Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

C. Beresford Rayner

Le corps rigide en relativité générale

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 2 (1958-1959), exp. nº 8, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1958-1959__2__A8_0>

21 février 1959

LE CORPS RIGIDE EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE.

par C. Beresford RAYNER

1. Introduction.

Les avantages du concept du corps rigide dans la mécanique classique sont bien connus : ils sont

a. la dynamique d'un corps fini peut se discuter sans l'embarras des constantes élastiques spéciales, lesquels, on le sait, n'affectent pas beaucoup son mouvement.

b. le fait que le corps rigide classique ne possède que six degrés de liberté réduit le problème dynamique à la solution des équations différentielles ordinaires au lieu des équations différentielles partielles. Ces circonstances rendent fort désirable que le concept de la rigidité se transporte dans la relativité générale. Empruntant une phrase d'un papier sur ce sujet par N. ROSEN, je peux dire que l'absence du concept d'un corps rigide dans une théorie dynamique serait très préjudiciable à la théorie.

Plusieurs essais dans le passé ont été faits pour définir la rigidité en relativité générale. Entre ceux-ci, je me bornerai à un, à savoir, celui de ROSEN [3] qui a exigé que le vecteur unitaire tangent λ^α aux lignes d'univers des particules d'un corps rigide satisfasse aux équations différentielles :

$$\nabla_\alpha \lambda_\beta + \nabla_\beta \lambda_\alpha + \lambda^\gamma (\lambda_\alpha \nabla_\gamma \lambda_\beta + \lambda_\beta \nabla_\gamma \lambda_\alpha) = 0 \tag{1.1}$$

où j'ai pris la signature (+ + + -) pour la métrique de l'espace-temps. Cependant il n'a pas justifié ces équations sauf par analogie avec les équations classiques $u_{i,j} + u_{j,i} = 0$.

SALZMAN et TAUB [4] ont donné une dérivation de (1.1) basée sur une définition intuitive infinitésimale donnée par HERGLOTZ [2] et d'autres.

2. Définition géométrique d'un mouvement rigide.

Je donnerai maintenant une définition géométrique d'un mouvement rigide sur une variété riemannienne, et je montrerai (paragraphe 3) que les équations de

ROSEN (1.1) se déduisent de cette définition lorsque certaines conditions de différentiabilité sont satisfaites. Pour simplifier le travail, je supposerai que la riemannienne ait une métrique définie positive, et je signalerai après la manière par laquelle la définition peut se modifier pour une métrique à signature hyperbolique normale.

i. V_n est une variété riemannienne de classe C' munie d'une métrique $g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$ où les éléments $g_{\alpha\beta}$ sont continus

ii. Une fibration $[\mathfrak{G}, R, L, p]$ est définie sur un domaine ouvert $\mathfrak{G}$ de V_n. C'est-à-dire, une relation d'équivalence est donnée sur $\mathfrak{G}$ telle que :

ii a. l'ensemble des points équivalents à un point x dans $\mathfrak{G}$ est homéomorphe à un ensemble L, où L peut être la ligne euclidienne ou le cercle ;

ii b. le quotient $\mathfrak{G}/R \equiv \mathfrak{G}'$ est un domaine ouvert sur une variété différentiable V'_{n-1} de classe C' et de dimension $n-1$;

ii c. la projection p de $\mathfrak{G}$ sur $\mathfrak{G}'$, c'est-à-dire l'application de $\mathfrak{G}$ sur $\mathfrak{G}'$ selon la définition de $\mathfrak{G}'$ comme espace-quotient, est partout une application différentiable de classe C' et de rang $n-1$;

ii d. $\mathfrak{G} \simeq \mathfrak{G}' \times L$. La configuration ainsi construite sera appelée une congruence de courbes $\{\Lambda\}$ sur V_n. Les membres de cette congruence seront appelés Λ-courbes, notés Λ, et deux Λ-courbes seront distinguées par suffixes.

iii. Une courbe rectifiable dans V_n est définie localement par des équations $x^\alpha = \xi^\alpha(t)$ où les ξ^α sont des fonctions continues, C' par morceaux, d'un paramètre t.

iv. La distance $d(x, y)$ entre deux points (x, y) de V_n est la limite inférieure des longueurs de toutes les courbes rectifiables qui joignent x et y.

v. La distance $\ell(x, \Lambda)$ du point x de la courbe Λ est la limite inférieure $\lim\limits_{\inf} d(x, y)$ où $y \in \Lambda$. La quantité $\ell(x, \Lambda)$ varie, en générale, lorsque le point x se déplace le long de la courbe Λ_x, qui passe par x.

vi. Une sphère (ouverte) de rayon ε et de centre x, $S_\varepsilon(x)$ est l'ensemble des points de V_n dont la distance de x se trouve moins de ε.

vii. Le ε-voisinage $\mathcal{N}_\varepsilon(\Lambda)$ de Λ est l'ensemble $\sum S_\varepsilon(x)$, où $x \in \Lambda$.

viii. La congruence $\{\Lambda\}$ est localement rigide relative à Λ s'il existe un ε-voisinage $\mathcal{N}_\varepsilon(\Lambda)$ dans $\mathfrak{G}$ tel que chaque courbe Λ' qui coupe $\mathcal{N}_\varepsilon(\Lambda)$ a la propriété que sa distance de tout point sur Λ est le même nombre $\ell(\Lambda\ \Lambda')$ $(= \ell(\Lambda'\ \Lambda))$.

ix. La congruence $\{\Lambda\}$ définit un <u>mouvement rigide</u> sur V_n si elle est localement rigide relative à chaque Λ-courbe dans $\{\Lambda\}$.

3. <u>Les équations de Rosen déduites.</u>

Soit V_n de classe C^5, et supposons que la congruence $\{\Lambda\}$ définisse un mouvement rigide au sens précédent. D'ailleurs, supposons que les Λ-courbes aient un vecteur tangent unitaire λ^α dont les éléments sont de classe C^2. On peut montrer que, par chaque x_0 dans $\mathcal{D}$, on peut choisir $\varepsilon\ (>0)$ tel que, quand $x \in \mathcal{S}_\varepsilon(x_0)$ et $y \in \mathcal{S}_{4\varepsilon}(x_0) - \mathcal{T}_{2\varepsilon}(\Lambda_0) \cap \mathcal{S}_{4\varepsilon}(x_0)$, une fonction $\phi(x, \Lambda_y)$, de classe C^2 existe, qui satisfait à l'équation

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} = 1 \ , \tag{3.1}$$

et qui est égale à $\ell(x, \Lambda_y)$ dans son domaine d'existence. Ici, Λ_0, Λ_y passent par x_0, y, respectivement.

D'après l'hypothèse de rigidité locale relative à Λ_y la fonction $\phi(x, \Lambda_y)$ satisfait aussi à l'équation différentielle

$$\lambda^\alpha \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{3.2}$$

dans $\mathcal{S}_\varepsilon(x_0)$. Les équations (3.1) et (3.2) admettent ainsi une solution commune de classe C^2, et elles sont <u>compatibles</u> au sens de CHARPIT [1] par. 445 ; on va étudier les conséquences de ce fait.

Ecrivant $p_\alpha = \partial\phi/\partial x^\alpha$, $p_{\alpha\beta} = \partial^2\phi/\partial x^\alpha \partial x^\beta$, on peut différencier (3.1) et (3.2) dans la région $\mathcal{S}_\varepsilon(x_0)$, et l'on obtient

$$\begin{cases} g^{\alpha\beta}\, p_\alpha\, p_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}\, p_{\alpha\beta} = 0 \\ \lambda^\gamma\, p_{\beta\gamma} + \lambda^\gamma{}_{,\beta}\, p_\gamma = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

où la virgule veut dire différentiation partielle. Eliminant les dérivées secondes on obtient

$$p^\alpha\, p^\beta\, \nabla_\alpha \lambda_\beta = 0 \tag{3.4}$$

où p_α est le vecteur unitaire (par (3.1)) contravariant orthogonal à λ^α (par (3.2)).

(3.5) $$p^{\alpha} \equiv g^{\alpha\beta} \, p_{\beta} \equiv g^{\alpha\beta} \, \partial\phi/\partial x^{\beta} \quad .$$

On peut montrer que l'ensemble des courbes Λ_y , donnant lieu aux fonctions $\phi(x , \Lambda_y)$, est tel que le vecteur p^{α} dans (3.4) peut être choisi arbitrairement à la condition $\lambda_{\alpha} p^{\alpha} = 0$ près. Il en résulte qu'il existe un vecteur θ_{α} tel que

(3.6) $$\nabla_{\alpha}\lambda_{\beta} + \nabla_{\beta}\lambda_{\alpha} = \theta_{\alpha}\lambda_{\beta} + \theta_{\beta}\lambda_{\alpha} \quad .$$

Pour déterminer θ_{α} , on multiplie (3.6) successivement par λ^{α}, $\lambda^{\alpha}\lambda^{\beta}$, ce qui donne

$$\theta_{\alpha} = \lambda^{\gamma} \, \nabla_{\gamma} \, \lambda_{\alpha}$$

ce qu'il faut démontrer.

4. Modifications de la définition pour l'espace-temps.

La définition du paragraphe 2 d'un mouvement rigide peut se modifier de la manière suivante pour qu'elle s'applique aussi à une variété riemannienne à métrique hyperbolique normale et de signature $(+ + + \ldots + -)$. Premièrement les courbes de la congruence $\{\Lambda\}$ satisfont à (ii) et en outre possèdent un vecteur tangent unitaire λ^{α} avec des éléments continus. Dans le cas hyperbolique normal ce vecteur doit être orienté dans le temps, c'est-à-dire, $g_{\alpha\beta}\lambda^{\alpha}\lambda^{\beta} < 0$. Deuxièmement une courbe normale dans V_n est définie localement par des équations $x^{\alpha} = \xi^{\alpha}(t)$, où les ξ^{α} sont continus, de classe C^1 par morceaux, dans le paramètre t , et tels que $\lambda_{\alpha}\, d\xi^{\alpha}/dt = 0$ quand le premier membre existe.

Troisièmement la distance $\ell(x ; \Lambda)$ de la courbe Λ du point x est la limite inférieure des longueurs de toutes les courbes normales qui joignent x à des points sur Λ . Quatrièmement, le ε -voisinage $\mathcal{N}_{\varepsilon}(\Lambda)$ de Λ est l'ensemble de tous les points qui peuvent être joints à des points sur Λ par des courbes normales de longueur moins de ε .

Avec cette nouvelle définition, la démonstration des équations de Rosen se trouve compliquée par le fait que $\{\Lambda\}$ peut être ou ne pas être une congruence normale. La difficulté est en établissant l'existence d'une fonction $\phi(x , \Lambda)$ de classe C^2 de satisfaire au système

$$(4.1)\qquad \begin{cases} (g^{\alpha\beta} + \lambda^{\alpha}\lambda^{\beta}) \dfrac{\partial\phi}{\partial x^{\alpha}} \dfrac{\partial\phi}{\partial x^{\beta}} = 1 \\ \lambda^{\alpha} \dfrac{\partial\phi}{\partial x^{\alpha}} = 0 \end{cases}$$

qui est, bien entendu, l'analogue du système (3.1), (3.2). L'équivalence approximative des deux définitions paraît (si l'on admet l'existence de la fonction ϕ) dans l'équivalence du système (3.1), (3.2) avec (4.1).

Il n'est pas difficile quand même, d'établir les équations de Rosen pour un espace à métrique hyperbolique normale, si l'on commence avec une définition semblable à celle du paragraphe 2 mais qui se sert des géodésiques satisfaisant aux équations

$$(4.2)\qquad \frac{d^2 x^{\alpha}}{ds^2} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \frac{dx^{\beta}}{ds} \frac{dx^{\gamma}}{ds} = 0 .$$

On peut définir la distance $\ell(x , \Lambda)$ d'une courbe orientée dans le temps d'un point voisin comme la limite supérieure des longueurs de toutes les géodésiques orientées dans l'espace qui joignent le point à cette courbe. La variété riemannienne en ce cas doit être de classe C^2.

5. Le système fini rigide en relativité générale.

Jusqu'à maintenant je me suis donné la peine d'éviter une définition de la rigidité qui fait usage des équations de Rosen, pour que la définition soit vraiment géométrique. Il est possible, mais moins intéressant, de montrer que les équations de Rosen avec les hypothèses (ii) entraînent la définition d'un mouvement rigide aux trois sens que j'ai donnés. En me servant de ce fait, je donne maintenant une définition d'un système fini rigide en relativité générale.

Un espace-temps V_4 ayant les propriétés de différentiabilité données par le Professeur LICHNEROWICZ avec un champ de vecteurs unitaires λ^{α}, de classe C' défini sur un domaine $\mathfrak{D}$ de V_4 seront appelés système fini rigide pourvu que les propriétés suivantes aient lieu :

a. La topologie de l'espace-temps est celle d'un produit d'une variété V_1 à une dimension (partout orientée dans le temps, par rapport à V_4) avec une variété à trois dimensions V_3. D'ailleurs $\mathfrak{D} \simeq \mathfrak{D}' \times V_1$, où V_1 est partout tangent à la direction λ^{α} relatif à V_4 et $\mathfrak{D}'$ est un ensemble compact de V_3 tel que l'application $\mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{D}'$ est de classe C^1 et de rang 3.

b. La frontière t de $\mathcal{D}$ consiste en un nombre fini de surfaces :

(5.1) $$\psi(x) = 0$$

partout orientées dans le temps, où le vecteur normal $\psi_{,\alpha}$ (orienté dans l'espace) existe partout sur t. Les surfaces t sont les seules surfaces non isotropes à travers desquelles il existe des discontinuités des dérivées secondes des $g_{\alpha\beta}$.

c. Les quantités $(g_{\alpha\beta}, \lambda_\gamma)$ satisfont dans $\mathcal{D}$ aux équations

(5.2) $$f^\alpha \equiv G^\alpha_\beta \lambda^\beta - \rho\lambda^\alpha = 0 ,$$

et aux équations de Rosen (1.1). Ici, ρ est la densité propre

(5.3) $$\rho \equiv - G_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta > 0 ,$$

de sorte que

(5.4) $$f^\alpha \lambda_\alpha \equiv 0 .$$

Sur t, elles ont des valeurs telles que

(5.5) $$\begin{cases} G_\alpha^\beta \, \psi_{,\beta} = 0 \\ \lambda^\beta \, \psi_{,\beta} = 0 \end{cases}$$

Dans $\mathcal{E} \equiv V_4 - \mathcal{D}$, les $g_{\alpha\beta}$ satisfont aux équations de vide :

(5.6) $$G_{\alpha\beta} = 0 .$$

DEFINITION. - Deux systèmes finis rigides $(V_4 ; \mathcal{D}, g_{\alpha\beta}, \lambda_\gamma)$, $(\bar{V}_4, \bar{\mathcal{D}}, \bar{g}_{\alpha\beta}, \bar{\lambda}_\gamma)$ seront dits <u>équivalents</u> si les espaces V_4, $\bar{V}_4$ sont homéomorphes, et, dans les voisinages correspondants, il existe des coordonnées telles que $g_{\alpha\beta} = \bar{g}_{\alpha'\beta'}$, $\lambda_\gamma = \bar{\lambda}_{\gamma'}$.

Maintenant, <u>le problème principal d'existence dans la théorie de la rigidité en relativité générale est de déterminer la manière la plus générale de construire un système fini rigide</u>.

Ce problème, comme on sait, se partage en trois ; à savoir, les problèmes intérieurs, extérieurs, et au bord. Je vais tâcher de réduire le problème intérieur à un problème de Cauchy à trois inconnus sous des hypothèses faibles supplémentaires de différentiabilité. Mais cependant avant que je fasse ceci j'aimerais faire un calcul pour mettre les équations d'Einstein (5.2) dans une forme intéressante.

6. Les équations d'Einstein sous conditions de rigidité.

On obtient la forme (5.2) pour les équations d'Einstein en cas de rigidité de la manière suivante. D'abord, on a

$$(6.1)\qquad \begin{cases} G_{\alpha\beta} = -T_{\alpha\beta} = -\rho\lambda_\alpha\lambda_\beta - S_{\alpha\beta} \\ S_{\alpha\beta}\lambda^\beta = 0 \end{cases}$$

Eliminant le tenseur de pression $S_{\alpha\beta}$, on arrive à (5.2).

Ja vais montrer maintenant que le vecteur f^α du champ s'écrit identiquement dans la forme

$$(6.2)\qquad f^\alpha \equiv \nabla_\beta \sigma^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta}\varkappa_\beta - \sigma^{\beta\gamma}\sigma_{\beta\gamma}\lambda^\alpha$$

lorsque les équations de Rosen (1.1) sont satisfaites par le vecteur λ^α. Ici, $\varkappa_\beta$ est le vecteur de courbure

$$(6.3)\qquad \varkappa_\beta = \lambda^\gamma \nabla_\gamma \lambda_\beta$$

et $\sigma^{\alpha\beta}$ est le tenseur anti-symétrique, d'après (1.1) :

$$(6.4)\qquad \sigma_{\alpha\beta} = \nabla_\beta\lambda_\alpha + \varkappa_\alpha\lambda_\beta = \tfrac{1}{2}(\nabla_\beta\lambda_\alpha - \nabla_\alpha\lambda_\beta + \varkappa_\alpha\lambda_\beta - \varkappa_\beta\lambda_\alpha) .$$

D'abord, par contraction de (1.1)

$$(6.5)\qquad \nabla_\alpha\lambda^\alpha = 0$$

Cette relation, avec les identités de Ricci appliquées au vecteur λ^α, donne

$$(6.6)\qquad \nabla_\alpha\nabla_\gamma\lambda^\alpha = -R_{\gamma\varepsilon}\lambda^\varepsilon .$$

On considère les trois expressions au second membre de (6.2). On a successivement

$$(6.7)\qquad \begin{aligned} \nabla_\beta\sigma^{\alpha\beta} &= -\nabla_\beta\nabla^\alpha\lambda^\beta - \lambda^\alpha\lambda^\gamma\nabla_\beta\nabla_\gamma\lambda^\beta - (\nabla_\beta\lambda^\gamma)(\nabla_\gamma\lambda^\beta)\lambda^\alpha - \varkappa^\beta\nabla_\beta\lambda^\alpha \\ &= R^{\alpha\beta}\lambda_\beta + (R_{\beta\gamma}\lambda^\beta\lambda^\gamma)\lambda^\alpha - (\nabla_\beta\lambda^\gamma)(\nabla_\gamma\lambda^\beta)\lambda^\alpha - \varkappa^\beta\nabla_\beta\lambda^\alpha \end{aligned}$$

$$(6.8)\qquad \sigma^{\alpha\beta}\varkappa_\beta = \varkappa^\beta\nabla_\beta\lambda^\alpha$$

$$(6.9) \qquad \sigma^{\beta\gamma}\sigma_{\beta\gamma} = -(\nabla^\gamma \lambda^\beta + \varkappa^\beta \lambda^\gamma)(\nabla_\gamma \lambda_\beta + \varkappa_\gamma \lambda_\beta) = -(\nabla^\gamma \lambda^\beta)(\nabla_\beta \lambda_\gamma)$$

Il en résulte

$$(6.10) \qquad \nabla_\beta \sigma^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta}\varkappa_\beta - \sigma^{\beta\gamma}\sigma_{\beta\gamma}\lambda^\alpha = R^{\alpha\beta}\lambda_\beta + (R_{\beta\gamma}\lambda^\beta\lambda^\gamma)\lambda^\alpha \ ,$$

et, en substituant la définition du tenseur d'Einstein, on obtient (6.2).

D'une façon toute pareille, on établit les relations

$$(6.11) \qquad \nabla_\alpha f^\alpha + \varkappa_\alpha f^\alpha = -\lambda^\gamma \partial_\gamma \rho = -3\lambda^\gamma \partial_\gamma \sigma$$

qui montrent que les quantités ρ, σ, où $\sigma = \frac{1}{2}\sigma^{\beta\gamma}\sigma_{\beta\gamma}$, restent constantes le long des lignes d'univers. La première équation se produit en se servant de (1.1), (5.2), (6.5) et des propriétés de symétrie et de divergence des équations d'Einstein. On obtient la seconde à l'aide de (6.2) : par suite de l'antisymétrie de $\sigma^{\alpha\beta}$, on a

$$(6.12) \qquad \nabla_\alpha f^\alpha + \varkappa_\alpha f^\alpha = \frac{1}{2}\sigma^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha \varkappa_\beta - \nabla_\beta \varkappa_\alpha) - 2\lambda^\alpha \partial_\alpha \sigma .$$

Ici,

$$\nabla_\alpha \varkappa_\beta = \lambda^\gamma \nabla_\alpha \nabla_\gamma \lambda_\beta + (\nabla_\gamma \lambda_\beta)(\nabla_\alpha \lambda^\gamma)$$
$$= \lambda^\gamma \nabla_\gamma \nabla_\alpha \lambda_\beta + \lambda^\gamma \lambda^\varepsilon R_{\varepsilon\beta\gamma\alpha} - (\nabla_\alpha \lambda^\gamma)(\nabla_\beta \lambda_\gamma + \varkappa_\beta \lambda_\gamma + \varkappa_\gamma \lambda_\beta) \ ,$$

en utilisant (1.1) ; par conséquent

$$(6.13) \qquad \nabla_\alpha \varkappa_\beta - \nabla_\beta \varkappa_\alpha = \lambda^\gamma \nabla_\gamma (\nabla_\alpha \lambda_\beta - \nabla_\beta \lambda_\alpha) + (\lambda_\alpha \nabla_\beta \lambda^\gamma - \lambda_\beta \nabla_\alpha \lambda^\gamma)\varkappa_\gamma$$

D'ailleurs, de (6.4),

$$(6.14) \qquad 2\lambda^\gamma \nabla_\gamma \sigma_{\alpha\beta} = -\lambda^\gamma \nabla_\gamma (\nabla_\alpha \lambda_\beta - \nabla_\beta \lambda_\alpha) + \lambda^\gamma (\lambda_\beta \nabla_\gamma \varkappa_\alpha - \lambda_\alpha \nabla_\gamma \varkappa_\beta)$$

Maintenant, (6.13), (6.14) et la relation évidente $\sigma^{\alpha\beta}\lambda_\beta = 0$ donnent l'équation

$$(6.15) \qquad \sigma^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha \varkappa_\beta - \nabla_\beta \varkappa_\alpha) = -2\lambda^\gamma \partial_\gamma \sigma$$

laquelle, avec (6.12), livre le résultat cherché.

On voit finalement les identités suivantes :

$$(6.16)\qquad \begin{cases} \sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\lambda^{\gamma}\,\theta^{\delta} \\ \sigma = g_{\alpha\beta}\,\theta^{\alpha}\,\theta^{\beta} \end{cases}$$

où θ^{α} est le vecteur moment-angulaire

$$(6.17)\qquad \theta^{\alpha} = \eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\lambda_{\beta}\,\partial_{\delta}\,\lambda_{\gamma}$$

et $\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}$ est le tenseur-élément de volume : elles se déduisent immédiatement de l'identité

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\lambda^{\gamma}\,\theta^{\delta} = -\,\delta^{\rho\sigma\tau}_{\alpha\beta\gamma}\,\lambda^{\gamma}\lambda_{\rho}\,\partial_{\tau}\,\lambda_{\sigma}\;.$$

Le vecteur θ^{α} étant orienté dans l'espace, on a :

Dans un mouvement rigide satisfaisant aux équations d'Einstein (5.2) la densité propre et la grandeur du vecteur moment-angulaire se propagent le long des lignes d'univers. Si le moment-angulaire s'annule sur une surface initiale quelconque, il s'annule pendant le mouvement entier (le nouvement est statique).

Il est bien évident que, dans le cas statique, avec $\theta^{\alpha} = 0$ et $\lambda_{\alpha} = \psi\,\partial_{\alpha}\,\phi$ les équations d'Einstein sont satisfaites identiquement. En ce cas, à l'aide des coordonnées comouvantes, on peut donner la solution générale pour le problème intérieur du corps rigide.

7. Les équations d'Einstein pour un mouvement de groupe.

On voit aisément que les équations de Rosen se réduisent aux équations de Killing lorsque le vecteur de courbure $\varkappa_{\alpha}$ est un gradient. On voit aussi que cette condition est nécessaire et suffisante.

Supposons maintenant que les tenseurs $(g_{\alpha\beta}\;,\lambda_{\gamma})$ satisfont aux équations de Rosen, et aux équations d'Einstein (5.2). On peut vérifier que, si η est un scalaire arbitraire de classe C^3, alors les tenseurs

$$(7.1)\qquad \begin{cases} \bar{g}_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} + (1-\eta^2)\,\lambda_{\alpha}\,\lambda_{\beta} \\ \bar{\lambda}_{\alpha} \equiv \eta\lambda_{\alpha} \end{cases}$$

satisfont identiquement aux équations de Rosen. De plus, on trouve que

$$(7.2)\qquad \begin{cases} \bar{\varkappa}_{\alpha} \equiv \varkappa_{\alpha} + \dfrac{\partial_{\alpha}\,\eta}{\eta} + \left(\dfrac{\lambda^{\gamma}\,\partial_{\gamma}\,\eta}{\eta}\right)\lambda_{\alpha} \\ \bar{f}^{\alpha} \equiv \eta\,f^{\alpha} + 3(\partial_{\beta}\,\eta)\,\sigma^{\alpha\beta} \end{cases}$$

de sorte que, dans les équations d'Einstein, le vecteur de courbure est remplacé par le même vecteur plus le gradient de $\log \eta^3$. Il résulte du fait que $\varkappa_\alpha$ est un gradient que les équations d'Einstein peuvent se présenter dans le forme simplifiée :

$$\nabla_\beta \sigma^{\alpha\beta} = 2\sigma \lambda^\alpha \tag{7.3}$$

(On voit ici que le produit scalaire $\lambda^\gamma \partial_\gamma z$ dans (7.2) est nul). Ceci veut dire que l'on peut associer à tout mouvement de groupe satisfaisant aux équations d'Einstein un autre mouvement dans lequel les lignes de courant sont des géodésiques. De (7.3), on a

$$\sigma_{\alpha\gamma} \nabla_\beta \sigma^{\alpha\beta} = 0 \quad ; \tag{7.4}$$

il devrait être possible de trouver le tenseur anti-symétrique le plus général qui satisfait à cette relation. On sait que $\nabla_\beta \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} \psi_{\gamma,\delta} \equiv 0$, mais ce tenseur ne satisfait pas à (7.3).

8. La réduction des équations d'Einstein à l'aide des coordonnées comouvantes.

Considérons les équations différentielles (1,1) et (5,2) dans une des régions connexes $\mathfrak{D}_0$ dont $\mathfrak{D}$ se compose.

Pour simplifier, soit V_3 de classe C^4, et soit $\mathfrak{D}_0 \simeq \mathfrak{D}'_0 \times V_1$, où $\mathfrak{D}_0$ est simplement connexe, et est recouverte par un seul système de coordonnées admissibles (u^1, u^2, u^3) dans V_3. Soit l'application $\mathfrak{D}_0 \to \mathfrak{D}'_0$ une application différentiable de classe C^4. Finalement, supposons qu'il existe une fonction t de classe C^4 qui satisfait dans toute la région $\mathfrak{D}_0$ à l'équation

$$\lambda^\alpha \frac{\partial t}{\partial x^\alpha} = 1 \quad . \tag{8.1}$$

Les hypothèses précédentes sont satisfaites en particulier par un système fini rigide si V_4 est de classe C^5, si le champ λ^α est de classe C^4, et si le domaine $\mathfrak{D}_0$ est suffisamment restreint.

Les fonctions (u^1, u^2, u^3), comme fonctions des (x^1, x^2, x^3, x^4), sont les solutions générales de l'équation

$$\lambda^\alpha \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{8.2}$$

et toute autre solution de cette équation est une fonction de (u^1, u^2, u^3).

Les variables (u^1, u^2, u^3, t) sont, par construction des coordonnées admissibles dans $\mathcal{D}_0$, et seront notées (x^1, x^2, x^3, x^4) respectivement. Dans ce système de coordonnées comouvantes, le vecteur λ^α a des composantes $(0, 0, 0, 1)^\alpha$. De plus, puisque λ^α est unitaire $g_{44} = -1$.

Considérons maintenant les équations de Rosen dans les coordonnées comouvantes. D'abord,

$$\nabla_\beta \lambda_\alpha = g_{\alpha\gamma} \nabla_\beta \lambda^\gamma = g_{\alpha\gamma} \Gamma^\gamma_{\beta 4} = [\beta 4, \alpha] = \tfrac{1}{2}(g_{\alpha\beta,4} + g_{\alpha 4,\beta} - g_{\beta 4,\alpha}),$$

ce qui donne

$$\nabla_\beta \lambda_\alpha + \nabla_\alpha \lambda_\beta = g_{\alpha\beta,4}$$

On a également

$$\lambda^\gamma \nabla_\gamma \lambda_\alpha = \nabla_4 \lambda_\alpha = g_{\alpha 4,4}$$

de sorte que

$$\lambda^\gamma(\lambda_\alpha \nabla_\gamma \lambda_\beta + \lambda_\beta \nabla_\gamma \lambda_\alpha) = g_{\alpha 4} g_{\beta 4,4} + g_{\beta 4} g_{\alpha 4,4} .$$

On trouve ainsi pour les équations de Rosen

$$g_{\alpha\beta,4} + g_{\alpha 4} g_{\beta 4,4} + g_{\beta 4} g_{\alpha 4,4} = 0 ;$$

c'est-à-dire,

$$\partial_4(g_{\alpha\beta} + g_{\alpha 4} g_{\beta 4}) = 0 . \tag{8.3}$$

Quand α ou $\beta = 4$, (8.3) donne l'identité. Les équations de Rosen, donc, se réduisent aux six conditions :

$$g_{ij} + g_{i4} g_{j4} = \tilde{g}_{ij} \tag{8.4}$$

où les $\tilde{g}_{ij}$ sont des fonctions de (x^1, x^2, x^3) seulement. Par multiplication contractée avec g^{ih}, (8.4) donne

$$\tilde{g}_{ij} g^{jh} = \delta^h_i , \tag{8.5}$$

de sorte que les g^{ih} sont également indépendants de x^4. Or,

$$\begin{cases} g_{j4} g^{jh} = g^{h4} \\ 1 + g^{44} = g_{j4} g^{j4} = \tilde{g}_{ij} g^{i4} g^{j4} \end{cases} \tag{8.6}$$

et l'on voit que, si les $\tilde{g}_{ij}$ sont donnés en avance, le mouvement rigide est complètement déterminé par la donnée des trois éléments g_{i4} . La forme différentielle $\tilde{g}_{ij}\, dx^i\, dx^j$ fournit une métrique pour le domaine $\mathcal{D}'$ de l'espace de projection V_3 . Les éléments g_{i4} sont les composantes d'un sous-vecteur covariant dans cet espace qui change avec le paramètre temporel x^4 . Par (8.6), g^{i4} est un vecteur contravariant dans V_3 , obtenu de g_{i4} en élevant les indices avec le tenseur $\tilde{g}_{ij}$. On écrira $g^{i4} \equiv g^i$, et $g_{i4} = g_i$.

Finalement, les équations du champ (5.2) prennent la forme

(8.7) $$f^i \equiv G^i_4 = 0 \quad ,$$

dans les coordonnées comouvantes, celle qui donne trois équations pour déterminer les trois inconnus g^i . La quatrième équation $f^4 = 0$ s'ensuit de l'identité $f^\alpha \lambda_\alpha = 0$; c'est-à-dire

(8.8) $$f^4 = g_j\, G^j_4 = G^4_4 + G_{44} = 0 \; .$$

Le problème de l'existence des systèmes finis rigides en relativité générale peut maintenant s'exprimer sous des conditions un peu plus restreintes comme problème de Cauchy de la manière suivante.

Le problème intérieur. - Sur une surface initiale $t = 0$, soient les éléments g^{ij} donnés dans un système de coordonnées comouvantes. Alors on cherche à déterminer entre les quantités g^i , $g^i_{,4}$ sur $t = 0$ et entre g^i , $\partial_n g^i$ (∂_n = dérivée normale) sur la frontière t , celles qui peuvent assurer uniquement une solution de (8.8) pour le sous-vecteur g^i .

Le problème au bord. - On cherche à déterminer sur t ceux entre g^i , $g^i_{,4}$ qui peuvent être choisis arbitrairement dans le problème intérieur, à satisfaire aux équations (5.5).

Le problème extérieur. - Ce problème se présente comme d'habitude en relativité générale.

Il y a aussi le problème physique de montrer si on ne peut faire correspondre d'une manière réciproque les variables et fonctions, que l'on peut choisir arbitrairement dans le problème relativiste, aux variables et fonctions arbitraires dans un problème analogue en mécanique classique. Si oui, on aura trouver une contre-partie vraie du corps rigide de la mécanique classique.

9. Analyse des équations du champ.

Le caractère hyperbolique, parabolique ou elliptique des équations du champ $f^i=0$ peut s'inférer en essayant de les résoudre algébriquement pour les dérivées $\partial_{44}\, g_i$ sur la surface $x^4 = Cte$. On se rappelle qu'une seule surface peut être choisie arbitrairement, les autres étant alors déterminées. En isolant ces dérivées, on trouve que f^i peut se présenter dans la forme

$$f^i = A^{ij}\, \partial_{44}\, g_{ij} + \dots \quad , \tag{9.1}$$

ou

$$A^{ij} = (1 + g^{44})g^{ij} - g^i\, g^j \tag{9.2}$$

De l'identité

$$A^{ij}\, g_j \equiv 0 \quad , \tag{9.3}$$

il suit que les équations $f^i = 0$ possèdent un caractère parabolique. Maintenant, de (8.6), on voit que

$$1 + g^{44} \geqslant 0 \quad ;$$

de là, on écrit

$$g^i = \gamma\, \mu^i \quad , \tag{9.4}$$

où

$$\left\{ \begin{aligned} & \gamma = + (1 + g^{44})^{1/2} = (\tilde{g}_{ij}\, g^i\, g^j)^{1/2} \\ & \tilde{g}_{ij}\, \mu^i\, \mu^j = 1 \end{aligned} \right. \tag{9.5}$$

et ainsi

$$A^{ij} = \gamma^2(g^{ij} - \mu^i\, \mu^j) \quad . \tag{9.6}$$

Il en résulte que, quand $\gamma > 0$, A^{ij} est semi-défini positif, de rang 2, et, quand $\gamma = 0$, $A^{ij} = 0$; le système (9.1) a, alors, un caractère parabolique-elliptique.

Pour qu'il existe un système de coordonnées dans lequel γ est identiquenent zéro, il faut et il suffit, comme on voit aisément, que le moment-angulaire θ^α soit identiquement nul. Ceci est le cas trivial statique. On va s'occuper tout d'abord du cas non-trivial, où $\sigma = g_{\alpha\beta}\, \theta^\alpha\, \theta^\beta \neq 0$. Ici, γ ne s'annule que dans des cas exceptionels, et l'on peut assurer qu'en général, $\gamma > 0$. Il n'est pas possible de résoudre les équations (9.1) pour les dérivées $\partial_{44}\, g_i$, et l'on ne peut même pas se servir du théorème Cauchy-Kovalewska pour assurer l'existence des solutions de ce système.

Je crois, quand même, que j'ai fait un pas dans cette direction. Em remplaçant les g_i dans (9.1) par les γ, μ^i dans (9.5), on trouve ([1])

$$(9.7) \qquad f^i \equiv \gamma^3 \ddot{\mu}^i - \Phi^i\{\gamma, \mu\} = 0$$

où les Φ^i comprennent les γ, $\partial_j \gamma$, $\partial_j \dot{\gamma}$, $\partial_j \partial_h \gamma$, $\dot{\mu}_j$, $\partial_j \dot{\mu}^h$, $\partial_j \partial_h \mu^n$, etc. Si on connait γ comme fonction analytique, on peut utiliser le théorème Cauchy-Kovalewska pour résoudre (9.7) par rapport aux μ^i. Pour déterminer γ, on contracte (9.7) avec μ_i, en notant que, d'après (9.5)

$$(9.8) \qquad \mu_i \ddot{\mu}^i + \dot{\mu}_i \dot{\mu}^i = 0 ,$$

et on a

$$(9.9) \qquad g_i f^i \equiv G_4^4 + G_{44} = \frac{1}{2} \gamma \Phi_o ,$$

où ([2])

$$(9.10) \qquad \Phi_o \equiv \tilde{\nabla}_j[(g^{ij} - \mu^i \mu^j) \tilde{\nabla}_i \gamma] - \gamma c ,$$

et où

$$(9.11) \qquad c \equiv g^{ij} \tilde{\nabla}_i \mu^h \tilde{\nabla}_j \mu_h + (\tilde{\nabla}_{ik} \mu^i) \mu^k + \gamma(\tilde{\nabla}_i \dot{\mu}^i + 3 \dot{\mu}^i (\tilde{\nabla}_j \mu_i) \mu^j) + 2 \gamma^2 \dot{\mu}^i \dot{\mu}_i .$$

Si on connait les μ^i, (9.10) est une équation du type parabolique pour γ. Il est remarquable que (9.10) ne contient pas $\dot{\gamma}$.

Si on peut résoudre (9.10) pour γ on aura une base pour un théorème d'existence dans le cas analytique par une méthode d'approximation successives. Pour réduire (9.10) à un type d'équation connu, on peut se servir des surfaces engendrées par le vecteur moment-angulaire :

$$(9.12) \qquad \theta^\alpha \partial_\alpha \Phi = 0 .$$

Si on utilise la fonction Φ comme coordonnée temporelle, x^4, dans un système de coordonnées comouvantes, alors $\theta^4 = 0$. Ceci entraîne que, dans les surfaces

---

([1]) Le point désigne ∂_4.

([2]) $\tilde{\nabla}_i$ veut dire différentiation covariante relative à $\tilde{g}_{ij}$.

x^4 = Cte , les $\lambda_i = g_i = \gamma \mu_i$ engendrent une congruence normale, et peuvent se présenter sous la forme $(h , 0 , 0)_i$, où h est quelque fonction des $(x^1 , \ldots , x^4)$. On peut ainsi réduire (9.10) à une équation du type elliptique à deux dimensions qui est, bien entendu, non-linéaire.

Naturellement, il y a encore beaucoup d'obstacles à surmonter, notamment celui de montrer que la suite ainsi construite converge. Mais, s'il est possible de faire marcher cette méthode, il y a de l'espoir qu'elle marche globalement dans le temps. Car, on sait que le vecteur θ^α ne s'annule jamais. Aussi, dans le cas d'un mouvement de groupe, j'ai montré que la courbure des courbes engendrées par le vecteur θ^α est uniformément bornée. Ceci est très important dans la topologie des surfaces définies par (9.12). On espère que le cas du mouvement rigide général peut être approximé au cas du mouvement de groupe. Finalement, sur la question des liens caractéristiques, on peut montrer que l'équation différentielle

$$(9.13) \qquad \theta^\gamma \nabla_\gamma X_{\alpha\beta} = - w X_{\alpha\beta} + X_{\beta\gamma} \nabla_\alpha \theta^\gamma - X_{\alpha\gamma} \nabla_\beta \theta^\gamma$$

est satisfaite par le tenseur

$$(9.14) \qquad X_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \partial_\beta \phi - \lambda_\beta \partial_\alpha \phi \quad ,$$

qui s'annule lorsque la surface ϕ = Cte devient caractéristique. Il en résulte que, si la surface ϕ = Cte devient caractéristique en un point quelconque, elle est caractéristique le long de la courbe engendrée par le champ θ^α . Ceci est analogue à l'axe instantané de la mécanique classique. Alors, si on sait que toute courbe engendrée par le champ θ^α coupe la frontière de $\mathcal{D}$, on peut régler les données de Cauchy pour la solution de (9.12) de manière à éviter que les surfaces ϕ = Cte deviennent caractéristiques.

Il est intéressant de remarquer que les surfaces isotropes ne jouent pas ici comme surfaces caractéristiques. Les surfaces x^4 = Cte peuvent même être orientées dans le temps.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GOURSAT (Edouard). - Cours d'analyse mathématique, Tome 2, 7e éd. - Paris, Gauthier-Villars, 1949.

[2] HERGLOTZ (G.). - Über den vom Standpunkt des Relativitätsprinzips aus als "starr" zu bezeichnenden Körper, Annalen der Physik, 4. Folge, t. 31, 1910, p. 393-415.

[3] ROSEN (Nathan). - Notes on rotation and rigid bodies in relativity theory, Phys. Rev., t. 71, 1947, p. 54-58.

[4] SALZMAN (G.) and TAUB (A. H.). - Born-type rigid motion in relativity, Phys. Rev., t. 95, 1954, p. 1659-1669.