

# SÉMINAIRE JANET. MÉCANIQUE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE CÉLESTE

MICHEL HÉNON

## **Dynamique des amas d'étoiles**

*Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste*, tome 2 (1958-1959),  
exp. n° 7, p. 1-12

[http://www.numdam.org/item?id=SJ\\_1958-1959\\_\\_2\\_\\_A7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SJ_1958-1959__2__A7_0)

© Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

-:-:-

Séminaire de MÉCANIQUE ANALYTIQUE  
et de MÉCANIQUE CÉLESTE

7 février 1959

Année 1958/59

-:-:-

## DYNAMIQUE DES AMAS D'ÉTOILES

par Michel HÉNON

Le problème traité ici n'est rien d'autre que le classique problème des  $n$  corps.

On sait que pour  $n = 2$ , ce problème est soluble ; pour  $n = 3$ , il est déjà extrêmement difficile ; et pour  $n > 3$ , il est pratiquement insoluble. Par exemple, dans le cas du système solaire, il faut employer des développements limités, ou bien recourir à l'intégration numérique.

1. Amas réels.

Cependant, l'astronomie présente un grand nombre de problèmes où  $n$  n'est plus de l'ordre de quelques unités, mais est très grand. Ainsi :

- les amas ouverts ; ce sont de petits amas d'étoiles qui font partie de notre galaxie ; leur structure est assez désordonnée ;  $n = 100$  à  $1000$  ;
- les amas globulaires, beaucoup plus peuplés :  $n = 10^5$  à  $10^7$ . Ils font partie de notre galaxie, mais ne restent pas dans son plan. Ils présentent tous une symétrie sphérique plus ou moins parfaite ;
- les galaxies : la nôtre compte  $2 \cdot 10^{11}$  étoiles. Il y a une rotation d'ensemble, qui donne à la galaxie une forme de disque aplati : symétrie circulaire. Le problème est compliqué par la présence d'une matière interstellaire abondante, irrégulièrement disposée et mal connue ;
- les amas de galaxies : la "particule élémentaire" n'est plus l'étoile, mais la galaxie.  $n = 200$  en moyenne.

Pour des valeurs aussi grandes de  $n$ , il n'est plus question évidemment de calculer les mouvements individuels ; on est naturellement amené à employer une méthode statistique, inspirée, à l'origine, de la théorie cinétique des gaz.

Du point de vue du théoricien, les objets les plus séduisants parmi ceux que

nous avons énumérés, sont les amas globulaires, pour de multiples raisons :  $n$  est très grand, donc la méthode statistique est absolument justifiée ; la symétrie sphérique simplifie beaucoup les équations, car il n'y a plus qu'une variable d'espace, la distance au centre ; il n'y a pas de matière interstellaire. Ce sont donc les amas globulaires qui présentent le problème le plus simple ; et pourtant, même dans ce cas simple, comme nous allons le voir, les questions essentielles ne sont pas encore résolues !

Il ne sera donc question, dans cet exposé, que des amas globulaires.

## 2. Hypothèses.

La méthode statistique consiste à décrire l'amas non par les positions et vitesses individuelles, mais par une fonction de distribution : on pose que la probabilité de trouver une étoile dans l'élément d'hypervolume à 6 dimensions  $dx dy dz dv_x dv_y dv_z$  est :  $a(x, y, z, v_x, v_y, v_z) dx dy dz dv_x dv_y dv_z$ .

Il faut remarquer qu'en utilisant cette représentation, nous faisons déjà une hypothèse : celle de l'absence de corrélation d'un point à un autre. En effet, la probabilité définie ci-dessus est supposée indépendante de la présence ou de l'absence d'autres étoiles en d'autres points de l'hyperespace. La justification de cette hypothèse est très délicate et ne sera pas abordée ici.

Nous supposons que toutes les étoiles ont même masse  $m$ . Cette approximation n'est justifiée que par la simplification mathématique qu'elle apporte ; dans la réalité, les masses sont certainement différentes.

Nous supposons encore que l'amas possède la symétrie sphérique. Il s'ensuit que la fonction  $a$  ne dépend en fait que de 3 variables :

- $r$ , distance au centre ;
- $v_r$ , vitesse radiale ;
- $v_t$ , vitesse transversale.

A partir de  $a$ , on peut évidemment calculer une densité en chaque point :  $\rho(r)$ , qui ne dépend que de  $r$ .

## 3. Première relation entre densité et potentiel.

Le premier problème est de trouver le potentiel gravitationnel créé par les étoiles :  $U(r)$ . La force d'attraction en un point, dirigée vers le centre, est :

$$F = \frac{dU}{dr}$$

Mais on a aussi :

$$F = \frac{G M(r)}{r^2}$$

où  $M(r)$  est la masse à l'intérieur d'une sphère de rayon  $r$ .

Cette masse est encore :

$$M(r) = \int_0^r 4 \pi r^2 \rho \, dr$$

d'où finalement :

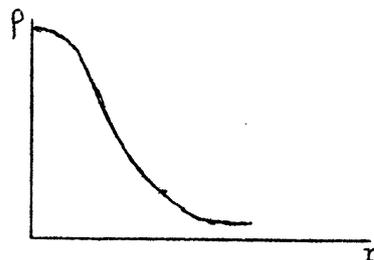
$$(1) \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 4 \pi G \rho$$

qui n'est autre que l'équation de Poisson, car le premier membre est  $\Delta U$ .

Connaissant  $\rho$ , on peut donc calculer  $U$  en intégrant cette équation, avec les conditions aux limites : pour  $r = 0$ ,  $\frac{dU}{dr} = 0$  et  $U = 0$  (cette dernière condition est arbitraire).

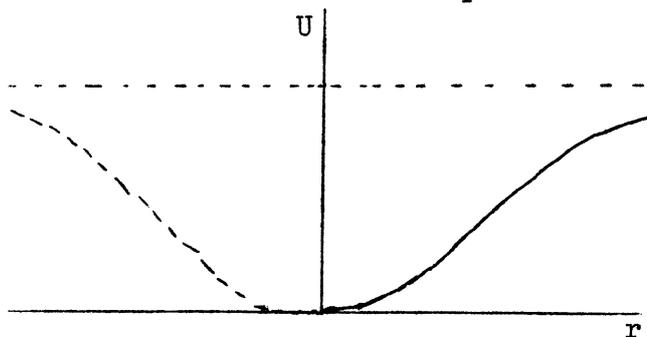
Pour fixer les idées :

$\rho$  a l'allure suivante :



et on trouve pour  $U$  :

On peut reproduire la courbe à gauche : on voit bien ainsi que les étoiles produisent une "cuvette de potentiel".



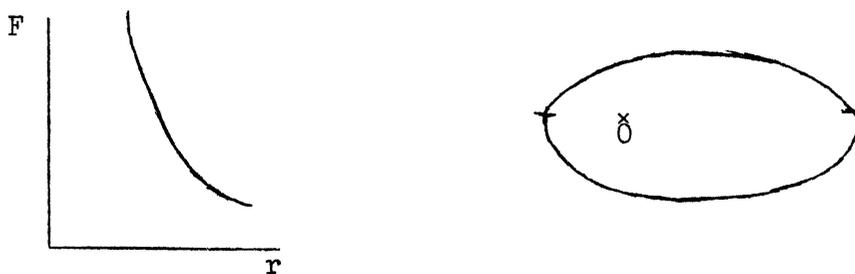
#### 4. Orbites.

Quel va être le mouvement d'une étoile dans cette cuvette de potentiel ?

C'est un mouvement sous l'action d'une force centrale, donc plan.

On ne connaît que deux cas simples de mouvements à force centrale :

1. attraction pour une masse ponctuelle : mouvement képlérien. La force varie en  $\frac{1}{r^2}$ .

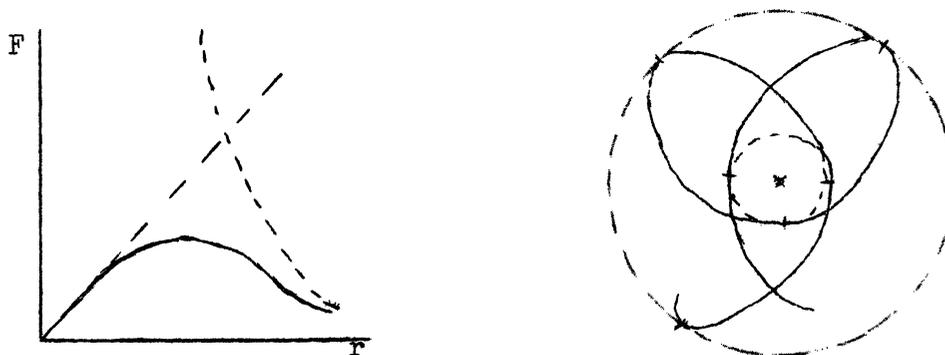


L'orbite est une ellipse ayant son foyer au centre de l'amas.

2) amas homogène. La masse  $M(r)$  est proportionnelle à  $r^3$ , donc la force d'attraction est proportionnelle à  $r$ . L'orbite est une ellipse ayant son centre au centre de l'amas.



Un amas globulaire réel participe un peu de ces deux cas : près du centre, il peut être considéré comme homogène ; à grande distance, il peut être considéré comme ponctuel. D'où la variation de la force et la forme de l'orbite :



Dans le premier cas : l'angle entre le péricentre et l'apocentre vaut  $180^\circ$  .

Dans le second cas :  $90^\circ$  .

Dans le cas général : on peut démontrer qu'on obtient une valeur intermédiaire, en général non commensurable à  $360^\circ$  . L'orbite est une rosette, qui remplit toute la couronne comprise entre les deux cercles.

Cherchons combien il y a de formes d'orbites différentes. L'orbite la plus générale dépend de 5 paramètres (6 conditions initiales, moins le temps). 2 fixent la position du plan orbital, 1 correspond à une rotation dans le plan. Restent 2 , spécifiques de la forme de l'orbite. Il est facile de les trouver. En effet, on

a 2 invariants du mouvement :

- l'énergie totale  $E = U + \frac{1}{2} v^2$

- le moment angulaire  $A = r v_t$ , constant en vertu de la loi des aires.

Ce sont précisément les deux derniers paramètres.

Au lieu de définir la fonction de distribution  $a$  en fonction des coordonnées d'espace et de vitesse, on peut la définir en fonction des 5 paramètres des orbites, et d'un sixième paramètre fixant la position de l'étoile sur l'orbite à l'instant  $t = 0$ . Mais cette fonction doit être invariante dans toute rotation ; elle ne dépend donc que de  $E$ ,  $A$  et du 6e paramètre.

Nous supposons maintenant que la fonction de distribution est invariante dans le temps ; autrement dit, l'amas  $a$  atteint une sorte d'"équilibre dynamique", ou mieux, un "régime permanent". Alors la fonction de distribution est indépendante du 6e paramètre ; elle ne dépend plus que de  $E$  et  $A$ .

Nous définissons donc :

$$f(E, A) dE dA$$

comme la probabilité d'existence d'une étoile dont l'énergie est comprise entre  $E$  et  $E + dE$  et le moment angulaire entre  $A$  et  $A + dA$ .

On voit qu'un progrès sensible a été réalisé par cette considération des orbites, puisqu'au lieu de la fonction de trois variables  $a(r, v_r, v_t)$ , l'amas est maintenant décrit par une fonction de deux variables seulement :  $f(E, A)$ .

### 5. Deuxième relation.

Il faut maintenant repasser de  $f$  à  $a$  et  $\rho$ .

Soit  $T(E, A)$  la période de l'étoile, définie comme le temps mis pour aller du péricentre à l'apocentre. Chaque étoile  $(E, A)$  coupe une sphère de rayon  $r$  ( $r_1 < r < r_2$ ) 1 fois pendant le temps  $T$ . Donc le nombre de passages d'étoiles  $(E, A)$  par seconde est :

$$n = \frac{f dE dA}{T}$$

Mais ce nombre est aussi

$$n = \iiint a dx dy dz dv_x dv_y dv_z$$

l'intégrale étant étendue au domaine convenable.

On montre facilement que :

$$dv_x dv_y dv_z = \frac{v_t}{r v_r} dA dE d\psi$$

où  $\psi$  est un angle qui fixe la position du plan orbital par rapport à un plan de référence.

L'intégrale sur  $\psi$  donne :  $2\pi$ . Il faut multiplier par 2, car à un point  $(A, E, \psi)$  correspondent deux points  $(v_x, v_y, v_z)$ . Le volume dans lequel se trouvent les étoiles qui vont couper la sphère en une seconde est :

$$\iiint dx dy dz = 4\pi r^2 v_r.$$

En portant dans l'intégrale, on obtient :

$$n = 16\pi^2 r v_t dE dA$$

D'où, par comparaison :

$$a = \frac{1}{16\pi^2 A} \frac{f}{T}$$

On remarquera que  $r$  a disparu dans cette expression :  $a$  ne dépend que des deux invariants  $E$  et  $A$ .

Ce résultat n'est qu'un cas particulier du théorème de Liouville. On a d'autre part :

$$\begin{aligned} \rho &= m \iiint a dv_x dv_y dv_z \\ &= m \iiint \frac{1}{16\pi^2 A} \frac{f}{T} \frac{v_t}{r v_r} dA dE d\psi \end{aligned}$$

En intégrant en  $\psi$  :

$$(2) \quad \rho = \frac{m}{4\pi r^2} \iint \frac{f dE dA}{T v_r}$$

Cette relation permet de calculer  $\rho(r)$  quand on connaît  $f(E, A)$  et  $U(r)$  (ce dernier intervient dans  $T(E, A)$  et dans  $v_r$ ).

Les deux équations (1) et (2), prises ensemble, permettent donc de calculer

$U$  et  $\rho$  quand  $f(E, n)$  est donné.

Plusieurs auteurs ont calculé des modèles, entre autres CAMM et WOOLLEY. CAMM les nomme "systèmes self-gravitants", car ce sont les étoiles elles-mêmes qui produisant le potentiel dans lequel elles gravitent.

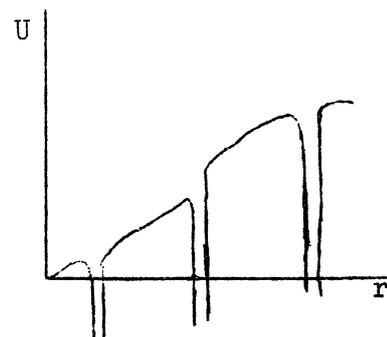
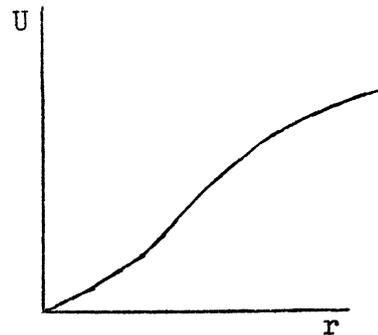
#### 6. Troisième relation : perturbations.

Nous avons trouvé jusqu'ici que la structure de l'amas est entièrement définie par la fonction de distribution  $f(E, A)$ . Cette fonction est invariante dans le temps ; elle peut être quelconque. Pour un amas réel, elle est déterminée par les conditions de formation de l'amas, et se conserve ensuite indéfiniment : la structure dynamique de l'amas est "figée". Si cette conception était exacte, on pourrait trouver dans les amas observés aujourd'hui de précieuses indications sur leur formation. C'est ce qui se passe pour le système solaire.

Mais nous allons être conduits à abandonner cette conception simple en introduisant un phénomène que nous avons négligé jusqu'à présent : les perturbations individuelles.

En effet, nous avons admis que le potentiel variait de manière régulière :

Mais en réalité, le potentiel présente un grand nombre de singularités, correspondant aux étoiles réelles ; ce qu'on peut représenter schématiquement comme ci-contre :



Donc une étoile ne suit pas exactement la trajectoire simple qui a été présentée. La force d'attraction que nous avons calculée était une moyenne, une espérance mathématique ;

la force réelle qui agit sur l'étoile présente des fluctuations, de caractère aléatoire, autour de cette moyenne. Il en résulte que  $E$  et  $A$ , en réalité, ne sont pas des invariants, mais présentent des variations aléatoires au cours du temps.

On trouve ici une certaine analogie avec la théorie cinétique des gaz, mais il est dangereux de pousser cette analogie trop loin. En effet, dans le cas des gaz, les forces entre particules ont un petit rayon d'action : elles varient comme  $1/r^5$ , par exemple. Il suffit alors de considérer les rencontres proches, l'effet des particules lointaines peut être négligé. Ces rencontres proches provoquent des déviations importantes : la vitesse d'une particule après la rencontre est en général très différente de sa vitesse avant. On aboutit ainsi à une équation connue sous le nom d'équation de Boltzmann, qui régit l'évolution de la fonction de distribution dans un gaz, sous l'effet des rencontres.

Ici, au contraire, les forces varient en  $1/r^2$  ; et on peut montrer que les rencontres proches ont un effet négligeable devant les rencontres lointaines (on ne peut même plus, à vrai dire, parler de rencontres ; il faut considérer que chaque étoile est en interaction permanente avec toutes les autres étoiles de l'amas).

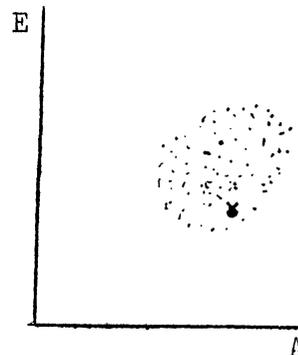
Ces rencontres lointaines provoquent des petites déviations. On en déduit que  $E$  et  $A$  ne varient pas brutalement, par sauts, mais au contraire d'une manière continue. L'analogie avec le mouvement brownien est donc beaucoup plus juste.

Dans un tel cas, il faut employer l'équation de Fokker-Planck. On considère que  $f$  est une fonction continue du temps :  $f(E, A, t)$  ; l'équation est :

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \begin{cases} - \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{\langle \Delta E \rangle}{T} f \right) - \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\langle \Delta A \rangle}{T} f \right) \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial E^2} \left( \frac{\langle \Delta E^2 \rangle}{T} f \right) + \frac{\partial^2}{\partial E \partial A} \left( \frac{\langle \Delta E \Delta A \rangle}{T} f \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial A^2} \left( \frac{\langle \Delta A^2 \rangle}{T} f \right) \end{cases}$$

$\langle \Delta E \rangle$  est l'espérance mathématique de la variation de  $E$  au bout du temps  $T$ .  $\Delta E$  est une grandeur aléatoire ; mais  $\langle \Delta E \rangle$  a une valeur précise, qui peut être calculée. De même  $\langle \Delta A \rangle$ , etc.

A chaque étoile, on peut associer un point dans le plan  $(E, A)$ . Au bout du temps  $T$ , ce point est venu en  $(E + \Delta E, A + \Delta A)$ , défini par un nuage de probabilité.  $\langle \Delta E \rangle$ ,  $\langle \Delta A \rangle$  donnent les coordonnées du centre de ce nuage ; les moments du 2e ordre définissent l'ellipse de probabilité.



L'équation décrit, dans ces conditions, l'évolution d'une population de points dans le plan  $E, A$ .

Il va sans dire que chacun de ces moments est fonction de  $E, A$ , et aussi de  $f(E, A)$  dans sa totalité, ce qui correspond au fait que toutes les autres étoiles influent sur l'étoile considérée. Autrement dit, l'équation (3) n'est pas une équation locale, elle ne peut être ramenée à la forme d'une équation aux dérivées partielles en  $E, A, t$ ; c'est une équation intégral-différentielle.

Chacun des moments est donné par une expression très compliquée. La plus simple est :

$$\langle \Delta A \rangle = \frac{G^2 m^2 \text{Log } n}{2\pi} \iiint \frac{f(E_1, A_1) \cdot (v_t \cos \varphi - v_{t_1})}{T(E_1, A_1) \cdot r w^3 |v_r v_{r1}|} dE_1 dA_1 d\varphi_1 dr$$

où :  $w = |\vec{v}_1 - \vec{v}|$  et les autres contiennent sous les intégrales des expressions encore beaucoup plus compliquées :

Les équations (1) et (2) sont-elles encore valables ? Oui ; on peut montrer en effet que les variations de  $f$ , données par (3), sont très lentes : une étoile fait plusieurs centaines de tours dans l'amas avant que ses paramètres  $E$  et  $A$  soient appréciablement modifiés. Ceci est d'autant plus vrai que le nombre des étoiles est plus grand (c'est simplement la loi des grands nombres). A la limite, dans un amas formé d'une infinité d'étoiles de masse infiniment petite, une sorte de "poussière d'étoiles", l'évolution donnée par (3) serait infiniment lente.

On peut donc considérer qu'à chaque instant, l'amas est dans une sorte de pseudo-équilibre dynamique, auquel s'appliquent (1) et (2) ; cet équilibre subit une lente variation séculaire, donnée par (3).

En théorie, ces 3 équations permettent donc de calculer l'évolution de l'amas à partir d'un état initial donné.

Malheureusement, en pratique, l'équation (3) est beaucoup trop compliquée, et l'intégration du système paraît absolument inabordable.

## 7. Hypothèse de la symétrie sphérique des vitesses.

Nous ferons donc une nouvelle hypothèse simplificatrice, à savoir, qu'en chaque point de l'amas, la distribution des vitesses possède la symétrie sphérique. Cette

hypothèse est difficile à justifier physiquement, mais elle a l'avantage de simplifier énormément les expressions des moments  $\langle \Delta E \rangle$ , etc. D'autre part,  $a$  ne dépend plus que de  $v$  en un point donné ; on en déduit que  $a$  ne dépend que de  $E$ .

En écrivant l'équation de Fokker-Planck pour  $a$  au lieu de  $E$ , on a donc une équation à une seule variable au lieu de deux :

$$(3') \quad \frac{\partial a}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{\langle \Delta E \rangle}{T} a \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial E^2} \left( \frac{\langle \Delta E^2 \rangle}{T} a \right)$$

Même dans ce cas, la résolution est compliquée. Des calculs sont commencés ; il faudra probablement utiliser une calculatrice électronique.

### 8. Amas isotherme.

Indépendamment de ce calcul de l'évolution, on peut se demander quelle sera la figure d'équilibre finale.

Par analogie avec les gaz, on peut supposer que dans cette figure, la distribution des vitesses sera maxwellienne en tout point. Effectivement, on trouve que dans ce cas l'équation de Fokker-Planck (3') se réduit à

$$\frac{\partial a}{\partial t} = 0 .$$

C'est donc bien une figure d'équilibre. Cependant, on n'a pas démontré de théorème analogue au "théorème H" dans le cas des gaz, prouvant que cet équilibre est stable.

Avec (1) et (2), on peut calculer la structure de l'amas, que l'on nomme amas isotherme. Malheureusement, on trouve que cet amas a une masse totale infinie. Un amas réel ne peut donc pas prendre cette forme.

La question de l'évolution ultime d'un amas n'est donc pas résolue.

### 9. Evasion des étoiles.

On peut imaginer que certaines étoiles acquièrent une énergie supérieure à l'énergie d'évasion et quittent définitivement l'amas. Mais en fait, une telle évacion ne peut pas se produire. En effet  $E$  varie, nous l'avons vu, de manière continue. Or, au fur et à mesure que  $E$  se rapproche de l'énergie d'évasion,

l'orbite de l'étoile devient de plus en plus allongée, et sa période de plus en plus longue - à peu près la situation d'une comète dans le système solaire. Elle passe donc presque tout son temps dans des régions très peu denses, loin du centre ; donc elle est très peu perturbée. Le résultat est que la variation de  $E$  est de plus en plus lente, et qu'en fait  $E$  ne peut jamais franchir la limite.

#### 10. Problèmes à résoudre.

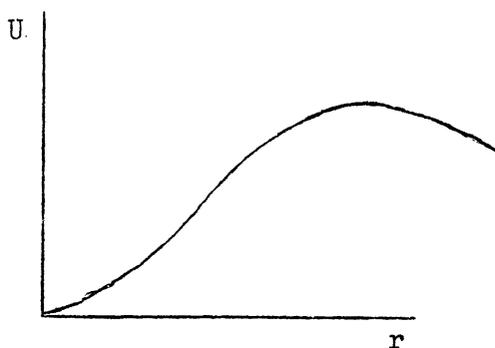
Un champ très vaste est donc encore ouvert aux recherches théoriques. En supposant que le cas très simplifié présenté ici ait été résolu, on pourrait ensuite aborder les problèmes suivants :

1° Cas de la distribution non sphérique des vitesses (équation 3).

2° Étoiles de masses différentes. Il est probable que l'on trouverait alors un certain "trialog" des étoiles, les plus lourdes ayant tendance à se grouper près du centre.

SPITZER a étudié ce problème dans un cas très simplifié : la première équation est abandonnée, on suppose le potentiel en forme de **puits rectangulaire, indépendant du temps**. Il trouve alors une évation des étoiles, d'autant plus rapide que ces étoiles sont plus légères. Mais cette évation est due à l'introduction artificielle du potentiel ; elle ne doit pas se produire en réalité.

3° Influence du champ galactique, que nous avons négligé jusqu'à présent. Le potentiel décroît aux grandes distances :



Donc l'amas a un rayon fini et les étoiles qui débordent la cuvette de potentiel s'évadent définitivement. Le problème est compliqué par le fait que cette perturbation galactique est variable, en raison du mouvement de l'amas dans la galaxie.

4 - Abandon de la symétrie sphérique de l'amas. Certains amas observés ont une

structure fortement ellipsoïdale.

5 - Introduction d'une rotation d'ensemble de l'amas, avec comme conséquence possible un aplatissement.

6 - Comparaison avec les amas réels, en vue de remonter, dans la mesure du possible, à leur origine ; de déterminer les masses des différents types d'étoiles ; etc.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] CAMM (G. L.). - Self-gravitating star systems, II, Month. Not. roy. astr. Soc., t. 112, 1952, p. 155-176.
  - [ 2 ] SPITZER (L. Jr) and HÄRM (R.). - Evaporation of stars from isolated clusters, Astrophysical Journal, t. 127, 1958, p. 544-550.
  - [ 3 ] WOOLLEY (R. van der Riet). - A study of the equilibrium of globular clusters, Month. Not. roy. astr. Soc., t. 114, 1954, p. 191-209.
  - [ 4 ] WOOLLEY (R. van der Riet). - Studies in the equilibrium of globular clusters, II, Month. Not. roy. astr. Soc., t. 116, 1956, p. 288-295.
-