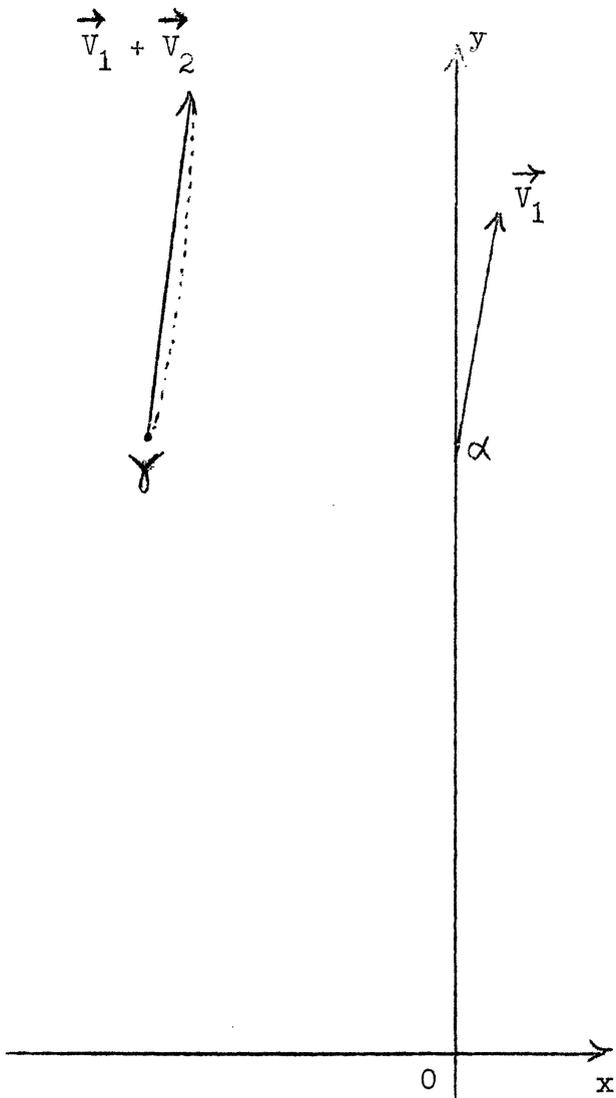
Par conséquent, pourvu que $u > U_1, U_2, U_3$, le système des 3 corps α, β, γ , se trouve avoir une configuration arbitrairement voisine de la configuration (H) quand $t = \frac{4R}{u}$ et de la configuration (H') quand $t = -\frac{4R}{u}$.

En fait, quand $t = -\frac{4R}{u}$, on considérera la configuration du mouvement inverse, qui sera arbitrairement voisine de la configuration (H'') suivante :

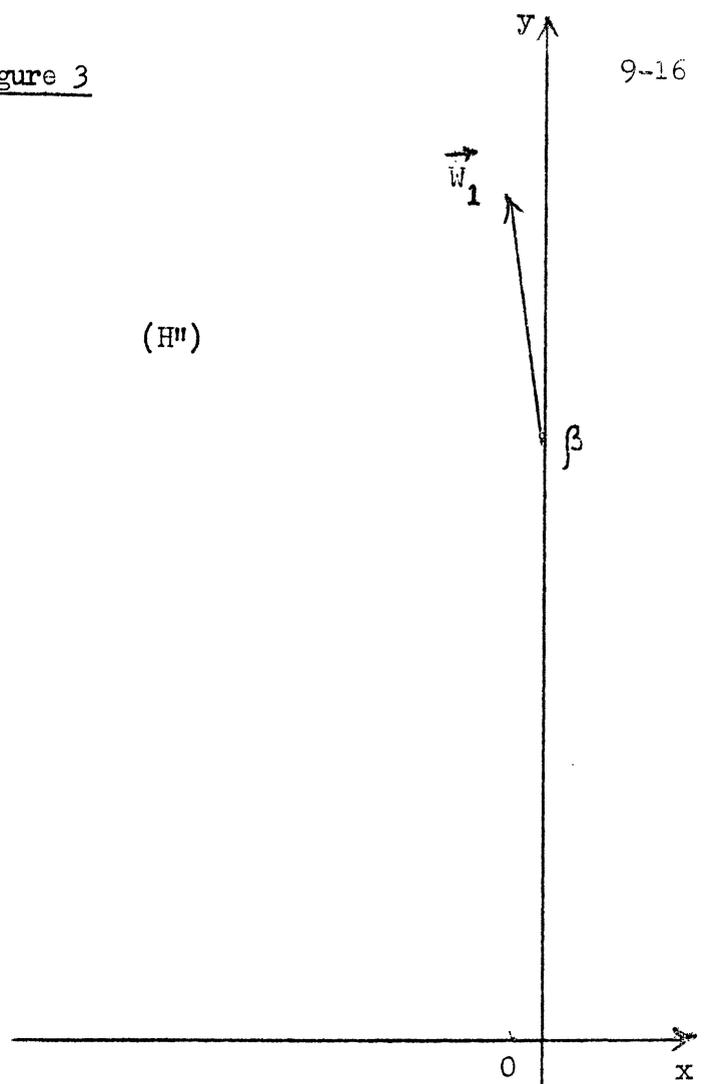
$$(H'') \begin{cases} \alpha : \text{position } (0, -4R) ; \text{ vitesse } -\vec{W}_1 \\ \beta : \text{position } (0, 4R) ; \text{ vitesse } \vec{W}_1 \\ \gamma : \text{position } (-2R, -4R) ; \text{ vitesse } -\vec{V}_1 - \vec{V}_2 \end{cases}$$

Représentons les 2 configurations (H) et (H'')

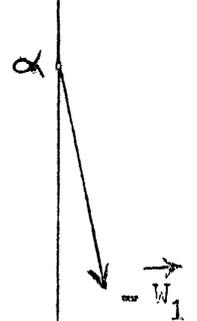
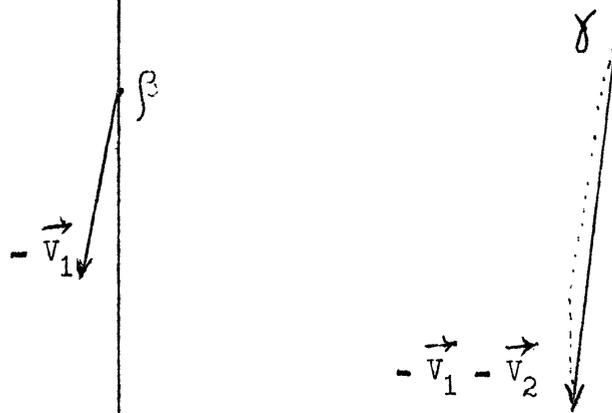
Figure 3



(H)



(H')



La configuration (H'''), et de même toute configuration suffisamment proche, vérifie les conditions d'un critère de mouvement hyperbolique, dû à KHIIMI.

Critère de KHIIMI [9]. - Si, à l'instant $t = 0$, les 3 corps s'éloignent l'un de l'autre avec une vitesse radiale $\geq \sigma_0 > 0$, et si leurs 3 distances mutuelles sont $\geq \rho_0$, et si $\rho_0(\sigma_0)^2 > 16M$, alors, $\forall t > 0$, les 3 distances mutuelles sont $> \rho_0 + \frac{\sigma_0}{2} t$, et donc augmentent indéfiniment avec t (mouvement hyperbolique).

Pour la configuration (H''') :

$$\frac{d(\alpha\gamma)}{dt} = 2 V_1 \cos \lambda = \frac{M}{2C} \frac{\sqrt{1 - \frac{M}{2Cu}}}{1 - \frac{M}{4Cu}} > \frac{M}{2C} \left(1 - \frac{M}{2Cu}\right) > \frac{M}{3C}$$

pourvu que $u > U_4 = \frac{3M}{2C}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(\alpha\beta)}{dt} &= 2 V_1 \sin \lambda = 2u \frac{u - \frac{M}{2C}}{u - \frac{M}{4C}} \\ \frac{d(\beta\gamma)}{dt} &> \frac{8}{\sqrt{17}} V_1 \sin \lambda = \frac{8}{\sqrt{17}} u \frac{u - \frac{M}{2C}}{u - \frac{M}{4C}} \end{aligned} \right\} > 2 \frac{M}{C}$$

certainement si $u > U_4 = \frac{3M}{2C}$.

Pour le système réel, en choisissant $u > U_1, U_2, U_3, U_4$, on peut donc borner inférieurement les 3 distances par $\rho_0 = R$ et les 3 vitesses radiales par $\sigma_0 = \frac{M}{4C}$ et, puisque $\frac{RM}{C^2} > 300$, $\rho_0(\sigma_0)^2 = \frac{RM^2}{16C^2} > \frac{300M}{16} > 16M$, ce qui prouve que, dans l'exemple de SITNIKOV, le mouvement est hyperbolique quand $t \rightarrow -\infty$.

D'autre part, la configuration (H), et de même toute configuration suffisamment proche, vérifie les conditions d'un critère d'un mouvement β -hyperbolique-elliptique, que démontre SITNIKOV.

Critère de SITNIKOV. - On désigne par $r(t)$ la distance $\alpha\gamma$ à l'instant t et par $w(t)$ la vitesse de α par rapport à leur centre de gravité.

On désigne par $\rho(t)$ la distance du corps β au centre de gravité de α et γ .

A l'instant initial,

$$r(0) = r_0 ; w(0) = w_0 ; (w_0)^2 - \frac{M}{r_0} = H_0 < 0$$

$$\rho(0) > q_0 ; \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_0 > \sigma_0 > 0 .$$

Si $q_0(\sigma_0)^2 > 24M$ et si $-\frac{12M^3}{(q_0)^{3/2}\sigma_0} + \frac{M}{q_0} < -H_0$; alors,

$$\forall t > 0, \quad r(t) < q_0, \quad f(t) > q_0 + \frac{\sigma_0 t}{2} .$$

Dans la configuration (H), la vitesse du centre de gravité de α et γ est $\vec{V}_1 + \frac{\vec{V}_2}{2}$ et donc $w_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M}{R}}$; en outre $r_0 = 2R$

$$H_0 = -\frac{M}{4R} .$$

Dans le système réel, à condition de choisir $u > U_1, U_2, U_3$, on pourra avoir en tout cas :

$$H_0 < -\frac{M}{6R}$$

On prendra $q_0 = 8R < \rho(0)$ dans la configuration (H) et aussi bien pour le système réel.

Enfin, dans la configuration (H), la vitesse de β par rapport au centre de gravité de α et γ est $(-2\vec{V}_1 - \frac{\vec{V}_2}{2})$ et :

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_C = \frac{V_1(8 \sin \lambda - 2 \cos \lambda) + 2\sqrt{\frac{M}{R}}}{\sqrt{17}} > \frac{8u}{\sqrt{17}} \left(1 - \frac{M}{16C} \frac{5u - \frac{4M}{C}}{u[u - \frac{M}{4C}]}\right) > \frac{3}{2} V_1 = \frac{3}{2} u \sqrt{1 - \frac{M}{2Cu}}$$

pourvu que $u > U_5$.

Il sera ainsi possible, pour le système réel, en choisissant $u > U_1, U_2, U_3, U_5$, de prendre :

$$\sigma_0 = V_1 = u \sqrt{1 - \frac{M}{2Cu}}$$

Alors :

$$q_0(\sigma_0)^2 = 8R(u^2 - \frac{Mu}{2C}) > 24M$$

pourvu que $u > U_6$ et

$$\frac{M}{q_0} + \frac{12}{\sigma_0} \sqrt{\frac{M^3}{q_0^3}} = \frac{M}{8R} + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{M^3}{R^3}} \frac{1}{u \sqrt{1 - \frac{M}{2Cu}}} < \frac{M}{6R}$$

pourvu que $u > U_7$. Et ainsi on réalise

$$\frac{M}{q_0} + \frac{12}{60} \sqrt{\frac{M^3}{q_0^3}} < -H_0.$$

Ainsi, pour le système réel des 3 corps α, β, γ , en choisissant $u > U_1, U_2, U_3, U_5, U_6, U_7$, les conditions du critère de Sitnikov sont satisfaites à l'instant $t = \frac{4R}{u}$, ce qui prouve que, quand $t \rightarrow +\infty$, le mouvement est de classe β -hyperbolique-elliptique.

Prenons alors $U_0 = \sup\left(\frac{M}{2C}, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7\right)$.

Le système construit par SITNIKOV, pour $\frac{RM}{c^2} > 300$, et $u > U_0$, sera de classe hyperbolique quand $t \rightarrow -\infty$ et de classe β -hyperbolique-elliptique quand $t \rightarrow +\infty$.

4. Démonstration des théorèmes 1 et 2.

PRÉLIMINAIRES. - On établit 2 mincrations de la distance $r = \alpha' \beta'$, dans le système auxiliaire (mouvement hyperbolique de 2 corps) quand $|t| \leq \frac{4R}{u}$

$$r \geq \frac{2C}{u}$$

$$\text{Or } |t| \leq \frac{4R}{u} \text{ donc } \frac{8Mt^2}{R^2} \leq \frac{128M}{u^2}$$

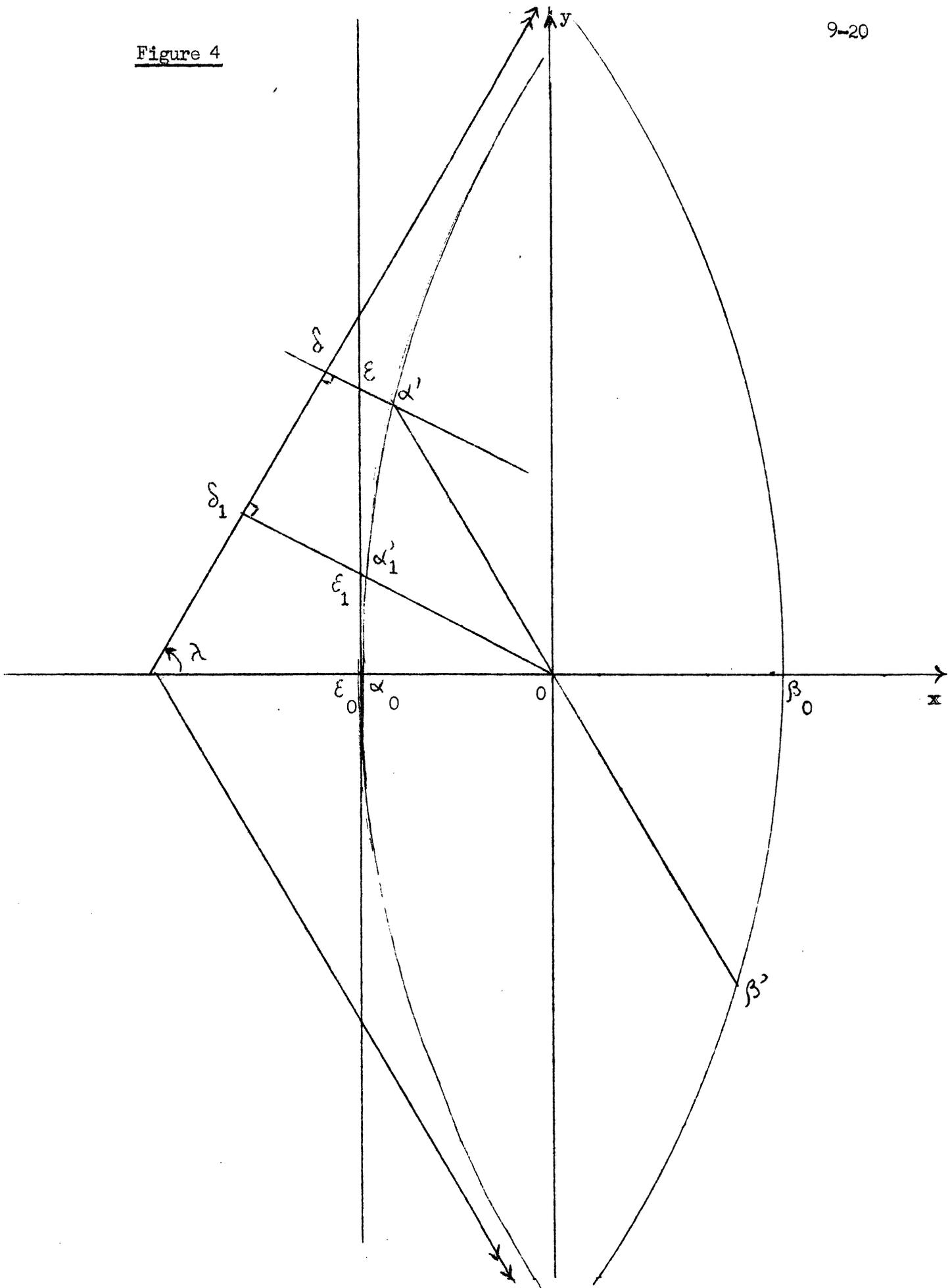
quantité qui, pour $u > U''_1 = \frac{64M}{c}$ est $< \frac{2c}{u}$.

ce qui permet alors de réaliser la 1re minoration $r \geq \frac{8Mt^2}{R^2}$ pour $|t| \leq \frac{4R}{u}$

La seconde minoration ne sera valable que pour $|t| \geq \frac{12M}{u^3}$.

Pour l'obtenir, on utilise le mouvement de 2 points auxiliaires: δ , projection de α' l'asymptote de l'hyperbole trajectoire de α' (l'une ou l'autre asymptote suivant le signe de t); et ξ , point où $\alpha' \delta$ coupe la tangente au sommet de l'hyperbole; on mettra des indices 0 pour la position à $t = 0$ et des indices 1 pour la position à l'instant τ_1 où il y a alignement $0 \alpha' \delta \xi$.

Figure 4



$$V(\delta) \gg V(\alpha') \sin \lambda \gg V_1 \sin \lambda$$

$$V(\varepsilon) \gg \frac{V(\delta)}{\sin \lambda} \gg V(\alpha') \geq V_1$$

$$\xi_0 \xi_1 = \frac{C}{u} \cotg \lambda$$

et donc

$$\tau_1 \leq \frac{\xi_0 \xi_1}{V_1} = \frac{C}{u V_1 \operatorname{tg} \lambda} = \frac{M}{4u^3} \frac{1}{1 - \frac{M}{2Cu}} \leq \frac{M}{3u^3}$$

pourvu que $u > U''_2 = \frac{2M}{C}$

Les valeurs de $|t|$ envisagées, $\gg \frac{12M}{u^3} \gg 36 \tau_1$

On voit alors sur la figure 4 que :

$$\begin{aligned} r = \alpha' \beta' &= 20 \alpha' > 2 \delta_1 \quad \delta > 2V_1 \sin \lambda |t - \tau_1| \\ &= 2u \left(1 - \frac{\frac{M}{4Cu}}{1 - \frac{M}{4Cu}}\right) |t - \tau_1|. \end{aligned}$$

Compte tenu du fait que $|t - \tau_1| \gg \frac{35}{36} |t|$

et que $1 - \frac{\frac{M}{4Cu}}{1 - \frac{M}{4Cu}} \gg \frac{3}{4}$ pourvu que $u > U''_3 = \frac{5M}{4C}$.

On obtient $r > \frac{35}{24} u |t|$, pour $|t| \gg \frac{12M}{u^3}$ et $u > U''_2, U''_3$.

LEMME 1'. - Désignons par \vec{f} l'action de β sur α dans le système réel et par \vec{f}' l'action de α' sur β' dans le système auxiliaire,

Pour $|t| < t_1 < \frac{4R}{u}$, si $g_\alpha(t)$ et $g_\beta(t) < \frac{Mt^2}{R^2}$

$$|\vec{f} - \vec{f}'| < \frac{M}{R^2};$$

pourvu que u soit suffisamment grand.

En effet φ désignent l'angle de \vec{f} et \vec{f}' :

$$|\vec{f} - \vec{f}'| \leq \left| |\vec{f}| - |\vec{f}'| \right| + 2 |\vec{f}'| \sin \frac{\varphi}{2}$$

Comme

$$\sin \varphi \leq \frac{g_{\alpha}(t) + g_{\beta}(t)}{|\alpha' \beta'|} \leq \frac{2 \frac{Mt^2}{R^2}}{r}$$

on a, d'après la 1re minoration de r , $\sin \varphi < \frac{1}{4}$, et donc

$$\sin \frac{\varphi}{2} < \sin \varphi \leq \frac{2 Mt^2}{R^2 r}$$

D'où

$$2 |\vec{f}'| \sin \frac{\varphi}{2} < \frac{4M^2 t^2}{R^2 r^3}$$

D'autre part

$$\left| |\vec{f}| - |\vec{f}'| \right| < \frac{M}{\left(r - \frac{2Mt^2}{R^2}\right)^2} - \frac{M}{r^2} \leq \frac{M}{r^2 - \frac{4Mt^2}{R^2}} - \frac{M}{R^2} = \frac{4M^2 t^2}{R^2 r^3} \frac{1}{1 - \frac{4Mt^2}{R^2 r}}$$

et, d'après la 1re minoration de r , $1 - \frac{4Mt^2}{R^2 r} > \frac{1}{2}$, donc

$$\left| |\vec{f}| - |\vec{f}'| \right| < \frac{8M^2 t^2}{R^2 r^3}$$

$$\text{D'où finalement } |\vec{f} - \vec{f}'| < \frac{12M^2 t^2}{R^2 r^3}.$$

Alors, d'une part, pour $|t| > \frac{12M}{u^3}$, $r > \frac{35}{24} u$ et

et donc

$$|\vec{f} - \vec{f}'| < \frac{12M^2}{R^2} \left(\frac{24}{35}\right)^3 \cdot \frac{1}{u^3} t < \left(\frac{24}{35}\right)^3 \frac{M}{R^2} < \frac{M}{R^2}$$

et, d'autre part, pour $|t| < \frac{12M}{u^3}$, comme $r > \frac{2C}{u}$,

$$|\vec{f} - \vec{f}'| < \frac{12 M^2}{R^2} \cdot \frac{u^3}{8C^3} \cdot \frac{144 M^2}{u^6} = \frac{216 M^4}{R^2 C^3 u^3} < \frac{M}{R^2}$$

pourvu que $u > U_4'' = \frac{6M}{C}$

D'autre part :

LEMME 1". - Soient \vec{f}_α et \vec{f}_β respectivement les actions de γ sur α et β .

Pour $|t| < t_1 < \frac{4R}{u}$, si $g_\alpha(t)$, $g_\beta(t)$, $g_\gamma(t) < \frac{Mt^2}{R^2}$, $|\vec{f}_\alpha|$, $|\vec{f}_\beta| < \frac{M}{R^2}$,

pourvu que u soit suffisamment grand.

En effet, d'une part l'étude précédente du système auxiliaire pour $|t| < \frac{4R}{u}$ prouve que les distances $\gamma' \alpha'$ et $\gamma' \beta'$ restent arbitrairement proches de $2R$ si u est suffisamment grand; on pourra en particulier réaliser

$$\gamma' \alpha' \text{ et } \gamma' \beta' > \frac{3R}{2} \text{ pourvu que } u > U_4''.$$

En outre

$$g_\alpha(t), g_\beta(t), g_\gamma(t) < \frac{Mt^2}{R^2} < \frac{16M}{u^2} < \frac{R}{4}$$

pourvu que $u > U_5'' = 8\sqrt{\frac{M}{R}}$

Donc, dans le système réel, en choisissant $u > U_4''$, U_5'' , $\gamma \alpha$ et $\gamma \beta > R$ et donc $|\vec{f}_\alpha|$ et $|\vec{f}_\beta| < \frac{M}{R^2}$

Des lemmes 1' et 1" résultent le

LEMME 1. - Désignons par \vec{F}_α , \vec{F}_β , \vec{F}_γ les forces respectives agissant sur les corps α , β , γ , dans le système réel et par \vec{F}'_α , \vec{F}'_β , $\vec{F}'_\gamma = \vec{0}$, les forces respectives agissant sur les corps α' , β' , γ' , dans le système auxiliaire.

$$\begin{array}{lll} \vec{F}_\alpha = \vec{f} + \vec{f}_\alpha & \vec{F}'_\alpha = \vec{f}' & \vec{F}_\alpha - \vec{F}'_\alpha = (\vec{f} - \vec{f}') + \vec{f}_\alpha \\ \vec{F}_\beta = -\vec{f} + \vec{f}_\beta & \vec{F}'_\beta = -\vec{f}' & \vec{F}_\beta - \vec{F}'_\beta = -(\vec{f} - \vec{f}') + \vec{f}_\beta \\ \vec{F}_\gamma = -\vec{f}_\alpha - \vec{f}_\beta & \vec{F}'_\gamma = \vec{0} & \vec{F}_\gamma - \vec{F}'_\gamma = -\vec{f}_\alpha - \vec{f}_\beta \end{array}$$

Pour $|t| < t_1 < \frac{4R}{u}$, si $g_\alpha(t)$, $g_\beta(t)$, $g_\gamma(t) < \frac{Mt^2}{R^2}$, $|\vec{F}_\alpha - \vec{F}'_\alpha|$, $|\vec{F}_\beta - \vec{F}'_\beta|$, $|\vec{F}_\gamma - \vec{F}'_\gamma|$ restent $< \frac{2M}{R^2}$ pourvu que $u > U_1$.

En prenant $U_1 = \sup(U_1'', U_2'', U_3'', U_4'', U_5'')$ les conditions des lemmes 1' et 1" sont satisfaites, donc $|\vec{f} - \vec{f}'|$, $|\vec{f}_\alpha|$, $|\vec{f}_\beta|$ restent $< \frac{M}{R^2}$ et le lemme 1 en résulte.

De là on déduit le théorème 1

Quand $t = 0$, $\vec{g}_\alpha(0)$, $\vec{g}_\beta(0)$, $\vec{g}_\gamma(0)$ sont nulles, ainsi que leurs dérivées premières : $\vec{h}_\alpha(0)$, $\vec{h}_\beta(0)$, $\vec{h}_\gamma(0)$ et leurs dérivées secondes : $(\vec{F}_\alpha - \vec{F}'_\alpha)_0$, $(\vec{F}_\beta - \vec{F}'_\beta)_0$, $(\vec{F}_\gamma - \vec{F}'_\gamma)_0$. Elles croissent donc, au plus, comme t^3 et il existe donc tout un intervalle $(-t_1, +t_1)$ où : $g_\alpha(t)$, $g_\beta(t)$, $g_\gamma(t) < \frac{Mt^2}{R^2}$

et soit t_1 la première valeur de $|t|$ pour laquelle l'une des 3 égalités est satisfaite.

Si on avait $t_1 < \frac{4R}{u}$, alors pour $|t| < t_1$ seraient satisfaites les conditions du lemme 1, et donc ;

$$\left| \frac{d^2 \vec{g}_\alpha}{dt^2} \right|, \left| \frac{d^2 \vec{g}_\beta}{dt^2} \right|, \left| \frac{d^2 \vec{g}_\gamma}{dt^2} \right| < \frac{2M}{R^2}$$

et, en intégrant 2 fois de 0 à t_1 , on aura à coup sur :

$$|g(t_1)| < \int_0^{t_1} dz \int_0^z \left| \frac{d^2 \vec{g}}{dt^2} \right| dt < \int_0^{t_1} dz \int_0^z \frac{2M}{R^2} dt = \frac{M}{R^2} t_1^2$$

ce qui est contraire à l'hypothèse suivant laquelle l'une des 3 quantités $|g(t_1)| = \frac{M}{R^2} t_1^2$.

THEOREME 1. - Pourvu que $u > U_1$, pour tout $|t| < \frac{4R}{u}$, les 3 quantités $g_\alpha(t)$, $g_\beta(t)$, $g_\gamma(t)$ restent $< \frac{Mt^2}{R^2}$

Les conditions du lemme 1 sont alors satisfaites avec $t_1 = \frac{4R}{u}$ et donc $|\vec{F}_\alpha - \vec{F}'_\alpha|$, $|\vec{F}_\beta - \vec{F}'_\beta|$, $|\vec{F}_\gamma - \vec{F}'_\gamma|$ restent $< \frac{2M}{R^2}$

Comme, pour chaque corps,

$$\vec{h}(t) = \int_0^t (\vec{F} - \vec{F}') dz$$

$$|h(t)| < \int_0^t |\vec{F} - \vec{F}'| dz < \int_0^t \frac{2M}{R^2} dz = \frac{2Mt}{R^2}$$

D'où le

THÉOREME 2. - Pourvu que $u > U_1$, pour tout $|t| < \frac{4R}{u}$, les 3 quantités $h_x(t)$, $h_\beta(t)$, $h_\gamma(t)$ restent $< \frac{2M}{R^2} t$.

5. Démonstration du critère de KHILMI [9]

K. A. SITNIKOV en donne la démonstration suivante :

On désigne par $\rho(t)$ la plus petite des 3 distances mutuelles à l'instant t et par $\sigma(t)$ la plus petite de leurs dérivées à l'instant t , et on suppose

$$\sigma_0 > 0, \quad \rho_0(\sigma_0)^2 > 16M. \quad \text{Pour } t=0, \quad \rho(t) - \rho_0 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\rho}{dt} \geq \sigma_0 > \frac{\sigma_0}{2}.$$

Il existe donc un intervalle $(0, t_1)$ où :

$$\rho(t) - \rho_0 > \frac{\sigma_0}{2} t$$

et soit t_1 le premier instant où $\rho(t_1) - \rho_0 = \frac{\sigma_0}{2} t_1$. Alors, pour $0 \leq t < t_1$, la force agissant sur chaque corps est $< \frac{2M^2}{(\rho + \frac{\sigma_0}{2} t)^2}$ et la variation de vitesse qu'elle entraîne entre $t=0$ et $t \leq t_1$ vérifie :

$$|\Delta v| < \int_0^t \frac{2M dz}{(\rho_0 + \frac{\sigma_0}{2} z)^2} = \frac{4M}{\sigma_0} \left(-\frac{1}{\rho_0 + \frac{\sigma_0}{2} t} + \frac{1}{\rho_0} \right) < \frac{4M}{\rho_0 \sigma_0}$$

\vec{u} étant la vitesse relative de 2 corps (de vitesses \vec{v}_1 et \vec{v}_2)

$$\vec{u}(t) = \vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)$$

$$\vec{u}(t) = \vec{u}(0) + \Delta \vec{v}_1 - \Delta \vec{v}_2$$

et, en projetant sur le rayon vecteur :

$$\left(\frac{d\rho}{dt} \right)_t = \left(\frac{d\rho}{dt} \right)_0 + (\Delta v_1 - \Delta v_2) \cdot \frac{\vec{\rho}(t)}{\rho(t)}$$

Or

$$(\Delta \vec{v}_1 - \Delta \vec{v}_2) \cdot \frac{\vec{\rho}(t)}{\rho(t)} \leq |\Delta \vec{v}_1| + |\Delta \vec{v}_2| < \frac{8M}{\rho_0 \sigma_0} < \frac{\sigma_0}{2}$$

puisque par hypothèse $\rho_0 \sigma_0^2 > 16M$.

En outre $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_0 > \sigma_0$

donc

$$\frac{d\rho}{dt} > \frac{\sigma_0}{2}, \quad \forall t \leq t_1$$

et donc

$$\rho(t_1) - \rho_0 > \frac{\sigma_0}{2} t_1$$

d'où contradiction avec l'hypothèse définissant t_1 . Par conséquent, il n'existe pas de valeur t_1 du temps pour laquelle $\rho(t_1) - \rho_0 = \frac{\sigma_0}{2} t_1$ et le critère de Khilmi est démontré.

6. Démonstration du critère de SITNIKOV.

LEMME 2. - Si $q_0 \sigma_0^2 > 24M$, et si, $\forall t \leq T$, les distances $\beta \alpha$ et $\beta \gamma$ sont $> \frac{q_0 + \sigma_0 t}{2}$, alors,

$$\forall t \leq T, \quad \rho(t) > q_0 + \frac{\sigma_0 t}{2}$$

En effet sur le centre de gravité G de α et γ agit la force : $\frac{2M^2}{(\beta G)^2}$ qui lui communique une accélération $\frac{M}{(G\beta)^2} < \frac{M}{\left(\frac{q_0 + \sigma_0 t}{2}\right)^2}$

Sur β agit la même force qui lui communique une accélération

$$\frac{2M}{(G\beta)^2} < \frac{M}{\left(\frac{q_0 + \sigma_0 t}{2}\right)^2}$$

Et de la sorte, entre les instants 0 et $t \leq T$, on a, pour les variations de vitesses de G et β :

$$|\Delta v_G| < \int_0^t \frac{M dz}{\left(\frac{q_0 + \sigma_0 z}{2}\right)^2} < \frac{4M}{\sigma_0} \left(-\frac{1}{q_0 + \sigma_0 t} + \frac{1}{q_0}\right) < \frac{4M}{q_0 \sigma_0}$$

$$|\Delta v_\beta| < \frac{8M}{q_0 \sigma_0}$$

Posons

$$\vec{u}(t) = \vec{v}_\beta(t) - \vec{v}_G(t)$$

$$\vec{u}(t) = \vec{u}(0) + \Delta \vec{v}_\beta - \Delta \vec{v}_G$$

et, en projetant sur le rayon vecteur :

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{df}{dt}\right)_0 + (\Delta \vec{v}_\beta - \Delta \vec{v}_G) \cdot \frac{\vec{f}(t)}{f(t)}$$

Or

$$(\Delta \vec{v}_\beta - \Delta \vec{v}_G) \cdot \frac{\vec{f}(t)}{f(t)} \leq |\Delta \vec{v}_t| + |\Delta \vec{v}_\beta| < \frac{12 M}{q_0 \sigma_0} < \frac{\sigma_0}{2}$$

puisque par hypothèse $q_0 \sigma_0^2 > 24 M$

En outre $\left(\frac{df}{dt}\right)_0 > \frac{\sigma_0}{2}$ et donc $\frac{df}{dt} > \frac{\sigma_0}{2}$, $\forall t \leq T$.

Donc, $\forall t \leq T$, $f(t) > q_0 + \frac{\sigma_0}{2} t$

LEMME 3. - Si $-H_0 > \frac{M}{q_0} + \frac{12}{\sigma_0} \sqrt{\frac{M^3}{q_0^3}}$, et si, $\forall t < T$, les distances

$$\beta \alpha \text{ et } \beta \gamma \text{ sont } > \frac{q_0 + \sigma_0 t}{2}$$

alors, $\forall t \leq T$, $r(t) < q_0$

On applique le théorème de l'énergie cinétique au mouvement de α et γ autour de leur centre de gravité G .

$$T(\alpha) + T(\gamma) = M w^2.$$

Les forces intérieures dérivent du potentiel $U = \frac{M^2}{r}$.

Les forces extérieures sont les actions de β sur α et γ , \vec{f} et $-\vec{f}_\beta$, qui développent la puissance :

$$\Pi = \vec{f} \cdot \vec{v}_r(\alpha) - \vec{f}_\beta \cdot \vec{v}_r(\gamma) = (\vec{f} + \vec{f}_\beta) \cdot \vec{w}$$

et le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$w^2 - \frac{M}{r} = H_0 + \int_0^t \frac{\Pi(t)}{M} dt = H_0 + \frac{w(t)}{M}.$$

Pour $t = 0$, les inégalités $\frac{M}{q_0} < -H_0 - \frac{12}{\sigma_0} \left(\frac{M}{q_0}\right)^{3/2} < \frac{M}{r_0}$ entraînent $r_0 < q_0$

Il existe un intervalle $(0, t_1)$ où $r(t)$ reste $< q_0$; soit t_1 la première

valleur de t telle que $r(t_1) = q_0$

$$\frac{w(0)}{M} = 0 < \frac{12}{\sigma_0} \left(\frac{M}{q_0}\right)^{3/2} < -H_0 - \frac{M}{q_0}$$

$$\frac{w(t_1)}{M} = -H_0 - \frac{M}{q_0} + (w[t_1])^2 \geq -H_0 - \frac{M}{q_0}$$

Il existe donc $t_2 \leq t_1$ tel que :

$$\frac{w(t_2)}{M} = -H_0 - \frac{M}{q_0} \text{ et, si } 0 \leq t < t_2, \frac{w(t)}{M} < -H_0 - \frac{M}{q_0} .$$

On en déduit que, pour $0 \leq t < t_2$,

$$(w[t])^2 = \frac{w(t)}{M} + H_0 + \frac{M}{r(t)} < \frac{M}{r(t)} - \frac{M}{q_0} < \frac{M}{r(t)}$$

Evaluons directement $w(t_2)$.

$$|\vec{f} + \vec{f}_\beta| \leq \left| |\vec{f}| - |\vec{f}_\beta| \right| + 2 |\vec{f}| \sin \frac{\varphi}{2} ,$$

φ désignant l'angle de \vec{f} et $-\vec{f}_\beta$

Supposons alors que $t_1 \leq T$. A fortiori $t_2 \leq t_1 \leq T$ et, pour $0 \leq t < t_2 \leq T$, les distances $\beta \gamma$ et βx seront $> \frac{q_0 + \sigma_0 t}{2}$

$$\text{On a alors, d'une part : } |\vec{f}| < \frac{M^2}{\left(\frac{q_0 + \sigma_0 t}{2}\right)^2}, \quad 2 \sin \frac{\varphi}{2} < \frac{r}{\frac{q_0 + \sigma_0 t}{2}}$$

d'où

$$2 |\vec{f}| \sin \frac{\varphi}{2} < \frac{M^2}{\left(\frac{q_0 + \sigma_0 t}{2}\right)^3}$$

et d'autre part :

$$\left| |\vec{f}| - |\vec{f}_\beta| \right| \leq \sup \left(\frac{M^2}{x^2} - \frac{M^2}{(x+r)^2} \right) \text{ pour } x > \frac{q_0 + \sigma_0 t}{2}$$

soit

$$\begin{aligned}
\left| |\vec{f}| - |\vec{f}_\beta| \right| &= \frac{M^2}{\left(\frac{q_0 + \sigma_0 t}{2}\right)^2} - \frac{M^2}{\left(\frac{q_0 + \sigma_0 t}{2} + r\right)^2} = \frac{M^2}{\left(\frac{q_0 + \sigma_0 t}{2}\right)^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\left[1 + \frac{2r}{q_0 + \sigma_0 t}\right]^2}\right) \\
&= \frac{2M^2 r}{\left(\frac{q_0 + \sigma_0 t}{2}\right)^3} \frac{1 + \frac{r}{q_0 + \sigma_0 t}}{\left(1 + \frac{2r}{q_0 + \sigma_0 t}\right)^2} < \frac{2M^2 r}{\left(\frac{q_0 + \sigma_0 t}{2}\right)^3}
\end{aligned}$$

d'où finalement :

$$|\vec{f} + \vec{f}_\beta| < \frac{24M^2 r(t)}{(q_0 + \sigma_0 t)^3} .$$

Alors, pour $0 \leq t < t_2 \leq T$,

$$\Pi(t) = (\vec{f} + \vec{f}_\beta) \cdot \vec{w} \leq |\vec{f} + \vec{f}_\beta| \cdot |\vec{w}| < \frac{24 M^{5/2} \sqrt{r}}{(q_0 + \sigma_0 t)^3} < \frac{24 M^{5/2} \sqrt{q_0}}{(q_0 + \sigma_0 t)^3}$$

$$\text{et } \frac{w(t_2)}{M} = \int_0^{t_2} \frac{\Pi(t)}{M} dt < \frac{24 M^{3/2} \sqrt{q_0}}{\sigma_0} \left(\frac{1}{2q_0^2} - \frac{1}{2[q_0 + \sigma_0 t]^2} \right)$$

$$< \frac{12}{\sigma_0} \left(\frac{M}{q_0}\right)^{3/2} < -H_0 - \frac{M}{q_0} \quad \text{par hypothèse .}$$

Ceci contredit la supposition $\frac{w(t_2)}{M} = -H_0 - \frac{M}{q_0}$.

Donc t_2 ne peut être que $> T$, et donc aussi t_1 , et, pour tous $t \leq T$, $r(t) < q_0$.

Le critère de Sitnikov résulte alors de ces 2 lemmes.

Supposons en effet que :

$$q_0 (\sigma_0)^2 > 24 M \quad \text{et} \quad \frac{12}{\sigma_0} \left(\frac{M}{q_0}\right)^{3/2} + \frac{M}{q_0} < -H_0$$

Nous avons, pour $t = 0$, les inégalités :

$$r < q_0 \quad \text{et} \quad \rho > q_0 + \frac{\sigma_0 t}{2} = q_0$$

et alors, comme $\beta \alpha \gg \beta G - \alpha G$ et $\beta \gamma \gg \beta G - \gamma G$

$$\beta \alpha > \frac{q_0 + \sigma_0 t}{2} \quad \beta \gamma > \frac{q_0 + \sigma_0 t}{2}$$

Ces inégalités seront donc encore satisfaites dans tout un intervalle où $t > 0$.

Montrons qu'il est impossible que l'une de ces inégalités cesse d'être vérifiée à un instant $t = t_3$ fini, soit donc t_3 fini tel que :

$$\text{ou bien } \beta \alpha(t_3) = \frac{q_0 + \sigma_0 t_3}{2}, \text{ ou bien } \beta \gamma(t_3) = \frac{q_0 + \sigma_0 t_3}{2}$$

et que, pour $0 \leq t < t_3$, on ait simultanément

$$\beta \alpha(t) < \frac{q_0 + \sigma_0 t}{2} \quad \text{et} \quad \beta \gamma(t) < \frac{q_0 + \sigma_0 t}{2}$$

Les conditions d'application des lemmes 2 et 3 sont alors satisfaites (avec $T = t_3$) ; et ainsi, pour $t \leq t_3$, on a :

$$r(t) < q_0 \quad f(t) > q_0 + \frac{\sigma_0 t}{2}$$

$$\text{Comme } \beta \alpha(t), \beta \gamma(t) > f(t) - \frac{r(t)}{2}$$

$$\text{on aura en particulier } \beta \alpha(t_3), \beta \gamma(t_3) > \frac{q_0 + \sigma_0 t_3}{2}$$

ce qui contredit l'hypothèse définissant t_3 .

Ainsi est démontré le critère de Sitnikov de mouvement β -hyperbolique-elliptique.

V

1. - En conclusion, SITNIKOV a mis en évidence une famille de mouvements de 3 corps, dépendant de 4 paramètres, où le mouvement est de classe hyperbolique quand $t \rightarrow +\infty$, et de classe β -hyperbolique-elliptique quand $t \rightarrow -\infty$, ce qui contredit la théorie de J. CHAZY sur la question. Mais, dans l'espace à 12 dimensions des mouvements des 3 corps de masse $M \alpha, \beta, \gamma$, cette famille à 4 paramètres est de mesure nulle et ne suffit donc pas à une réfutation totale des assertions de J. CHAZY dans la région $h > 0$. Il faudrait, pour cette réfutation, soit un exemple analogue, à 12 paramètres, ce qui semble difficile, soit (si c'est possible), un exemple d'échange, analogue à celui de BECKER, traité par des méthodes analogues à celles de SITNIKOV.

2. - Notons que le travail de K. A. SITNIKOV ne contredit pas les conclusions de J. CHAZY [5], corrigées par MERMAN [11] dans le cas où $h \leq 0$. Donc les conclusions de J. CHAZY concernant la dislocation spontanée du système solaire, ou concernant les comètes, ne sont pas touchées. Seules sont touchées ses conclusions

concernant la dislocation provoquée du système solaire.

Dans le cas $h \leq 0$, il pourrait évidemment être intéressant d'achever la démonstration en justifiant l'assertion postulée par J. CHAZY suivant laquelle tout mouvement limite d'un mouvement hyperbolique-elliptique est parabolique-elliptique de même classe ; ou bien encore de construire des exemples de mouvements non réversibles, prouvant que la probabilité nulle de non-réversibilité dans la région $h \leq 0$ peut être réalisée.

3. - Dans la région $h > 0$, il peut être intéressant d'examiner les limites du domaine de capture dans l'espace à 12 dimensions. On obtient les domaines où la capture n'est pas possible comme intersection de chacun des 4 domaines et de son symétrique par rapport à la variété linéaire où tous les p_i sont nuls.

Outre cela, peut-être certaines interdictions (interdiction d'échanges par exemple) pourrait-elle être démontrées, bien que cela semble difficile, les 3 masses pouvant prendre des valeurs quelconques.

4. - Dans le problème général des n corps, il semble que l'on puisse affirmer 2 choses :

- la région $h < 0$, et de même la région $h > 0$ sont symétriques par rapport à la variété linéaire où tous les p_i sont nuls.
- la région "intérieure" des mouvements bornés et oscillants possède également cette symétrie (il faudrait malgré tout étudier beaucoup plus profondément la démonstration donnée par J. CHAZY).

On obtient alors la réversibilité globale de la propriété $h > 0$, ce qui donne un résultat dans le problème des 2 corps, mais déjà plus dans le problème des 3 corps.

On obtient la réversibilité globale des mouvements de la région "intérieure".

On obtient enfin la réversibilité globale du complémentaire de la région "intérieure" dans la région $h < 0$. Ce complémentaire lui-même sera divisé en régions disjointes, si la variété $h = 0$ est régionnée par les variétés où se produisent les mouvements paraboliques (puisque la région "intérieure" a des éléments aussi proches qu'on veut de ces variétés). On voit ainsi l'intérêt des variétés paraboliques du mouvement des n corps et l'intérêt de l'étude faite par J. CHAZY [3] des figures d'équilibre des n corps, qui sont les figures limites de ces mouvements. Mais, alors que les régions dont il est question, et qui possèdent, chacune dans son ensemble, la propriété de réversibilité,

- ou bien n'existent pas dans le problème des 2 corps
- ou bien correspondent chacune à une seule classe de mouvement dans le problème des 3 Corps
- dans le problème des n corps, elles pourront au contraire correspondre chacune à plusieurs classes de mouvements (par exemple : pour 4 corps, le système 1 - 2, le corps 3 et le corps 4 forment un système hyperbolique de 3 corps ; ou bien le système 1 - 2 et le système 3 - 4 forment un système hyperbolique de 2 corps ; ou bien le système borne 1 - 2 - 3 et le corps 4 forment un système hyperbolique de 2 corps) ; il n'y aura donc pas réversibilité, classe par classe, mais globale pour certaines familles de mouvement pouvant appartenir à des classes diverses.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BECKER (L.). - On capture orbits, Month. Not. roy. astr. Soc., t. 80, 1920, p. 590-597.
- [2] BIRKHOFF (Georges D.). - Dynamical systems. - New York, American mathematical Society, 1927 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 9) ; p. 282.
- [3] CHAZY (Jean). - Sur certaines trajectoires du problème des n corps, Bull. astr., Série 1, t. 35, 1918, p. 321-389.
- [4] CHAZY (Jean). - Sur l'allure du mouvement dans le problème des 3 corps quand le temps croît indéfiniment, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., Série 3, t. 39, 1922, p. 29-130.
- [5] CHAZY (Jean). - Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des 3 corps (cas $h \leq 0$), J. Math. pures et appl., Série 9, t. 8, 1929, p. 353-380.
- [6] CHAZY (Jean). - Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des 3 corps (cas $h > 0$), Bull. astr., Série 2, t. 8, 1932, p. 403-436.
- [7] GAZARYAN (Yu. L.). - Sur la démonstration de Chazy ... [en russe], Moskov. Gos. Univ. Soobšč. Astr. Inst. t. 92, 1953, p. 23-45.
- [8] HÉNON (M.). - Dynamique des amas d'étoiles, Séminaire Janet, t. 2, 1958/59, exposé n° 7.
- [9] KHIL'MI (G. F.). - Problema n tel v nebesnoj mekhanike i kosmogonii (Le problème de n corps en mécanique céleste et en cosmogonie). - Moskva, Izdatel'stvo Akademii Nauk SSSR, 1951 (Akademija Nauk SSSR Geofiziceskij Institut).
- [10] KOLMOGOROV (A. N.). - Théorie générale des systèmes dynamiques de la mécanique classique [en russe], Proceedings of the international Congress of Mathematicians [1954. Amsterdam], vol. 1. - Groningen, Noordhoff et Amsterdam North-Holland publishing, 1957 ; p. 315-333 (Traduction par J.-P. BENZECRI, Séminaire Janet, t. 1, 1957/58, exposé n° 6).
- [11] MERMAN (G. A.). - Sur les recherches de Chazy dans le problème des 3 corps [en russe], Byull. Inst. Teoret. Astr., t. 5, 1954, p. 594-605.

- [12] MERMAN (G. A.) et KOČINA (N. G.). - Sur les frontières du domaine de capture dans le problème hyperbolique plan restreint du problème des 3 corps, Byull. Inst. Teoret. Astr., t. 6, 1954, p. 349.
- [13] SCHWARZSCHILD (K.). - Über die Stabilität der Bewegung eines durch Jupiter gefangenen Kometen, Astr. Nachr., t. 141, 1896, p. 1-8.
- [14] SITNIKOV (K. A.). - O vozmožnosti zakhvata v zadache trekh tel, Rec. math. Soc. math. Moscou (Mat. Sbornik) , t. 32 (74), 1953, p. 693-705.
- [15] SMIDT (O. J.). - Sur la possibilité de capture dans le problème des 3 corps, Doklady Akad. Nauk SSSR, N. S., t. 58, 1947, p. 213-216.

Voir aussi :

LEIMANIS (E.). - Some recent advances in the dynamics of rigid bodies and celestial mechanics, p. 84 (Surveys in applied mathematics, 2. Dynamics and nonlinear mechanics. - New York, J. Wiley, 1958).
