SÉMINAIRE JANET.
MÉCANIQUE ANALYTIQUE
ET MÉCANIQUE CÉLESTE

OLIVIER COSTA DE BEAUREGARD

L'hypothèse de l'effet inertial de spin

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 2 (1958-1959), exp. nº 4, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1958-1959__2__A4_0>

L'HYPOTHÈSE DE L'EFFET INERTIAL DE SPIN

par Olivier COSTA de BEAUREGARD

1. Origine et axiomatique de la notion de densité de spin.

La notion de densité de spin est apparue avec la théorie de l'électron de Dirac [14], [15], où elle est représentée par un tenseur de rang 3 complètement antisymétrique $\sigma^{\check{ijk}}$ ou par son quadrivecteur dual $ic\sigma^{\ell}$ ($i, j, k, \ell = 1, 2, 3, 4$; $x_4 = ict$; dans toute cette étude, nous restons en relativité restreinte).

Le problème s'est aussitôt posé d'axiomatiser cette notion. Parmi les nombreuses études consacrées au sujet, retenons ici les trois séries ([1], [2], [3], [4], [5]), ([2], [22]), ([23]) qui touchent de près au présent problème.

La variance relativiste d'un moment cinétique fini est clairement indiquée par la considération du moment cinétique orbital d'un point matériel : les 3 composantes en u, v ($u, v, w = 1, 2, 3$) du tenseur antisymétrique de rang 2

$$C^{\check{ij}} = x^i p^j - x^i p^j$$

représentent le moment cinétique orbital proprement dit ; les 3 composantes en $u, 4$, soit

$$C^{\check{u4}} = icm(x^u - v^u t) ,$$

où m désigne la masse maupertuisienne et v^u la vitesse ordinaire, représentent le classique "moment barycentrique" (si $t = 0$) , corrigé par la prise en considération de la non-simultanéité du point matériel et de l'origine des coordonnées (si $t \neq 0$).

Par ailleurs, l'élément de volume sur une hypersurface tridimensionnelle (¹) $\mathcal{E}$ du genre espace est représenté par le produit extérieur $[dx^i\, dx^j\, dx^k]$ de trois petits vecteurs tangents, ou par le quadrivecteur dual $ic\, du^{\ell}$ (¹).

(¹) Nous délaissons ici les notations σ et $d\sigma^i$, rendues classiques par SCHWINGER et revenons à celles $\mathcal{E}$ et du^i de nos anciens travaux, pour écarter le risque de confusion avec σ^i densité de spin.

Il faut donc qu'en multipliant ce tenseur (sans ou avec contractions) par la densité de spin σ on obtienne un tenseur antisymétrique du second rang. En "jouant des duals" de toutes les façons possibles, on s'assure que la définition la plus générale de σ est telle que

$$C^{\check{ij}} = \iiint_{\mathcal{E}} \sigma^{\check{ij}k} \, \delta u_k \; :$$

c'est celle d'un tenseur de rang 3 essentiellement antisymétrique sur deux indices.

Dire densité de moment cinétique propre, c'est dire <u>ipso facto</u> densité de moment pondéromoteur propre. La variance relativiste d'une densité de moment pondéromoteur est manifestement celle d'un tenseur antisymétrique de rang 2, $\mu^{\check{ij}}$, dont les 3 composantes en u, v représentent la grandeur classique proprement dite.

La relation à instituer entre $\mu^{\check{ij}}$ et $\sigma^{\check{ij}k}$ est

$$\partial_k \sigma^{\check{ij}k} = \mu_{(1)}^{\check{ij}} \; ; \tag{1.1}$$

cela se démontre de la même manière que la relation bien connue

$$\partial_j T^{ij} = f^i$$

entre le tenseur inertial et la densité de force pondéromotrice : on prend l'intégrale quadruple des deux membres, faisant apparaître ainsi une impulsion ou une impulsion de rotation au second membre, et l'on transforme le premier membre en intégrale triple étendue à deux hypercloisons du genre espace et une hyperparoi du genre temps rejetée à l'infini. L'indice (1) dans (1.1) indique que d'autres contributions à μ^{ij} vont être considérées.

Qui dit densité de moment pondéromoteur propre dit <u>ipso facto</u> possibilité d'une asymétrie du tenseur inertial T^{ij}. En effet, la théorie classique de l'élasticité montre qu'une asymétrie du tenseur élastique E^{uv} entraîne l'existence d'une densité de moment pondéromoteur propre μ^{uv} telle que

$$2\, E^{\check{uv}} \equiv E^{uv} - E^{vu} = \mu^{\check{uv}} \, .$$

Comme la relation du tenseur élastique à la densité de force est la même que celle du tenseur inertial, nous devons prendre en considération la possibilité de la relation

$$2\, T^{\check{ij}} \equiv T^{ij} - T^{ji} = \mu_{(2)}^{\check{ij}} \, . \tag{1.2}$$

Pour comprendre ce qui suivra de là, cherchons à généraliser le classique "schéma matière pure" en posant

(1.3) $$T^{ij} = \rho U^i V^j$$

et profitant de la présence du ρ pour imposer sur U^i la condition

(1.4) $$V_i V^i = U_i V^i = - c^2 \ :$$

V^i représente toujours par hypothèse la quadrivitesse cinématique ; que va donc représenter U^i ?

Deux définitions de l'impulsion-énergie sont a priori possibles :

$$P^i = \iiint_{\mathcal{E}} \rho U^i V^j \delta u_j , \quad L^i = \iiint_{\mathcal{E}} \rho V^i U^j \delta u_j .$$

La première se recommande fortement par les deux raisons que voici :

1° Avec la seconde, U^i est un "fantôme" et "ne fait rien", tandis qu'avec la première, U^i est le quadrivecteur directeur de l'impulsion-énergie ;

2° Prenons le cas d'un tube matériel infiniment délié de section constante : V^i étant tangent à l'hypertube, la valeur du produit scalaire $V^i \delta u_i$ est indépendante de l'orientation de l'hypersection (du genre espace), tandis que la valeur de $U^i \delta u_i$ est "relative" à cette orientation ; il est raisonnable d'exiger que la définition de la véritable impulsion-énergie physique soit absolue, ce qui ramène à la première définition.

Revenons au cas du tenseur T^{ij} général.

D'après ce qui précède, nous poserons

(1.5) $$P^i = \iiint_{\mathcal{E}} T^{ij} \delta u_j , \quad L^i = \iiint_{\mathcal{E}} T^{ji} \delta u_j ,$$

(1.6) $$T^i = 2 \iiint_{\mathcal{E}} T^{\check{ij}} \delta u_j ,$$

(1.7) $$P^i = L^i + T^i \ :$$

l'impulsion-énergie totale d'une gouttelette matérielle douée de spin (définie de manière invariante ou absolue) est la somme d'une impulsion-énergie longitudinale L^i et d'une impulsion-énergie transversale T^i (définies l'une et l'autre "relativement" à l'hypersection).

En rapprochant l'une de l'autre les formules (1.1) et (1.2), il semble indiqué de poser dans le cas général

(1.8) $$\mu^{ij} = \mu_{(1)}{}^{ij} + \mu_{(2)}{}^{ij}$$

c'est-à-dire

(1.9) $$\mu^{ij} = \partial_k \sigma^{ijk} + T^{ij} - T^{ji} .$$

La suite montrera que le cas

(1.10) $$\mu^{ij} = 0 , \quad T^{ij} - T^{ji} + \partial_k \sigma^{ijk} = 0 \quad ,$$

présente un grand intérêt. Dans ce cas, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux divergences du tenseur inertial soient égales, c'est-à-dire pour que la divergence du T^{ij} soit nulle,

(1.11) $$\partial_j T^{ji} = \partial_j T^{ij} , \quad \partial_j T^{ij} = 0 ,$$

est que la densité de spin σ soit complètement antisymétrique.

Dans ce cas (qui est celui de la théorie de l'électron de Dirac) les sources de l'impulsion-énergie transversale sont purement superficielles. On a en effet, d'après (1.11_2) ,

(1.12) $$2 \iiint_{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1} T^{ij} \, \delta u_j = 2 \iiint_{\mathcal{P}} T^{ij} \, \delta u_j \qquad ;$$

$\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ désignent deux hypercloisons du genre espace auxquelles est associée la variation de l'impulsion-énergie transversale entre un état initial et un état final, et $\mathcal{P}$ l'hyperparoi du genre temps engendrée par le contour de la goutte matérielle.

Dans la théorie que nous avons en vue, ceci va traduire le fait que la variation de l'impulsion-énergie transversale égale le flux d'impulsion-énergie apportée ou emportée par "l'onde gravitationnelle de spin".

2. La densité de spin en théorie de l'électron de Dirac.

A partir des 16 matrices bien connues

$$1 , \gamma^i , \gamma^{ij} , \gamma^{ijk} \equiv \bar{\gamma}^{\ell} , \gamma^{ijk\ell} \equiv \bar{\gamma} \, (= "\gamma^5") .$$

on définit les cinq "tenseurs diraciens" ($\varkappa$, fréquence propre de l'onde électronique, proportionnelle à la masse propre de l'électron)

densité d'énergie propre : $-\dfrac{ich}{2\pi} \varkappa \bar{\psi} \psi = c^2 \rho$

densité de courant de Dirac : $- ie \bar{\psi} \gamma^i \psi = j^i$

densité de polarisation électromagnétique : $\dfrac{ie}{2\varkappa} \bar{\psi} \gamma^{ij} \psi = m^{ij}$

densité de spin de Dirac : $- \dfrac{ich}{4\pi} \bar{\psi} \gamma^{ijk} \psi = \sigma^{ijk}$

"pseudo-invariant" : $-\frac{ich}{8\pi\chi}\bar{\psi}\gamma^{ijk\ell}\psi = \omega^{ijk\ell}$,

et les cinq "tenseurs schrödingériens"

$$\{[\partial^i]\gamma\} = \bar{\psi}[\partial^i]\gamma\psi + 2i\,\varepsilon\,A^i\bar{\psi}\,\gamma\,\psi$$

($[\partial^i] = \overset{\rightarrow}{\partial^i} - \overset{\leftarrow}{\partial^i}$, $\varepsilon = -2\pi\, e/ch$, A^i quadripotentiel électromagnétique) :

densité de courant de Gordon : $\frac{ie}{2\chi}\{[\partial^i]\} = k^i$

tenseur inertial asymétrique de Tetrode : $\frac{ich}{4\pi}\{[\partial^i]\gamma^j\} = T^{ij}$

densité de spin de Durand : $-\frac{ich}{8\pi}\{[\partial^i]\gamma^{jk}\} = \tau^{i\,jk}$

- ? - $\{[\partial^i]\tilde{\gamma}^j\} = S^{ij}$

densité de courant magnétique de polarisation : $-\frac{ice}{2\chi}\{[\partial^i]\tilde{\gamma}\} = \ell^i$

En multipliant l'équation de Dirac à gauche par les cinq $\bar{\psi}\,\gamma$ et son adjointe à droite par les $\gamma\psi$, ajoutant et retranchant, l'on obtient les 2 × 5 équations de FRANZ [17] KOFINK [19] , qui se scindent [6] en deux systèmes de 5 : le système (A) d'interprétation électromagnétique, le système (B) d'interprétation dynamique. Indépendants en l'absence de potentiel électromagnétique A^i , ces deux systèmes deviennent symétriquement couplés en présence de A^i et, ce, du fait du terme potentiel $A^i\bar{\psi}\,\gamma\,\psi$ dans les tenseurs schrödingériens.
Le rôle du A^i apparait donc ici non moins "dynamique" qu'"électromagnétique".

Les deux équations qui nous interessent ici sont (B3) et (B4) , qui s'écrivent

(2.1) $$2\,T^{\overset{\vee}{ij}} \equiv T^{ij} - T^{ji} = -\,\partial_k \sigma^{ijk}$$

(formule découverte et interprétée par Tetrode [20]) et, la sommation s'entendant par permutation circulaire,

(2.2) $$-\,\sigma^{ijk} = \Sigma\, \tau^{\overset{\vee}{ijk}} + \partial_\ell\, \omega^{ijk\ell} \quad ;$$

cette formule décompose la densité de spin de Dirac comme la formule (A 2) , découverte et interprétée par GORDON [18] , décompose la densité de courant de Dirac . De (2.2) l'on déduit, du fait de l'antisymétrie complète de $\omega^{ijk\ell}$,

(2.3) $$-\,\partial_i \sigma^{ijk} = \partial_i\, \Sigma\, \tau^{\overset{\vee}{ijk}}$$

E. DURAND [16] a opéré sur l'équation de Dirac du second ordre comme FRANZ et KOFINK l'avaient fait sur celle du premier ordre. Ce faisant, il a obtenu 2 × 5 nouvelles équations [7] , [12] , dont seules ici nous interessent les cinq (D) :

$$\partial_i \left\{ [\partial^i] \gamma \right\} = \text{(à un facteur physique près)}$$

$$0 \ , \ H^{ik} j_k \ , \ H^{ik} m^i_{\ k} - H^{jk} m^i_{\ k} \ , \ H^{ik} \sigma_k \ , \ 0 \quad ;$$

($H^{ij} = \partial^j A^i - \partial^i A^j$, champ électromagnétique). (D 1) et (D 5) annulent la divergence du courant de Gordon et celle du courant magnétique de polarisation ; (D 2) égale la divergence du tenseur inertial de Tetrode à la densité de force de Lorentz ; (D 4) , de forme analogue mais de sens énigmatique, s'écrit $\partial_i S^{ij} = H^{ik} \sigma_k$; (D 3) enfin, interprétée par DURAND [16] , s'écrit

(2.4) $\mu^{ij} \equiv H^{ik} m^j_{\ k} - H^{jk} m^i_{\ k} = \partial_k \tau^{kij}$: elle égale la densité de couple pondéromoteur propre de Maxwell à la divergence de la densité de spin de Durand.

Si l'on pose

$$\sigma^{ijk}_{(0)} = \tau^{jik} - \tau^{ijk} \tag{2.5}$$

et porte (2.4) dans (2.3) , il vient

$$\mu^{ij} = T^{ij} - T^{ji} + \partial_k \, \sigma_{(0)}^{ijk} \ . \tag{2.6}$$

Les trois formules (2.1) , (2.4) , (2.6) , déduites de la théorie de l'électron de Dirac, sont à comparer aux (1.1) , (1.2) , (1.9) trouvées par des raisonnements formels <u>a priori</u>. (2.1) de Tetrode est nettement plus particulière que ce qu'on pourrait imaginer <u>a priori</u> : elle précise le $\mu_{(2)}^{ij}$ de (1.2) en lui donnant la forme $-\partial_k \sigma^{ijk}$, et elle précise le σ^{ijk} abstrait en le rendant complètement antisymétrique.

Une remarque pour finir. Le tenseur inertial de Tetrode

$$\frac{ich}{4\pi} \bar{\psi} [\partial^i] \gamma^j \psi - ie A^i \bar{\psi} \gamma^j \psi$$

n'est pas (en général) proportionnel au produit des deux courants de Dirac et de Gordon

$$\bar{\psi} \gamma^i \psi \qquad \text{et} \qquad \bar{\psi} [\partial^i] \psi - 2 i \varepsilon A^i \bar{\psi} \psi \ ,$$

mais sa forme rappelle analogiquement celle de ce produit ; on peut appeler j "l'indice de la vitesse" et i "l'indice de l'impulsion-énergie".

3. L'hypothèse de l'effet inertial de spin [11] , [13] .

Prenons un morceau de matière initialement sans densité de spin et possédant finalement une densité de spin. Cela est parfaitement réalisable macroscopiquement : il suffit de s'adresser au ferromagnétisme, qui est dû (comme l'ont prouvé les expériences d'Einstein-Haas) au spin de l'électron ; le morceau de matière ferro- (ou ferri-) magnétique devra être initialement non aimanté et finalement aimanté.

Dans l'état initial le T^{ij} est symétrique, et dans l'état final il sera devenu asymétrique. Comme aucune force (tout au moins d'origine antérieurement connue) n'est supposée appliquée au morceau de matière, son impulsion-énergie physique n'aura pas varié. Si donc la précédente théorie doit être prise au sérieux, la vitesse du morceau de matière va varier ; il apparaîtra un effet de recul, cinématiquement observable.

L'impulsion-énergie transversale changée de signe, acquise en même temps que la densité de spin, est, en vertu de ce qui précède,

$$(3.1) \qquad - T^{i} = - 2 \iiint_{\mathcal{C}} T^{\underset{\vee}{ij}} \, \delta u_j = \iiint \partial_k \sigma^{ijk} \, \delta u_j = \iint \sigma_j \, [dx^i \, dx^j]$$

c'est-à-dire, en langage prérelativiste,

$$(3.2) \qquad - \vec{T} = - \iiint \overrightarrow{\mathrm{rot}\, \sigma} \, dv = \iint \vec{\sigma} \wedge d\vec{s}, \qquad T_4 = 0$$

(T^{i} est perpendiculaire à δu^{i} d'après (1.6) , et l'on intègre classiquement à temps constant).

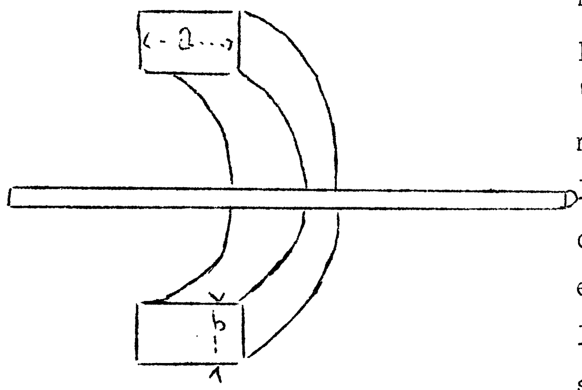
A titre d'hypothèse de travail, postulons l'existence de cet effet. Par analogie avec le précédent bien connu de la mécanique analytique de la charge électrique ponctuelle, nous admettons que l'impulsion-énergie totale obéit à une loi de conservation ou d'extremum, et que l'impulsion-énergie "cinématique" ou "longitudinale" diffère de la précédente par une impulsion-énergie "potentielle" ou "transversale" . Dans la theorie que nous avons en vue, cette impulsion-energie potentielle va être transportée par les ondes d'"un champ gravitationnel de spin" decrit par un tenseur antisymétrique $G^{\underset{\vee}{ij}}$ ou $G_{\underset{\vee}{ij}}$.

La loi instantanée du recul de la source acquérant du spin est manifestement

$$(3.3) \qquad V'^{i} = \frac{2}{T} \, (T'^{\underset{\vee}{ij}}) \, V_j \, ,$$

où les dérivées sont prises par rapport au temps propre de cette source du champ. $\frac{2}{T} (T'^{\underset{\vee}{ij}})$ est la force réactive exercée sur la source du champ lors de l'émission de l'onde gravitationnelle de spin .

Pour mettre en évidence l'effet inertial de spin postulé dans notre théorie, il faut évidemment choisir une forme appropriée du morceau de matière ferro- ou ferrimagnétique, ainsi que de la distribution de la densité de spin en son intérieur. Imaginons par exemple un anneau à section rectangulaire à la surface duquel nous distinguerons, comme sur un "pneumatique", une "jante", une "bande de roulement", et deux "flancs". Si nous l'aimantons à saturation par un courant rectiligne parcourant son axe, il apparaîtra dans le "pneu" une densité de spin $\vec{\sigma}$ constante en module et "circulant" autour du "pneu" comme le champ magnétique $\vec{H}$. Dans (3.2_1), les deux intégrales de "flancs" se détruisent, et il reste la différence entre les intégrales de "bande de roulement" et de "jante", soit



$$T = 2\pi \, a \, b \, \sigma \quad .$$

La masse de l'anneau est, ρ désignant sa densité, et r son rayon moyen,

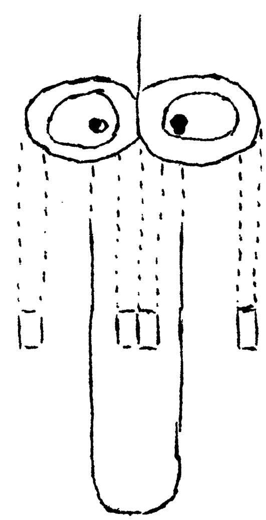
$$M = 2\pi \, a \, b \, r \, \rho \quad ;$$

la vitesse acquise sera donc (si notre théorie est "physique")

$$V = \frac{\sigma}{\rho r} \quad :$$

pour σ et ρ donnés, elle sera d'autant plus grande que r sera plus petit : comme l'effet pondéromoteur (hypothétique) est un effet de surface, il y a intérêt à opérer sur un corps très petit.

Plutôt qu'une translation, il vaut mieux chercher à réaliser une rotation, ce qui est en principe possible grâce au dispositif ci-joint : l'équipage mobile est formé de deux petits anneaux de ferrite accolés en figure ∞ et suspendus à un fil de torsion ; le circuit inducteur, fixe dans le laboratoire, est en forme "d'épingle à cheveux".



On trouve pour la vitesse angulaire acquise (en l'absence de couple de rappel et d'amortissement)

$$\omega = \left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right) \frac{\sigma}{\rho r_0^2} \quad :$$

r_0, rayon de giration de l'équipage

mobile, r, rayon moyen des anneaux, $r + \Delta r$, distance de leurs centres au fil de suspension. Cette formule est analogue à celle de l'effet Einstein-Haas

$$\omega = \frac{\sigma}{\rho r_0^2} \quad .$$

On peut remarquer que les lignes de champ de deux courants rectilignes antiparallèles sont (dans un plan normal aux fils) les cercles d'un faisceau admettant les traces des fils pour cercles-points. Il faudrait centrer les cercles moyens des anneaux sur deux telles lignes de champ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] COSTA de BEAUREGARD (Olivier). - Le quadrivecteur densité de moment cinétique propre, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 211, 1940, p. 428-430.

[2] COSTA de BEAUREGARD (Olivier). - Le tenseur antisymétrique densité de moment pondéromoteur propre, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 211, 1940, p. 499-501.

[3] COSTA de BEAUREGARD (Olivier). - Sur la dynamique des milieux doués d'une densité de moment cinétique propre, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 214, 1942, p. 904-906.

[4] COSTA de BEAUREGARD (Olivier). - Sur la théorie des moments cinétiques propres en relativité restreinte, J. Math. pures et appl., Série 9, t. 21, 1942, p. 267-275.

[5] COSTA de BEAUREGARD (Olivier). - Théorie des milieux continus doués d'une densité de moment cinétique propre, J. Math. pures et appl., t. 22, 1943, p. 118-136.

[6] COSTA de BEAUREGARD (Olivier). - Etablissement et étude physique des dix relations différentielles de Franz-Kofink, J. Math. pures et appl., t. 22, 1943, p. 151-161.

[7] COSTA de BEAUREGARD (Olivier). - Sur l'invariance de jauge des tenseurs de la théorie de Dirac, Sur l'interprétation d'une formule de Tetrode et d'une formule de M. E. Durand, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 218, 1944, p. 961-963.

[8] COSTA de BEAUREGARD (Olivier). - La théorie de la relativité restreinte. - Paris, Masson, 1949.

[9] COSTA de BEAUREGARD (Olivier). - L'effet gravitationnel de spin, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 246, 1958, p. 237-240.

[10] COSTA de BEAUREGARD (Olivier). - L'effet gravitationnel de spin, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 246, 1958, p. 561-564.

[11] COSTA de BEAUREGARD (Olivier). - L'hypothèse de l'effet gravitationnel de spin, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 247, 1958, p. 1092-1094.

[12] COSTA de BEAUREGARD (Olivier). - Relation entre la densité de spin d'E. Durand et celle de Dirac, interprétation physique de la relation entre le

tenseur inertial de Tetrode et le produit des courants de Dirac et de Gordon, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 247, 1958, p. 1965-1967.

[13] COSTA de BEAUREGARD (Olivier). - L'hypothèse de l'effet gravitationnel de spin, Cahiers de Physique (sous presse).

[14] DIRAC (P. A. M.). - The quantum theory of the electron, Proc. royal Soc. London, Series A, t. 117, 1928, p. 610-624.

[15] DIRAC (P. A. M.). - The quantum theory of the electron, II., Proc. royal Soc. London, Series A, t. 118, 1928, p. 351-361.

[16] DURAND (Emile). - Sur dix relations conséquences des équations du second ordre de Dirac, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 218, 1944, p. 36-38.

[17] FRANZ (Walter). - Zur Methodik der Dirac-Gleichung, S. B. Bayer Akad. Wiss., t. 3, 1935, p. 379-435.

[18] GORDON (W.). - Der Strom der Diracschen Elektronentheorie, Z. für Physik, t. 50, 1928, p. 630-632.

[19] KOFINK (W.). - Zur Diracschen Theorie des Elektrons, III., Annalen der Physik, t. 38, 1940, p. 565-582.

[20] TETRODE (H.). - Der Impuls-Energiesatz in der Diracschen Quantentheorie des Elektrons, Z. für Physik, t. 49, 1928, p. 858-864.

[21] WEYSSENHOF (J.) and RAABE (A.). - Relativistic dynamics of spin-fluids and spin-particles, Acta phys. pol., t. 9, 1947, p. 7-18.

[22] WEYSSENHOF (J.). - Relativistic dynamics of spin fluids and spin particles, Acta phys. pol., t. 9, 1947, p. 18-45.

[23] WINOGRADSKI (Mme J.). - Sur le tenseur impulsion-énergie cinétique et le théorème de Noether, Cahiers de Physique, t. 67, 1956, p. 1-5.