Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

Olivier Costa de Beauregard

L’hypothèse de l’effet gravitationnel de spin

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 2 (1958-1959), exp. nº 5, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1958-1959__2__A5_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire de MÉCANIQUE ANALYTIQUE
et de MÉCANIQUE CÉLESTE

Année 1958/59

-:-:-:-

17 janvier 1959

L'HYPOTHÈSE DE L'EFFET GRAVITATIONNEL DE SPIN

par Olivier COSTA de BEAUREGARD

1. Introduction.

S'il s'avère que la physique des milieux doués de spin amène à envisager des tenseurs inertiaux T_{ij} asymétriques [6], alors il devient nécessaire de généraliser l'équation de la gravitation d'Einstein

(1.1) $$R_{ij} - \frac{R}{2} g_{ij} = \chi T_{ij}$$

de telle manière que son premier membre également devienne asymetrique. Telle est la remarque que nous avions avancee en 1942 [2] et à laquelle a abouti tout recemment D. W. SCIAMA [10]. SCIAMA propose alors une theorie de géometrie à connexion affine où les trois tenseurs figurant dans l'équation généralisant (1.1) sont asymétriques ; nous allons nous rallier exactement à l'équation fondamentale de Sciama (4.7 et 4.2 ci-dessous), mais nous séparer très notablement de lui touchant l'interpretation physique de la théorie.

Nos idées directrices (et nos raisons de ne pas suivre entièrement SCIAMA) vont apparaître dans un raisonnement heuristique prealable.

2. Raisonnement heuristique préalable.

Selon l'hypothèse de l'effet inertial de spin [6], un corps matériel qui acquiert une densité de spin subit un effet de recul corollaire de l'addition à son impulsion-énergie longitudinale L_i d'une impulsion-énergie transversale T_i, de telle sorte que l'impulsion-énergie totale

(2.1) $$P_i = L_i + T_i \qquad (i, j, k, \ell = 1, 2, 3, 4)$$

reste constante. Ceci rappelle fortement le precedent de la mécanique analytique relativiste de la charge ponctuelle Q, où l'impulsion-énergie totale

(2.2) $$P_i = p_i + Q A_i$$

est soumise à une loi d'extremum (loi d'action stationnaire de Hamilton-Jacobi), tandis que l'impulsion-énergie cinématique p_i, colinéaire à la quadrivitesse V_i, n'est pas soumise à une loi d'extremum.

Que devient donc l'impulsion-énergie transversale chargée de signe $-T_i$? Par analogie avec le précédent de la mécanique analytique relativiste, où l'impulsion-énergie potentielle $-QA_i$ est transportée par le champ électromagnétique, nous postulerons que l'impulsion-énergie transversale $-T_i$ est transportée par un <u>champ gravitationnel de spin</u> ; disons dès à présent que notre intention <u>a priori</u> est de décrire ce champ gravitationnel de spin par la partie antisymétrique $g_{\check{ij}}$ du tenseur fondamental g_{ij} de la géométrie à connexion affine.

Cette "impulsion-énergie potentielle de spin" va-t-elle rester occulte dans le champ qui la transporte ? Nous ne le pensons pas : nous trouvons naturel de postuler que <u>l'onde gravitationnelle de spin</u>, lancée par l'apparition d'une densité de spin dans la source du champ, et se propageant dans le vide à la vitesse c, va agir <u>universellement</u> (au sens de l'inertique-gravifique) sur les masses qu'elle rencontre, c'est-à-dire qu'elle va leur faire subir un certain <u>"changement de vitesse" indépendant de la valeur de la masse</u> située au point considéré.

Recapitulons explicitement les postulats que nous venons de faire. La loi du changement de vitesse des masses que nous admettrons doit

1° être indépendante des masses actionnées ;

2° se propager par ondes à la vitesse c ;

3° contenir en facteur la constante de la gravitation, G ou $\chi = 8\pi G c^{-2}$;

4° admettre comme source $\partial^k \sigma_{\check{ij}k} = 2\, T_{\check{ij}}$, (ou bien $\sigma_{\check{ij}k}$ si nous introduisons un "super-potentiel").

Deux postulats spéciaux achèveront de préciser notre loi :

5° <u>conservation au détail du moment cinétique</u> au sens suivant : reprenons idéalement l'expérience gyromagnétique d'Einstein-Haas et envisageons deux cas :

α, l'aimantation est due aux mouvements orbitaux des électrons internes (diamagnétisme ou paramagnétisme),

β, elle est due aux spins de ces électrons (ferro- ou ferri-magnétisme).

Dans le premier cas, la rotation qui apparaît macroscopiquement compense l'organisation des micro-rotations orbitales internes ; dans le second cas, rien de tel.

Notre postulat 5 consistera à supposer que l'émission de l'onde gravitationnelle de spin a pour effet de "lancer" les masses qu'elle rencontre tangentiellement aux cercles de la figure 1. Selon cette hypothèse, des mouvements orbitaux apparaissent aussi dans le cas du spin, mais alors ils ne sont pas intérieurs, mais extérieurs à la matière qui acquiert une densité de spin.

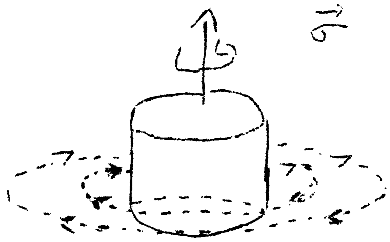

fig. 1

Qualitativement, nous voyons que la relation de la "vitesse universellement induite" $c\,\vec{\beta}$ par l'apparition dans la source d'une densité de spin, à cette densité de spin $\vec{\sigma}$, est semblable à celle du champ magnétique $\vec{H}$ à la densité de courant $\vec{j}$; ceci nous incite à traduire le postulat 5 par la formule (dimensionnellement correcte)

$$c \,\Box\, \vec{\beta} = -\alpha \chi\, \overrightarrow{\mathrm{rot}\,\vec{\sigma}} \qquad ; \tag{2.3}$$

α designe une certaine constante numerique positive ; cette formule est analogue à la formule $\Box\, \vec{H} = \overrightarrow{\mathrm{rot}\,\vec{j}}$ de l'électromagnétisme.

Notre ultime postulat sera le suivant :

6° En admettant que l'onde gravitationnelle de spin soit totalement absorbée par la matière rencontrée, il devra y avoir explicitement compensation globale de l'impulsion-énergie et du moment cinétique apparus dans la source d'une part, dans le reste de l'univers d'autre part.

Faisons le calcul pour l'impulsion-énergie, où il est plus simple.

L'intégrale des potentiels retardés de (2.3) est

$$\vec{\beta}\,(t) = \frac{\alpha\chi}{4\pi c} \iiint \frac{1}{r}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}\,\vec{\sigma}}\,\left(t - \frac{r}{c}\right) dv \;. \tag{2.4}$$

Supposons :

α. l'espace euclidien,

β. la matière ne s'étendant pas à l'infini,

γ. l'état final de la source stationnaire,

δ. l'instant t assez tardif pour que l'onde gravitationnelle de spin émise par la source ait atteint les confins de la matière.

Appelant $\vec{\sigma}$ la valeur moyenne de la densité de spin dans le volume $\mathcal{V}$ de la source, l'impulsion $\vec{I}_2$ communiquée à la totalité des masses du cosmos (moins celle de la source dont le volume est alors négligeable) s'écrit

$$(2.5) \qquad \vec{I}_2(t) = c \iiint \vec{\beta} \, \rho \, dv$$

$$= \frac{\varkappa \chi}{4\pi} \mathcal{V} \, \overrightarrow{\mathrm{rot}\, \vec{\sigma}} \iiint \rho \frac{dv}{r} \quad .$$

Par ailleurs, d'après la théorie de l'effet inertial de spin ([6] , équation 3.2) , l'impulsion-énergie transversale changée de signe de la source acquérant du spin était

$$(2.6) \qquad \vec{I}_1(t) = - \vec{T} = - \mathcal{V} \, \overrightarrow{\mathrm{rot}\, \vec{\sigma}} \quad .$$

En écrivant que

$$(2.7) \qquad \vec{I}_1 + \vec{I}_2 = 0$$

nous trouvons

$$(2.8) \qquad \frac{\varkappa \chi}{4\pi} \iiint_{(\text{univers total})} \rho \frac{dv}{r} = 1 \quad .$$

L'on s'assure aisément que la conclusion est exactement la même si l'on raisonne en moment cinétique plutôt qu'en impulsion-energie ([5] , équations (3.2) à (3.4)] .

La formule (2.8) exprime qu'à un facteur simple près le potentiel de gravitation total est égal à 1. On sait que ce résultat apparaît (avec des interprétations légèrement variables) dans à peu près tous les modèles de la cosmologie relativiste. Par exemple, en théorie du cosmos sphérique d'Einstein, on a

$$(2.9) \qquad \frac{2\pi GM}{c^2 R} = 1 \quad ,$$

où M désigne la masse totale du cosmos et R le rayon de l'espace.

Une relation aussi simple que (2.8) ou (2.9) entre la masse et la longueur cosmologiques implique indubitablement une hypothèse sur le choix des unités. D. W. SCIAMA [9] et D. PARK [8] ont eu indépendamment l'ingéniosité de discerner que ce choix simplificateur n'est autre que celui de la définition classique de la force (1).

---

(1) Cette remarque, qui concerne en fait la relation du champ inertial et gravitationnel aux autres champs physiques, aurait un rôle-clé dans une future théorie unitaire de la gravitation et des autres champs physiques.

Considérons avec eux la formule fondamentale de la dynamique du point

$$\vec{F} = I m \vec{\gamma} \quad , \tag{2.10}$$

où, d'après la définition classique de l'unité de force, la constante universelle I de Galilee est posée égale à 1 avec la dimension zéro. SCIAMA et PARK, voulant interpréter l'idée de MACH que l'inertie est due à l'influence des autres masses du cosmos, mettent GM au numérateur de I, et au dénominateur une certaine puissance de la distance moyenne des masses. Le seul moyen d'obtenir la dimension zéro pour I est alors de poser

$$I = \frac{GM}{c^2 L} \quad ; \tag{2.11}$$

$I = 1$ d'après la définition classique de la force. Si l'on reprend le degré de liberté I, il faut partout remplacer G par G/I en théorie de la gravitation ; la formule (2.9) d'Einstein se récrit alors

$$I = \frac{2\ GM}{\pi c^2\ R} \quad , \tag{2.12}$$

en plein accord avec les idées de SCIAMA et de PARK. Autrement dit, partant d'une équation locale, la relativité généralisée retrouve globalement la condition de MACH.

Nous considérons qu'en retrouvant à sa manière la formule (2.8) ou (2.9) notre théorie heuristique "est retombée sur ses pattes". Nous allons donc pouvoir la dépasser en nous inspirant d'elle.

3. Forme covariante minkowskienne de la loi de génération du champ gravitationnel de spin et de la loi de projection des particules d'épreuve.

Dans la formule (2.3) figurent un vecteur polaire et un vecteur axial. Passant au langage quadridimensionnel il nous faudra donc deux formules pour remplacer (2.3).

Ecrivons la première de ces deux formules dans le cas, seul physiquement intéressant ([6] , équations 1.11 et 1.12) où la densité de spin σ_{ijk} est complètement antisymétrique, et peut donc être remplacée par son quadrivecteur dual σ_i ; nous sommes obligés d'introduire un tenseur antisymétrique $G_{\check{i}j}$, dit champ gravitationnel de spin, dont la loi de génération sera

$$c^2 \square\ G_{\check{i}j} = \chi\, \partial_k\, \sigma_{\check{i}j}{}^{k} = \frac{ic}{2} \chi\, \epsilon_{ijk\ell} [\partial^k \sigma^\ell - \partial^\ell \sigma^k] \tag{3.1}$$

ou encore, compte tenu de l'importarte relation aujourd'hui classique [11], [2], [13], [14],

$$(3.2) \qquad 2\, T_{\underset{\smile}{ij}} = \partial_k \sigma_{\underset{\smile}{ij}}{}^{k} \qquad \underline{\text{ou}} \qquad 2\, T_{\underset{\smile}{ij}} = \frac{ic}{2} \; \varepsilon_{ijk\ell}[\partial^k \sigma^{\ell} - \partial^{\ell} \sigma^{k}]$$

$$(3.3) \qquad c^2 \Box\, G_{\underset{\smile}{ij}} = 2 \chi\, T_{\underset{\smile}{ij}} \qquad ;$$

à nouveau, notre théorie "retombe sur ses pattes" , car on devine, en rapprochant (3.3) de l'équation (1.1) d'Einstein, que $G_{\underset{\smile}{ij}}$ va se relier étroitement à la partie antisymétrique du tenseur fondamental g_{ij} .

Quant à la loi de la projection des particules d'épreuve dénuées de spin, écrivons-la maintenant sous forme différentielle (et non plus sous forme finie comme (2.3)) : la coincidence limite avec (2.?) sera obtenue si l'on écrit

$$(3.3) \qquad V'_i = -\alpha (G'_{ij})\, V^j \qquad ,$$

où les dérivées sont prises par rapport au temps propre de la particule d'épreuve.

Dimensionnellement parlant, l'on peut remarquer que $d\, G_{\underset{\smile}{ij}}/d\,\tau$ est homogène aux trois $\partial_u g_{44}$ de la théorie einsteinienne classique, comme il le fallait <u>a priori</u> (u = 1 , 2 , 3) .

La loi (3.3) rappelle celle de l'électromagnétisme, mais avec deux différences très importantes :

α . c'est $G'_{\underset{\smile}{ij}}$, et non $G_{\underset{\smile}{ij}}$, qui intervient ;

β . si G'_{ij} était un champ magnétique, la loi (3.3) serait celle du mouvement d'un pôle magnétique (et non d'une charge électrique : voir figure 1).

Cette loi (3.3) de la projection des particules d'épreuve sans spin est formellement semblable à la loi de recul de la source ([6] , équation 3.3)

$$(3.4) \qquad V'_i = \frac{2}{T}\, (T'_{\underset{\smile}{ij}})\, V^j \qquad ;$$

on montrera plus loin (équation (6.2)) que la loi (3.4) du recul de la source est immensément plus intense que la loi (3.3) de la projection des particules d'épreuve.

4. Les équations du champ de D. W. SCIAMA [10] deduites d'un calcul de Mme L. BOUCHE [1].

Mme L. BOUCHE a récemment considéré, en géometrie à connexion affine, un lagrangien dont le suivant est un cas particulier :

(4.1) $$\mathfrak{L} = \mathfrak{g}^{ij} S_{ij} + 2\sigma^{\mu} L_{\mu} + \mathfrak{L}_0 \quad ,$$

(4.2) $$S_{ij} = R_{ij} + q\,[\partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i] ,$$

(4.3) $$\partial \mathfrak{L}_0 / \partial g^{ij} = - \chi \mathfrak{T}_{ij} .$$

Par hypothèse, R_{ij} est le tenseur de Ricci associé à une connexion $L_{j\ k}^{\ i}$ telle que

(4.4) $$L_i \equiv L_{\underset{\smile}{i}\ j}^{\ j} = 0$$

(sans qu'on ait besoin de le préciser autrement) ; σ^{μ} est le multiplicateur de Lagrange correspondant ; Γ_i est un champ de quadri-vecteurs quelconque, et q une constante (qu'on pourrait ici inclure dans Γ_i mais qu'il sera plus explicite de conserver) ; $\mathfrak{L}_0$, enfin, est un terme symbolique qu'on suppose ne dépendre que des g^{ij}, et $\mathfrak{T}_{ij}$ est la densité tensorielle associée au tenseur inertial T_{ij}.

En variant l'integrale quadruple de $\mathfrak{L}$ par rapport aux 64 $L_{j\ k}^{\ i}$, aux 4 Γ_i, aux 16 g^{ij}, Mme BOUCHE obtient les 3 systèmes d'équations

(4.5) $$\mathfrak{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{j}}{}_{;k} = - \frac{2}{3} \delta^i_k \mathfrak{F}^j , \quad \mathfrak{F}^j \equiv \partial_k \mathfrak{g}^{jk} \quad ;$$

(4.6) $$q\mathfrak{F}^j = 0 , \quad \underline{\text{ou}} \quad \mathfrak{F}^j = 0 \quad \underline{\text{si}} \quad q \neq 0 \quad ;$$

(4.7) $$S_{ij} - \frac{S}{2} g_{ij} = \chi T_{ij} , \quad S \equiv g^{ij} S_{ij} .$$

L'ensemble (4.5) et (4.6) équivaut à l'équation

(4.8) $$\mathfrak{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{j}}{}_{;k} = 0$$

de la théorie unitaire classique ([14], chapitre III) et de D. W. SCIAMA ([10], équations (5.1) et (5.2)) ; on ne la retrouverait pas en supposant $q = 0$, mais, à la place, une équation obtenue par Mme TONNELAT sous des conditions moins larges qu'ici ([12] , Note II) .

L'équation (4.7) , identique à celle de D. W. SCIAMA ([10] , équation (5.2)), est manifestement une généralisation asymétrique de l'équation (1.1) d'Einstein. Il faut remarquer pourtant que dans S_{ij} et dans S figurent des termes en $[\partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i]$, dont notre théorie heuristique "ne sait que faire" (mais qu'on pourrait essayer, dans un schème "unitaire" , de rattacher au champ électromagnétique (2) . Nous ne pouvons pas faire disparaître ces termes, car, si nous faisons $q = 0$ dans (4.2) , le quadrivecteur $\mathfrak{F}^j$ apparaît dans (4.5) en contrepartie de la disparition de Γ_j , et les calculs d'approximations à venir vont se compliquer d'autant. La seule chose que nous puissions faire est de supposer que les termes $[\partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i]$ sont d'un ordre d'infinitude très supérieur aux $g_{\underset{\vee}{ij}}$ et aux $g_{ij} - \eta_{ij}$ (η_{ij} , approximation minkowskienne du tenseur métrique).

Si l'on cherche l'approximation quasi-minkowskienne de (4.7) (sous l'hypothèse qu'on vient de dire touchant $[\partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i]$) , il vient ([12] , équations (4.4) , (4.14) , (4.18) , (4.40))

(4.9) $$\frac{c^2}{4}\,\eta^{k\ell}\partial_k \partial_\ell\, g_{\underset{\vee}{ij}} \equiv \frac{c^2}{2}\,\Box\, g_{\underset{\vee}{ij}} = \chi\, T_{\underset{\vee}{ij}} \,.$$

Une remarque ici s'impose. Mr. LICHNEROWICZ a établi ([7] , Livre II , paragraphe 70) les formules

(4.10) $$g^{\overset{\vee}{ij}} = g^{ik}\, g^{j\ell}\, g_{\underset{\vee}{k\ell}} \,, \quad g_{\underset{\vee}{ij}} = g_{ik}\, g_{j\ell}\, g^{\overset{\vee}{k\ell}} \,,$$

qui, à l'approximation minkowskienne, se réduisent à

(4.11) $$g^{\overset{\vee}{ij}} = \eta^{ik}\, \eta^{j\ell}\, g_{\underset{\vee}{k\ell}} \,, \quad g_{\underset{\vee}{ij}} = \eta_{ik}\, \eta_{j\ell}\, g^{\overset{\vee}{k\ell}} \;;$$

---

(2) L'idée de principe même d'une théorie unitaire de la gravitation et de l'électromagnétisme ne séduit pas l'auteur de ces lignes, parce que, au niveau quantique, l'électromagnétisme apparaît comme un cas très particulier de la théorie générale (à venir) des champs quantifiés. C'est de celle-ci qu'il faudrait, semble-t-il, chercher à faire la synthèse avec la gravifique.

à l'approximation minkowskienne, $g_{\check{ij}}$ et $g^{\check{ij}}$ se comportent comme les composantes co- et contrevariantes d'un même tenseur minkowskien.

Compte tenu de cette remarque, et rapprochant (4.9) de la formule (3.3) trouvée heuristiquement, nous voyons qu'il faut poser

$$G_{\check{ij}} = g_{\check{ij}} \quad , \quad G^{\check{ij}} = g^{\check{ij}} \quad , \tag{4.12}$$

soit exactement ce qu'on espérait.

5. De la loi du mouvement d'une particule d'épreuve sans spin dans un champ gravitationnel de spin.

La réponse à cette question devrait se trouver dans les calculs en cours de Mme L. BOUCHE.

On sait la tendance qu'a la théorie unitaire à connexion affine à fournir une équation du mouvement de la particule d'épreuve de la forme, disons, $V'_i = H'_{\check{ij}} V^j$ (comme le voudrait notre théorie) plutôt qu'en $H_{\check{ij}} V^j$ (comme le voudrait l'électromagnétisme).

Toutefois, avant que les calculs adaptés au présent formalisme ne soient explicitement produits, il est impossible de dire si, oui ou non, l'influence du champ gravitationnel créé par une grosse masse douée de spin sur une particule d'épreuve sans spin se traduira par une loi d'écart à la géodésique ayant, à l'approximation minkowskienne, la forme (3.3) que nous avons postulée.

6. Deux ultimes remarques.

On sait qu'à l'approximation quasi-minkowskienne le terme S_{ij} domine complètement le terme $\frac{S}{2} g_{ij}$ au premier membre de (4.7) . Compte tenu de (4.7) et de sa contraction

$$S = - \chi T \tag{6.1}$$

nous pouvons écrire

$$- \frac{2}{S} S_{ij} + g_{ij} = \frac{2}{T} T_{ij} \quad , \tag{6.2}$$

et ce qu'on vient de dire montre que g_{ij} est négligeable devant $2T_{ij}/T$, ou encore, si T est supposé constant, que $g'_{\check{ij}}$ est négligeable devant

$2T'_{\underset{\vee}{ij}}/T$: tel est le résultat que nous annoncions à propos des équations (3.3) et (3.4) .

Dans $R_{\underset{\vee}{ij}}$ figure (on s'en assure aisément) la divergence $S_{\underset{\vee}{ij}}{}^{\overset{k}{+}}{}_{;k}$, où $S_{\underset{\vee}{ij}}{}^{k}$ désigne le tenseur de torsion de la variété. Rapprochant ceci de la formule $2T_{\underset{\vee}{ij}} = \sigma_{\underset{\vee}{ij}}{}^{k}{}_{;k}$ valable à l'approximation minkowskienne, on voit apparaître une <u>relation intime entre la densité de spin et la torsion de l'espace-temps</u>.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOUCHE (Mme L.). - Sur une autre forme des équations du champ dans une théorie unitaire du type Einstein-Schrödinger, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 247, 1958, p. 2302-2304.

[2] COSTA de BEAUREGARD (Olivier). - Sur la dynamique des milieux doués d'une densité de moment cinétique propre, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 214, 1942, p. 904-906.

[3] COSTA de BEAUREGARD (Olivier). - L'effet gravitationnel de spin, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 246, 1958, p. 237-240 et p. 561-564.

[4] COSTA de BEAUREGARD (Olivier). - L'hypothèse de l'effet gravitationnel de spin, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 247, 1958, p. 1092-1094.

[5] COSTA de BEAUREGARD (Olivier). - L'hypothèse de l'effet gravitationnel de spin, Cahiers de Physique (sous presse).

[6] COSTA de BEAUREGARD (Olivier). - L'hypothèse de l'effet inertial de spin, Séminaire M. Janet, t. 2, 1958/59, n° 4.

[7] LICHNEROWICZ (André). - Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. - Paris, Masson, 1955.

[8] PARK (David). - La notion de particule en théorie classique et en théorie quantique, J. Phys. et le Radium, t. 18, 1957, p. 11-16.

[9] SCIAMA (D. W.). - On the origin of inertia, Monthly Not. roy. astr. Soc., t. 113, 1953, p. 34-42.

[10] SCIAMA (D. W.). - On a non symmetric theory of the pure gravitational field, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 54, 1958, p. 72-80.

[11] TETRODE (H.). - Der Impuls-Energiesatz in der Diracschen Quantentheorie des Elektrons, Z. Phys., t. 49, 1928, p. 858-864.

[12] TONNELAT (Mme M.-A.). - La théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements. - Paris, Gauthier-Villars, 1955.

[13] WEYSSENHOF (J.) and RAABE (A.). - Relativistic dynamics of spin-fluids and spin-particles, Acta phys. pol., t. 9, 1947, p. 7-25.

[14] WEYSSENHOF (J.). - Relativistic dynamics of spin-fluids and spin-particles Acta phys. pol., t. 9, 1947, p. 26-45.