SÉMINAIRE JANET.
MÉCANIQUE ANALYTIQUE
ET MÉCANIQUE CÉLESTE

JEAN GRÉMILLARD

Solutions périodiques du problème des trois corps

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 2 (1958-1959), exp. nº 3, p. 1-26
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1958-1959__2__A3_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de MÉCANIQUE ANALYTIQUE
et de MÉCANIQUE CÉLESTE
Année 1958/59
-:-:-:-

20 décembre 1958

SOLUTIONS PÉRIODIQUES DU PROBLÈME DES TROIS CORPS

par Jean GRÉMILLARD

L'étude des solutions périodiques du problème des trois corps est une application à la mécanique céleste de la théorie des solutions périodiques d'un système différentiel élaborée par POINCARÉ. Cette théorie est basée sur une extension du théorème classique de Cauchy sur l'existence des solutions d'un système d'équations différentielles, extension souvent connue sous le nom de théorème de Poincaré. C'est d'ailleurs à l'occasion de ses recherches sur le problème des trois corps que POINCARÉ a été amené à construire la théorie dont nous parlons, et avant d'étudier les solutions périodiques du problème des trois corps il convient de présenter les grandes lignes des théorèmes sur lesquels on s'appuie.

1. Solutions périodiques d'un système différentiel.

Voici en premier lieu le théorème de Poincaré :

Soit le système

$$\text{(S)} \qquad \boxed{\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1 , x_2 , \ldots , x_n , t , \varepsilon) \quad (i = 1 , 2 , \ldots , n)}$$

on suppose que ε est un paramètre arbitraire et que pour $\varepsilon = 0$ le système de fonctions

$$x_1 = \varphi_1(t) \quad , \quad x_2 = \varphi_2(t) , \ldots , x_n = \varphi_n(t)$$

continues de $t = 0$ à $t = t_0$ constitue une solution de (S). De plus les X sont supposées développables en séries ordonnées suivant les puissances de ε et de $x_i - \varphi_i(t)$ pour toute valeur de t entre 0 et t_0, les coefficients de ces développements étant, bien entendu, des fonctions continues de t. Dans ces conditions, les solutions de (S) prenant respectivement pour $t = 0$ les valeurs

$$\varphi_1(0) + \alpha_1 , \varphi_2(0) + \alpha_2 , \ldots , \varphi_n(0) + \alpha_n$$

seront continues de 0 à t_o , et développables suivant les puissances de

$$\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_n , \quad \varepsilon$$

pourvu que ces grandeurs aient des modules suffisamment petits .

Considérons maintenant le système

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1 , 2 , \dots , n) \tag{1}$$

où les X sont des fonctions uniformes données de $x_1 , x_2 , \dots , x_n$. Soit la solution particulière

$$x_1 = \varphi_1(t) , \quad x_2 = \varphi_2(t) , \dots , \quad x_n = \varphi_n(t) \tag{2}$$

si pour $t = T$, valeur particulière de t , les n variables x_i reprennent leurs valeurs initiales de sorte que $\varphi_i(0) = \varphi_i(T)$, les φ seront des fonctions périodiques de t avec la période T , et (2) sont dites solution périodique de (1).

Reprenons (1), où les X seront supposées dépendre à la fois des x et du temps t , et périodiques en t avec la période T . Si les φ sont telles que $\varphi_i(0) = \varphi_i(T)$, (2) sera encore solution périodique, mais cette fois la période est imposée.

Supposons enfin que dans (1) les X ne dépendent que des x , et qu'elles soient périodiques par rapport aux p premières variables x avec la période 2π. Imaginons de plus qu'on ait

$$\varphi_1(T) = \varphi_1(0) + 2k_1\pi \quad ; \quad \varphi_2(T) = \varphi_1(0) + 2k_2\pi \; ; \dots ; \quad \varphi_p(T) = \varphi_p(0) + 2k_p\pi$$

$$\varphi_{p+1}(T) = \varphi_{p+1}(0) \; ; \quad \varphi_{p+2}(T) = \varphi_{p+2}(0) \; ; \dots ; \quad \varphi_n(T) = \varphi_n(0)$$

$k_1 , k_2 , \dots , k_p$ étant des entiers. On aura

$$\varphi_i(t + T) = \varphi_i(t) + 2k_i\pi \qquad \text{pour } i = 1 , 2 , \dots , p$$

$$\varphi_i(t + T) = \varphi_i(t) \qquad \text{pour } i = p + 1 , p + 2 , \dots , n .$$

On convient de dire que (2) constitue une solution périodique de (1).

2. Plaçons-nous maintenant dans les conditions du théorème de Poincaré.

Soit

$$(3) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1 , x_2 , \ldots , t , \varepsilon)$$

où les X_i sont des fonctions des n variables x, du temps t, et du paramètre arbitraire ε. De plus, les X_i sont périodiques en t de période T. On suppose que pour $\varepsilon = 0$ le système de fonctions (2) constitue une solution périodique de (3). Cherchons si pour ε non nul mais suffisamment petit (3) admet encore des solutions périodiques. D'après le théorème de Poicaré les solutions de (3) prenant pour $t = 0$ les valeurs

$$\varphi_i(0) + \alpha_i \qquad (i = 1 , 2 , \ldots , n)$$

sont continues de $t + 0$ à $t = T$ et peuvent être développées en séries ordonnées suivant les puissances croissantes des α_i et de ε si les modules des α_i et de ε sont suffisamment petits. On aura

$$x_i = f_i(t , \alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n , \quad) \qquad (i = 1 , 2 , \ldots , n) ;$$

ce système de fonctions sera solution de (3) si l'on peut résoudre les n équations

$$(4) \qquad f_i(T , \alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n , \varepsilon) - f_i(0 , \alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n , \varepsilon) = \psi_i = 0 .$$

Ces équations sont vérifiées pour $\varepsilon = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, car alors elles se réduisent à

$$\varphi_i(T) - \varphi_i(0) = 0$$

puisque les fonctions φ admettent la période T. (4) auront pour des valeurs suffisamment petites de ε, des solutions où les α_i seront voisins de 0. On aura donc une solution périodique de (3) pour ε assez petit. On sera certain de l'existence de cette solution si

$$\left\| \frac{D(\psi_i)}{D(\alpha_k)} \right\| \neq 0 \qquad \text{pour} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \varepsilon = 0 .$$

On aura en général des difficultés pour former ce jacobien. Mais il est un cas où ces difficultés disparaîtront, c'est-celui où l'on sait intégrer complètement (3) pour $\varepsilon = 0$. On aura explicitement les fonctions

$$f_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0).$$

Si l'on suppose que (3) admet une intégrale première fonction périodique de t avec la période T, soit

$$F(x_1, \ldots, x_n, t, \varepsilon) = \mathrm{Cte}$$

quand on remplace dans cette intégrale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les $f_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \varepsilon)$ on a les égalités suivantes :

$$F[f_i(0), 0] = F[f_i(T), T] = F[f_i(T), 0]$$

en écrivant pour simplifier $f_i(t)$ au lieu de $f_i(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \varepsilon)$ et sans mettre ε en évidence dans F. Si nous considérons l'équation

(5) $$F[f_i(T), 0] - F[f_i(0), 0] = 0$$

on voit qu'elle établit une relation entre les ψ_i de sorte que les n équations (4) ne sont pas indépendantes. Plus précisément le premier membre de (5) est développable suivant les puissances des $f_i(T) - f_i(0)$, c'est-à-dire des ψ_i. Si, par exemple, pour le système de valeurs $\varepsilon = 0$, $t = 0$, $x_i = \varphi_i(0)$ la dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial x_n}$ n'est pas nulle, alors les $n - 1$ équations

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_{n-1} = 0$$

entraînent d'après (5) la n-ième équation $\psi_n = 0$ et les n équations (4) ne sont pas indépendantes. Si l'on avait $\frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$, on prendrait une autre des dérivées du premier ordre de F et la conclusion précédente ne deviendrait douteuse que dans le cas où l'on aurait simultanément

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

pour

$$\varepsilon = 0, \quad t = 0, \quad \text{et} \quad x_i = \varphi_i(0)$$

Mais si $\frac{\partial F}{\partial x_n}$ n'est pas nulle pour les valeurs précédentes des variables dont elle dépend, les $n - 1$ premières équations (4) jointes à l'équation $F = Cte$ où l'on remplacera t par 0 déterminant pour une valeur donnée de la constante la solution périodique correspondant à une valeur donnée de ε. Si on laisse C arbitraire, à chaque valeur de ε correspondra une infinité de solutions périodiques dépendant d'une constante arbitraire. Si au lieu d'une, on a deux intégrales premières

$$F(x_i , t) = C_1 \quad ; \quad \Phi(x_i , t) = C_2$$

on voit immédiatement par des raisonnements analogues que les n équations (4) se réduisent à $n - 2$, si les déterminants fonctionnels

$$\frac{D(F , \Phi)}{D(x_k , x_h)} \qquad (k \neq h)$$

ne s'annulent pas tous pour $\varepsilon = 0$, $t = 0$, $x_i = \varphi_i(0)$.

3. <u>Considérons maintenant le cas où les</u> X_i <u>ne dépendent pas explicitement de</u> t.

$$(6) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1 , x_2 , \dots , x_n , \varepsilon) \qquad (i = 1 , 2 , \dots , n)$$

Si les équations (6) admettent une solution périodique, elles en admettront une infinité : d'une solution périodique, en effet, on peut déduire une autre solution en changeant t en $t + h$, h étant une constante arbitraire. Supposons que pour $\varepsilon = 0$, (6) admette comme solution périodique de période T le système de fonctions

$$x_1 = \varphi_1(t) \; ; \; x_2 = \varphi_2(t) \; ; \dots ; \; x_n = \varphi_n(t) \; ;$$

où les φ_i sont des fonctions analytiques de t. Si pour une valeur de ε différente de 0, nous désignons par $\varphi_i(0) + \alpha_i$ la valeur des x_i pour $t = 0$, d'après le théorème de Poincaré la valeur des x_i pour $t = T + \tau$ sera

$$f_i(T + \tau , \alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_n , \varepsilon)$$

et fonction holomorphe de $\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_n , \varepsilon$ et τ pour des valeurs suffisamment petites des modules de ces quantités. La solution ainsi obtenue sera périodique avec la période $T + \tau$ si sont vérifiées les conditions de périodicité

(7) $f_i(T+\tau, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \varepsilon) - f_i(0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \varepsilon) = 0 \quad (i=1,2,3,\ldots,n).$

Les equations (7) sont vérifiées par le système de valeurs

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0 , \quad \varepsilon = 0 , \quad \tau = 0$$

puisqu'alors elles deviennent $\varphi_i(T) - \varphi_i(0) = 0$. (7) renferment $n + 1$ inconnues $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n$, et τ . On peut donc se donner arbitrairement une inconnue, et particulièrement une des α , et faire par exemple $\alpha_n = 0$. (7) détermineront en général, $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_{n-1} , \tau$ en fonctions holomorphes de ε . Si le système (6) admet une intégrale première

$$F(x_1 , x_2 , \ldots , x_n , \varepsilon) = C$$

(7) ne sont pas indépendantes, et l'on peut si $\frac{\partial F}{\partial x_n}$ n'est pas nulle pour $\varepsilon = 0$, $x_i = \varphi_i(0)$ considérer le système

$$F = C$$

$$f_i(T+\tau, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \varepsilon) - f_i(0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \varepsilon) = 0 \quad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

C étant une constante peu différente de $F[\varphi_1(0) , \varphi_2(0) , \ldots , \varphi_n(0) , 0]$ et dans $F = C$ on a remplacé x_i par $f_i(0 , \alpha_1 , \ldots , \alpha_n , \varepsilon)$.

Au lieu de remplacer le système (7) par le système précédent, on peut le remplacer par le suivant, en faisant toujours $\alpha_n = 0$ et de plus, $\tau = 0$.

$$f_i(T , \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \varepsilon) - f_i(0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \varepsilon) = 0 \quad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

qui déterminera $\alpha_1, \alpha_2 , \ldots , \alpha_{n-1}$ en fonction de ε . D'où la conséquence suivante : quand le système (6) admet une intégrale première, on pourra trouver généralement une solution périodique ayant la période T pour ε assez petit, ce qui n'a pas lieu habituellement quand les équations ne renferment pas le temps.

4. Solutions périodiques de la première sorte.

POINCARÉ a appliqué directement les considérations précédentes aux solutions de la première sorte du problème des trois corps. Dans ces solutions deux masses planétaires se meuvent autour du corps central dans un même plan (donc l'inclinaison mutuelle des orbites est constamment nulle) les excentricités restant très petites.

Plusieurs développements ont été donnés de ces solutions de première sorte, mais le dernier en date, à ma connaissance est celui de J. CHAZY [1] qui contient une bibliographie des travaux consacrés à ces solutions. L'existence de ces solutions s'établit par l'étude d'un système différentiel d'ordre 7 comportant deux intégrales premières, celle des forces vives et celle des aires.

L'étude du mouvement plan des trois corps conduit à un système différentiel canonique d'ordre 8 susceptible de réductions qui ramènent à l'intégration d'un système différentiel d'ordre 4, suivie de deux quadratures qui déterminent l'une le temps, l'autre un angle de rotation des trois corps autour de leur centre de gravité. Pour étudier les solutions de la première sorte, on applique la théorie esquissée dans les paragraphes précédents non au système canonique complet d'ordre 8, ni au système réduit d'ordre 4, mais comme nous l'avons dit à un système différentiel d'ordre 7

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial x_7} - x_4 \frac{\partial F}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial F}{\partial x_4}\\
\frac{dx_2}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial x_7} - x_6 \frac{\partial F}{\partial x_5} + x_5 \frac{\partial F}{\partial x_6}\\
\frac{dx_3}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial x_4} + x_4 \frac{\partial F}{\partial x_1}\\
\frac{dx_4}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial F}{\partial x_1}\\
\frac{dx_5}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial x_6} + x_6 \frac{\partial F}{\partial x_2}\\
\frac{dx_6}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x_5} - x_5 \frac{\partial F}{\partial x_2}\\
\frac{dx_7}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2}
\end{aligned}
$$

Les trois corps ont des masses m_1 , m_2 , m_3 . On suppose que la masse m_1 est finie, et que les masses m_2 et m_3 sont petites devant m_1 . Dans le système de coordonnées employées, on substitue aux masses m_2 et m_3 des masses fictives m et m' définies par

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad m' = \frac{(m_1 + m_2) m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

et pour étudier plus commodément les petites valeurs des masses m_2 et m_3, donc de m et m' on pose

$$m = \varepsilon M \qquad m' = \varepsilon M'$$

M et M' désignant des masses finies données comme m_1, et ε désignant une quantité numérique petite que nous considérons comme un paramètre variable tendant vers 0. Nous n'entrerons pas davantage dans le détail. La fonction F est holomorphe en ε si ε est assez petit, en x_1 x_2 variables positives quelconques sous cette condition que le rapport $\frac{x_2}{x_1}$ soit supérieur au rapport des masses fictives $\frac{M'}{M}$, en les variables x_3, x_4, x_5, x_6 si elles sont assez petites, et enfin en la variable x_7 pour une valeur quelconque de cette variable. La fonction F est d'ailleurs périodique et de période 2π en x_7. Par suite dans le même domaine, les seconds membres de (8) sont également holomorphes. F est une fonction uniforme des variables x_i dans le même domaine, et l'intégrale des aires est un polynôme en x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. Les deux intégrales premières de (8) sont donc des fonctions uniformes car ce sont l'intégrale des forces vives $F = Cte$, et l'intégrale des aires $\Phi = Cte$.

Dans le cas du problème des trois corps, il se trouve qu'on sait intégrer complètement le système (8) pour $\varepsilon = 0$. Si l'on suppose que pour $\varepsilon = 0$ les deux corps de masse nulle B et C décrivent autour du corps central A de masse m_1 des cercles concentriques, ces mouvements circulaires constituent une solution du système (8) pour laquelle $\varepsilon = 0$.

Dans cette solution on a, le paramètre variable ε étant nul,

$$x_1 = Cte \;;\quad x_2 = Cte \;;\quad x_3 = 0 \;;\quad x_4 = 0 \;;\quad x_5 = 0 \;;\quad x_6 = 0 \;;$$

$$x_7 = (n - n')t + x_7^0$$

Prenons pour origine du temps $t = 0$ l'instant d'une conjonction des trois corps, et pour origine des longitudes leurs valeurs à l'instant $t = 0$ de la conjonction. Alors $x_7^0 = 0$.

A l'instant $T = \frac{2\pi}{n-n'}$ les trois corps se retrouveront en conjonction, la figure qu'ils forment ayant tourné d'un certain angle. La solution obtenue est donc périodique d'après la dernière définition donnée au paragraphe 1. Nous avons ainsi une solution périodique pour $\varepsilon = 0$. On doit chercher ensuite lorsque ε différent de 0 est assez petit si le système (8) admet encore une solution périodique voisine de la solution précédente, et se réduisant à celle-ci quand $\varepsilon \to 0$. La solution périodique obtenue pour $\varepsilon = 0$ sera appelée solution de départ. La réponse est affirmative et le résultat bien connu est que pour chaque système de valeurs des vitesses angulaires (ou moyens mouvements) n et n' , différentes et dont le rapport n'est pas égal au rapport de deux nombres entiers consécutifs, et pour chaque valeur du paramètre ε assez petite, existe une solution périodique que Poincaré appelle solution de la première sorte. Pour plus de détails nous renvoyons soit aux "méthodes nouvelles", soit au mémoire cité de J. CHAZY.

5. Avant d'étudier les solutions des deuxième et troisième sorte, il convient d'étudier les solutions périodiques d'un système différentiel canonique tel qu'on en trouve dans la mise en équation d'un système dynamique à n degrés de liberté. Plus précisément nous considérons le système canonique

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i} \; ; \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

(9) est donc un système d'ordre $2n$. F est supposée développable suivant les puissances positives entières croissantes d'un paramètre arbitraire ε

$$F = F_o + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \ldots$$

F est une fonction périodique des y_i ; F_o est fonction des x_i seulement. Supposons pour fixer les idées $n = 3$. On peut facilement intégrer (9) quand $\varepsilon = 0$. F se réduit alors à F_o , et comme F_o ne dépend pas des y_i , (9) se réduit à

$$\frac{dx_i}{dt} = 0 \quad ; \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F_o}{\partial x_i} = n_i$$

Les x_i sont des constantes, et par suite les n_i aussi. (9) admet pour solution quand $\varepsilon = 0$

$$x_1 = a_1 \ ; \ x_2 = a_2 \ ; \ x_3 = a_3 \ ;$$

$$y_1 = n_1 t + \varpi_1 \ ; \ y_2 = n_2 t + \varpi_2 \ ; \ y_3 = n_3 t + \varpi_3 \ ;$$

La solution ci-dessus sera périodique si existe un nombre T tel que $n_1 T$, $n_2 T$, $n_3 T$ soient des multiples de $2\pi_1$, la période étant égale à T. Supposons que ε ne soit plus nul, tout en restant très petit, et imaginons qu'on ait pour $t = 0$

$$x_1 = a_1 + \beta_1 \ ; \ x_2 = a_2 + \beta_2 \ ; \ x_3 = a_3 + \beta_3 \ ;$$

$$y_1 = \varpi_1 + \gamma_1 \ ; \ y_2 = \varpi_2 + \gamma_2 \ ; \ y_3 = \varpi_3 + \gamma_3 \ ;$$

cherchons s'il existe des solutions périodiques de période T prenant pour $t = 0$ les valeurs précédentes. Comme les équations (9) ne dépendent pas du temps, il semble qu'il n'y ait pas de solution périodique de période T lorsque ε est différent de 0, mais grâce à la remarque faite à la fin du paragraphe 3, on sait qu'on pourra trouver en général une solution périodique de période T, parce que le système (9) admet l'intégrale des forces vives, $F = h$. Dans ces conditions on aura pour $t = T$

$$x_1 = a_1 + \beta_1 + \psi_1 \ ; \ x_2 = a_2 + \beta_2 + \psi_2 \ ; \ x_3 = a_3 + \beta_3 + \psi_3 \ ;$$

$$y_1 = n_1 T + \varpi_1 + \gamma_1 + \chi_1 \ ; \ y_2 = n_2 T + \varpi_2 + \gamma_2 + \chi_2 \ ; \ y_3 = n_3 T + \varpi_3 + \gamma_3 + \chi_3 ;$$

les conditions de périodicité s'écrivant

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0 \tag{10}$$

Les équations (10) ne sont pas indépendantes à cause de l'existence de l'intégrale des forces vives ; F d'autre part étant périodique par rapport aux y_i on a

$$F(a_i + \beta_i, \varpi_i + \gamma_i) = F(a_i + \beta_i + \psi_i, n_i T + \varpi_i + \gamma_i + \chi_i) = F(a_i + \beta_i + \psi_i, \varpi_i + \gamma_i + \chi_i) .$$

En rapprochant le premier et le troisième terme de cette double égalité, on voit qu'elle établit une relation entre les ψ_i et les χ_i, et si l'on suppose par exemple $\frac{\partial F}{\partial x_1} \neq 0$ pour $\varepsilon = 0$, $\psi_1 = 0$ est une conséquence des cinq autres équations qui se réduisent à

$$\psi_2 = \psi_3 = \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0 .$$

Ces cinq équations contiennent outre le paramètre ε les 6 inconnues $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$; on peut donc choisir arbitrairement une inconnue, et on en disposera de manière que pour $t = 0$, la variable y_1 par exemple, soit nulle aussi bien dans la solution qui correspond à $\varepsilon = 0$ que dans celle pour laquelle $\varepsilon \neq 0$. On prendra donc

$$\varpi_1 = \gamma_1 = 0$$

Les 5 équations ci-dessus auront une solution d'ordre de multiplicité 1 si le jacobien

$$\frac{D(\psi_2, \psi_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3)}{D(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2, \gamma_3)} \neq 0 \quad \text{pour les valeurs nulles des } \beta, \gamma, \varepsilon ;$$

sans entrer dans le détail des calculs, on trouve que ψ_2 et ψ_3 contiennent ε en facteur, de sorte qu'on remplacera $\psi_2 = 0$, $\psi_3 = 0$ par les équations plus simples

$$\bar{\psi}_2 = 0 , \quad \bar{\psi}_3 = 0 \quad ; \quad \text{avec} \quad \bar{\psi}_2 = \frac{\psi_2}{\varepsilon} \quad ; \quad \bar{\psi}_3 = \frac{\psi_3}{\varepsilon} \quad ;$$

on trouve le résultat suivant

$$\frac{D(\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3)}{D(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2, \gamma_3)} = - T^5 H_x(F_o).H_y([F_1])$$

$H_x(F_o)$ désignant le hessien de F_o par rapport aux x, $H_y([F_1])$ désignant le hessien de $[F_1]$ par rapport aux y. $[F_1]$ désigne la valeur moyenne de F_1 dans l'intervalle $0, T$; on a

$$F_1 = \sum A \sin(m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + h)$$

m_1 m_2, m_3 étant des entiers positifs, pendant que A et h dépendent des x_i et pas des y_i en substituant dans F_1 les a_i aux x_i et les $n_i t + \varpi_i + \gamma_i$ aux y_i on a

$$F_1 = \sum A \sin \omega \qquad \omega = (m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3)t + h + m_2(\varpi_2 + \gamma_2) + m_3(\varpi_3 + \gamma_3)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1} = \sum A\, m_1 \cos \omega = \frac{\partial F_1}{\partial \varpi_1}$$

F_1 est périodique en t avec la période T, d'autre part périodique en $\varpi_2 + \gamma_2$ et en $\varpi_3 + \gamma_3$ avec la période 2π. La valeur moyenne de F_1 dans l'intervalle $0, T$ est alors

$$[F_1] = \frac{1}{T}\int_0^T F_1\, dt = S\ A \sin \omega$$

S signifiant que la sommation doit être étendue à tous les termes tels que

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0 \ ;$$

sans entrer dans le détail des calculs, on montre que les deux équations $\bar{\psi}_2 = 0$, $\bar{\psi}_3 = 0$ conduisent, quand $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, aux deux équations suivantes

(11) $$\frac{\partial}{\partial \varpi_2}[F_1] = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial \varpi_3}[F_1] = 0 \quad ;$$

on peut toujours choisir ϖ_2 et ϖ_3 de façon à satisfaire aux équations (11) car la fonction $[F_2]$ qui est finie, est périodique en ϖ_2 et ϖ_3 et admet donc sur le segment $(0, 2\pi)$ un maximum et un minimum pour lesquels les équations (11) sont vérifiées. Donc si aucun des deux hessiens $H_x(F_0)$ et $H_y([F_1])$ n'est nul le système (9) admet pour les petites valeurs de ε une solution périodique se réduisant pour $\varepsilon = 0$ à la solution de départ.

D'après la nature de $[F_1]$, on voit qu'on peut toujours choisir ϖ_2 et ϖ_3 pour satisfaire aux conditions (11). Mais il peut y avoir des difficultés si le hessien de F_0 par rapport aux x est nul. On pourra dans certains cas surmonter cette difficulté en remplaçant F_0 par une fonction $\varphi(F_0)$ dont le hessien n'est pas nul.

Un autre cas plus compliqué et très important puisqu'on le trouve en étudiant le problème des trois corps est celui où $H(F_0)$ est nul, parce que F_0 est indépendant de quelques unes des variables x. Soit, par exemple, un système à quatre degrés de liberté

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F_i}{\partial y_i} \quad , \quad \frac{dy_i}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i = 1 , 2 , 3 , 4)$$

$$F = F_o(x_1 , x_2) + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \dots$$

F_1 , F_2 , ... sont supposées périodiques de période 2π par rapport aux y . Pour $\varepsilon = 0$ on a la solution générale

$$(12) \quad \begin{cases} x_1 = a_1 \ , \ x_2 = a_2 \ , & x_3 = a_3 \ , \ x_4 = a_4 \\ y_1 = n_1 t + \varpi_1 \ , \ y_2 = n_2 t + \varpi_2 \ , & y_3 = \varpi_3 \ , \ y_4 = \varpi_4 \\ n_1 = - \dfrac{\partial F_o}{\partial a_1} \ , \ n_2 = - \dfrac{\partial F_o}{\partial a_2} \ , \ n_3 = n_4 = 0 & \end{cases}$$

les a_i , les ϖ_i , les n_i étant des constantes. Si a_1 et a_2 ont été choisis de telle sorte que pour une valeur T de t , $n_1 T$ et $n_2 T$ soient multiples de 2π , (12) sera une solution périodique quelles que soient les constantes a_3 , a_4 , ϖ_1 , ϖ_2 , ϖ_3 , ϖ_4 . Si maintenant ε est petit mais non nul, on aura pour $t = 0$

$$(13) \qquad x_i = a_i + \beta_i \quad , \quad y_i = \varpi_i + \gamma_i$$

et pour $t = T$

$$x_i = a_i + \beta_i + \psi_i \quad , \quad y_i = n_i T + \varpi_i + \gamma_i + \chi_i$$

pour que la solution admettant les valeurs initiales (13) soit périodique il faut et il suffit que soient vérifiées les équations

$$(14) \qquad \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = \chi_4 = 0 \ .$$

Pour la même raison que précédemment on peut prendre $\varpi_1 = \gamma_1 = 0$, et d'autre part $F = C$ étant une intégrale première et $\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial a_1} = - n_1$ n'étant pas nul pour $\varepsilon = 0$, les équations (14) ne sont pas indépendantes et $\psi_1 = 0$ est une conséquence des sept autres. On montre que les conditions (14) prennent la forme

$$(15) \qquad \bar{\psi}_2 = \bar{\psi}_3 = \bar{\psi}_4 = \chi_1 = \chi_2 = \bar{\chi}_3 = \bar{\chi}_4 = 0$$

avec

$$\bar{\psi}_2 = \frac{\psi_2}{\varepsilon}, \quad \bar{\psi}_3 = \frac{\psi_3}{\varepsilon}, \quad \bar{\psi}_4 = \frac{\psi_4}{\varepsilon}, \quad \bar{\chi}_3 = \frac{\chi_3}{\varepsilon}, \quad \bar{\chi}_4 = \frac{\chi_4}{\varepsilon}$$

Les équations (15) contiennent les inconnues β_1 , β_2 , β_3 , β_4 , γ_2 , γ_3 , γ_4 en plus de ε . On peut dire qu'elles déterminent ces inconnues en fonctions implicites de ε , s'annulant avec ε . La solution ainsi obtenue sera d'ordre de multiplicité 1 si la jacobien

$$\frac{D(\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_3, \bar{\psi}_4, \chi_1, \chi_2, \bar{\chi}_3, \bar{\chi}_4)}{D(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)}$$

n'est pas nul pour $\beta_i = \gamma_i = 0 = \varepsilon$. Le résultat de Poincaré peut s'énoncer ainsi. Les équations (15) sont satisfaites pour $\varepsilon = 0$, $\beta_i = \gamma_i = 0$ pourvu que a_3 , a_4 , ϖ_2 , ϖ_3 , ϖ_4 , satisfassent au système

$$\frac{\partial R}{\partial a_3} = \frac{\partial R}{\partial a_4} = \frac{\partial R}{\partial \varpi_2} = \frac{\partial R}{\partial \varpi_3} = \frac{\partial R}{\partial \varpi_4} = 0 \quad , \tag{16}$$

la fonction R étant la valeur moyenne de F_1 pendant une période. On suppose qu'on a remplacé dans F_1 , x_1 , x_2 , x_3 , x_4 par a_1 , a_2 , a_3 , a_4 et y_1 y_2 y_3 y_4 par $n_1 t$, $n_2 t + \varpi_2$, ϖ_3 , ϖ_4 . Ces valeurs de a_3 , a_4 , ϖ_2 , ϖ_3 , ϖ_4 sont celles qui rendent R maximum ou minimum.

Le Jacobien ci-dessus est le produit de deux autres : celui du hessien de F_0 par rapport à a_1 et a_2 que nous supposons non nul, par le hessien de R par rapport à a_3 , a_4 , ϖ_2 , ϖ_3 , ϖ_4 . Si ce dernier hessien n'est pas nul les équations canoniques étudiées admettront encore des solutions périodiques pour les petites valeurs de ε qui se ramèneront pour $\varepsilon = 0$ à la solution de départ. On peut dire aussi que de telles solutions périodiques existeront pour les petites valeurs de ε si la fonction R considérée comme fonction de a_3 , a_4 , ϖ_2 , ϖ_3 , ϖ_4 admet un maximum ou un minimum. Nous pouvons résumer ce qui précède de la façon suivante :

Soit le système canonique

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i} \quad , \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i = 1 , 2 , 3 , 4 \text{ dans l'exemple précédent})$$

où la fonction génératrice F peut se développer suivant les puissances positives entières successives d'un paramètre très petit ε

$$F = F_o + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \dots \quad ,$$

F_o est fonction de x_1 et x_2 seulement ; F_1 , F_2 , ... sont des fonctions des x_i et des y_i périodiques de période 2π par rapport aux y_i . Pour $\varepsilon = 0$ on sait intégrer complètement le système canonique dont la solution générale est alors

$$x_i = a_i \quad ; \quad y_i = n_i t + \varpi_i \quad ;$$

$$n_i = - \frac{\partial F_o}{\partial a_i} \text{ pour } i = 1 , 2 \quad ; \qquad n_i = 0 \text{ pour } i = 3 , 4 \quad .$$

Pour qu'une telle solution soit périodique, il faut choisir les constantes a_1 et a_2 de telle sorte que les deux quantités n_1 et n_2 soient commensurables entre elles. La solution périodique ainsi obtenue dépend de cinq constantes arbitraires ϖ_2 , ϖ_3 , ϖ_4 , a_3 , a_4 , car on peut choisir l'époque origine pour que $\varpi_1 = 0$. Pour $\varepsilon \neq 0$, le système canonique étudié admet encore une solution périodique qui pour $\varepsilon = 0$ se confond avec l'une des solutions précédentes, celle pour laquelle les cinq constantes a_3 , a_4 , ϖ_2 , ϖ_3 , ϖ_4 , ne sont plus arbitraires mais vérifient le système

$$\frac{\partial R}{\partial a_3} = \frac{\partial R}{\partial a_4} = \frac{\partial R}{\partial \varpi_2} = \frac{\partial R}{\partial \varpi_3} = \frac{\partial R}{\partial \varpi_4} = 0$$

à condition que le hessien de R par rapport à a_3 , a_4 , ϖ_2 , ϖ_3 , ϖ_4 , ne soit pas nul. Ce résultat subsiste si les valeurs de a_3 , a_4 , ϖ_2 , ϖ_3 , ϖ_4 solutions du système précédent sont d'ordre de multiplicité impair.

6. La recherche des solutions périodiques de la deuxième sorte, comme d'ailleurs de la troisième sorte constitue une application immédiate des considérations développées dans le paragraphe précédent. Nous traiterons seulement le cas des solutions de la troisième sorte, dont les solutions de deuxième sorte sont un cas particulier. Si l'on rapporte le corps B au corps A et le corps C au centre de gravité D des corps A et B , l'intégration des équations du mouvement est celle d'un système canonique d'ordre 8, toutes réductions faites

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \ell} \; ; \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial F}{\partial g} \; ; \quad \frac{d\Lambda'}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \ell'} \; ; \quad \frac{dH'}{dt} = \frac{\partial F}{\partial g'} \quad ; \\ &\frac{d\ell}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial \Lambda} \; ; \quad \frac{dg}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial H} \; ; \quad \frac{d\ell'}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial \Lambda'} \; ; \quad \frac{dg'}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial H'} \quad ; \end{aligned} \right.$$

La fonction génératrice F est développable suivant les puissances du petit paramètre ε, de la façon suivante

$$F = F_0 + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \dots$$

F_0 ne dépendant que de Λ et Λ'. F_1 est, à une fonction de Λ et Λ' additive près, la fonction perturbatrice. F_1 est périodique en ℓ, ℓ', g, g' avec la période 2π, et c'est également une fonction de Λ, Λ', H, H'. Nous devons définir nos variables. Soient m_1, m_2, m_3 les masses des trois corps, f la constante de l'attraction. Posons

$$(18) \quad \begin{cases} \mu = f(m_1 + m_2) & \mu' = f(m_1 + m_2 + m_3) \\ m = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \varepsilon M & m' = \dfrac{(m_1 + m_2) m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \varepsilon M' \\ \Lambda = M\sqrt{\mu a} & \Lambda' = M'\sqrt{\mu' a'} \\ H = M\sqrt{\mu a (1-e^2)} & H' = M'\sqrt{\mu' a' (1-e'^2)} \end{cases}$$

a, e, ℓ, g sont respectivement le demi grand-axe, l'excentricité, l'anomalie moyenne, et, la longitude du périhélie comptée à partir du noeud ascendant commun des orbites, de la trajectoire du corps B.

a', e', ℓ', g' sont les mêmes éléments relatifs au corps C.

Supposons qu'à la limite, ε s'annule. Le corps A de masse m_1 se trouve en présence des deux corps B et C de masses nulles. A coïncide avec le centre de gravité des trois corps et, par suite, est fixe à l'origine des coordonnées cartésiennes. Les mouvements de B et C par rapport à A sont des mouvements elliptiques. (17) se réduit au cas où la fonction génératrice est égale à F_0. On a tous calculs et intégrations effectués

$$\Lambda = \Lambda_0 \ ; \ \Lambda' = \Lambda'_0 \ ; \ H = H_0 \ ; \ H' = H'_0 \ ;$$

$$\ell = -\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda_0} t + \ell_0 \ ; \ \ell' = -\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda'_0} t + \ell'_0 \ ; \ g = g_0 \ ; \ g' = g'_0 \ ;$$

nous poserons

$$n = -\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda_0} = f^2 m_1^2 \frac{M^3}{\Lambda_0^3} \ ; \quad n' = -\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda'_0} = f^2 m_1^2 \frac{M'^3}{\Lambda'^3_0} \ ;$$

a et a' sont liés aux vitesses angulaires n et n' par les relations bien connues

$$n^2 a^3 = n'^2 a'^3 = fm_1 \quad .$$

Pour que la solution du système réduit définie par les formules ci-dessus soit périodique, il faut selon la théorie exposée au paragraphe 5 que les moyens mouvements n et n' soient commensurables entre eux, c'est-à-dire que l'on ait

$$(19) \qquad \frac{n}{n'} = \frac{M^3}{M'^3} \cdot \frac{\Lambda_1'^3}{\Lambda_c^3} = \frac{p}{q}$$

p et q étant deux entiers premiers entre eux, positifs si les deux trajectoires sont décrites dans le sens direct, ce que nous supposerons ; d étant le p.g.c.d. de n et n' , nous aurons $n = pd$, $n' = qd$ et la période du mouvement sera égale à $T = \frac{2\pi}{d}$.

Donc sous l'unique condition de la commensurabilité des moyens mouvements, le système réduit admet des solutions périodiques dépendant des six constantes arbitraires H_o , H'_o , ℓ_o , ℓ'_o , g_o , g'_o .

Autrement dit, si les corps B et C ont des masses nulles, le problème des trois corps admet des solutions périodiques de la troisième sorte.

(19) peut s'écrire sous la forme équivalente

$$(19') \qquad \frac{a}{a'} = \alpha = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{2}{3}}$$

si $\alpha < 1$ (la planète de demi-grand-axe a est constamment intérieure à la planète de demi-grand-axe a'). On a $p > q$, ce que nous supposerons constamment par la suite.

Donc si n et n' vérifient (19), le système (17) admet une solution périodique dont la période est $T = \frac{2\pi}{d}$, et qui dépend des six constantes arbitraires H_o , H'_o , ℓ_o , ℓ'_o , g_o , g'_o . Nous allons supposer maintenant que le paramètre ε quoi que très petit n'est pas nul, et rechercher si le système (17) admet des solutions périodiques se réduisant pour $\varepsilon = 0$ à la solution que nous venons de déterminer. Nous devons chercher s'il est possible de choisir les constantes H_o , H'_o , ℓ_o , ℓ'_o , g_o , g'_o de telle sorte que pour les petites valeurs de ε les équations du mouvement admettent une solution périodique où les valeurs initiales des huit variables seraient respectivement

$$\Lambda_0 + \beta_1 , \quad \Lambda'_0 + \beta_2 , \quad H_0 + \beta_3 , \quad H'_0 + \beta_4$$

$$\ell_0 + \gamma_1 , \quad \ell'_0 + \gamma_2 , \quad g_0 + \gamma_3 , \quad g'_0 + \gamma_4$$

les β et les γ étant holomorphes en ε et s'annulant avec ε. A cause de l'intégrale des forces vives, on pourra chercher une solution périodique de période T, et choisir l'origine des temps de manière à avoir $\ell_0 = \gamma_1 = 0$.

Λ_0 et Λ'_0 sont déterminées par l'intégration du système réduit. Il reste à déterminer les cinq constantes H_0, H'_0, ℓ'_0, g_0, g'_0. Pour cela il faut former la valeur moyenne R de la fonction perturbatrice F_1 pendant une période T du mouvement. Les cinq constantes à déterminer sont solutions d'ordre de multiplicité impair du système

$$\frac{\partial R}{\partial H_0} = \frac{\partial R}{\partial H'_0} = \frac{\partial R}{\partial \ell'_0} = \frac{\partial R}{\partial g_0} = \frac{\partial R}{\partial g'_0} = \frac{\partial R}{\partial \ell_0} = 0 \quad . \tag{20}$$

Les 6 équations (20) se réduisent à 5 parce qu'on peut se donner $\ell_0 = 0$. On peut d'ailleurs montrer facilement que

$$n \times \frac{\partial R_0}{\partial \ell_0} + n' \frac{\partial R}{\partial \ell'_0} = 0 \quad .$$

Donc si un couple de valeurs ℓ_0, ℓ'_0 vérifie $\frac{\partial R}{\partial \ell_0} = 0$ l'équation $\frac{\partial R}{\partial \ell'_0} = 0$ sera automatiquement vérifiée. Ces deux équations ne sont donc pas indépendantes, et on pourra prendre arbitrairement $\ell_0 = 0$. Quand on substitue dans F_1 les solutions du système réduit, F_1 devient fonction périodique de t, avec la période T. On a

$$F_1 = \sum A \cos \left[(m_1 n + m_2 n')t + m_1 \ell_0 + m_2 \ell'_0 + m_3 g_0 + m_4 g'_0 \right] \quad .$$

$A = A(\Lambda_0 , \Lambda'_0 , H_0 , H'_0 , C)$ C étant la constante des aires. On obtient R en prenant dans F_1 les termes pour lesquels on a

$$m_1 n + m_2 n' = 0 \quad . \tag{21}$$

Or si d est le p.g.c.d. de n et n', on a $n = pd$, $n' = qd$, et remplaçant dans (21) n et n' par ces valeurs, on a, comme d est non nul,

$m_1 p + m_2 q = 0$ les solutions en nombres entiers de cette relation sont

$$m_1 = Sq \quad , \quad m_2 = sp \quad (s = 0 \,,\, \pm 1 \,,\, \pm 2 \,,\, \pm 3 \,,\, \ldots) .$$

Les équations $\frac{\partial R}{\partial \ell'_o} = \frac{\partial R}{\partial g_o} = \frac{\partial R}{\partial g'_o} = 0$ peuvent être satisfaites, si on a choisi $\ell_o = 0$, par les valeurs

$$g_o = 0 \text{ ou } \pi \;;\quad g'_o = 0 \text{ ou } \pi \;;\quad p\ell'_o = r\pi ,\ r = 0,1,2,\ldots,2p-1$$

il reste alors à satisfaire aux deux équations

$$\frac{\partial F}{\partial H_o} = 0 \;;\quad \frac{\partial R}{\partial H'_o} = 0 \quad .$$

Pour des raisons de commodité de calcul on substitue à H_o et H'_o les excentricités e et e' ainsi que les inclinaisons i et i'. Au lieu des deux équations ci-dessus entre les variables indépendantes H_o et H'_o, on considérera la fonction R des quatres variables $e\ e'\ i\ i'$ en remarquant qu'elles sont liées par les intégrales des aires

$$\Lambda_o\sqrt{1-e^2}\cos i + \Lambda'_o\sqrt{1-e'^2}\cos i' = C \;;\quad \Lambda_o\sqrt{1-e^2}\sin i - \Lambda'\sqrt{1-e'^2}\sin i' = 0$$

On se ramène donc à un problème d'extremum lié, qu'on traite par la méthode classique des multiplicateurs de Lagrange, et nous avons montré que sur les deux multiplicateurs qui devraient s'introduire, l'un est nul. Au total ℓ_o, ℓ'_o, g_o, g'_o ayant les valeurs précédemment écrites, on détermine les excentricités e et e', les inclinaisons i et i' par le système

$$(22)\qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{\partial R}{\partial e} + k\dfrac{\partial f_1}{\partial e} = 0 & ; & \dfrac{\partial R}{\partial e'} + k\dfrac{\partial f_1}{\partial e'} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial R}{\partial i} + k\dfrac{\partial f_1}{\partial i} = 0 & ; & \dfrac{\partial R}{\partial i'} + k\dfrac{\partial f_1}{\partial i'} = 0 \\[2ex] \qquad f_1 = 0 & & \end{array} \right.$$

où $f_1 \equiv \Lambda_o\sqrt{1-e^2}\cos i - \Lambda'_o\sqrt{1-e'^2}\cos i' - C = 0$

$$f_2 \equiv \Lambda_o\sqrt{1-e^2}\sin i - \Lambda'_o\sqrt{1-e'^2}\sin i' = 0$$

R dépendant seulement de i par l'intermédiaire de $i + i'$, nous avons montré qu'on peut remplacer par exemple l'équation en $\frac{\partial R}{\partial i'}$, par l'équation plus simple $f_2 = 0$.

En définitive on a le système suivant

$$
(23)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{\partial R}{\partial e} - k\,\Lambda_0 \dfrac{e \cos i}{\sqrt{1-e^2}} = 0 \quad ; \quad \dfrac{\partial R}{\partial e'} - k\,\Lambda'_0 \dfrac{e' \cos i'}{\sqrt{1-e'^2}} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial R}{\partial i} - k\,\Lambda_0 \sqrt{1-e^2}\,\sin i = 0 \quad ; \quad \Lambda_0 \sqrt{1-e^2}\,\sin i - \Lambda'_0 \sqrt{1-e'^2}\,\sin i' = 0 \\[2ex]
\qquad\qquad \Lambda_0 \sqrt{1-e^2}\,\cos i + \Lambda'_0 \sqrt{1-e'^2}\,\cos i' = 0
\end{array}
\right.
$$

Ces cinq équations contiennent les quatre variables e , e' , i , i' et la variable auxiliaire k . Il y a donc autant d'équations que d'inconnues et en général on peut considérer (23) comme déterminant les cinq variables e , e' , i , i' et k .

En s'appuyant sur les propriétés classiques de la fonction perturbatrice, notamment sur le théorème qui donne l'ordre d'un terme quelconque, et en utilisant le développement classique qui suppose explicitement que les inclinaisons restent faibles, on est amené à distinguer deux cas

1° $p - q$ et un nombre pair

2° $p - q$ est un nombre impair .

La différence $p - q$ joue donc un rôle capital dans la recherche des solutions périodiques de troisième sorte.

7. Supposons $p - q$ pair; plus précisément supposons $p - q \geqslant 4$. On a alors
$R = R_1 + R_2$

R_1 étant l'ensemble des termes séculaires purs $(m_1 = m_2 = 0)$

R_2 étant l'ensemble des termes séculaires à cause de la commensurabilité des moyens mouvements.

On arrive au système suivant

$$(24)\quad\begin{cases} X_1 \equiv \dfrac{B^{(1)}}{4}\,\epsilon - \dfrac{B^{(2)}}{4}\,\epsilon' - k\Lambda_o\,\epsilon + D_1 = 0 \\ X_2 \equiv -\dfrac{B^{(2)}}{4}\,\epsilon + \dfrac{B^{(1)}}{4}\,\epsilon' - k\,\Lambda'_o\,\epsilon' + D_2 = 0 \\ X_3 \equiv -\dfrac{B^{(1)}}{4}\,(i + i') - k\,\Lambda_o\, i + D_3 = 0 \\ X_4 \equiv \Lambda_o\, i - \Lambda'_o\, i' + D_4 = 0 \\ X_5 \equiv \Lambda_o(\epsilon^2 + i^2) + \Lambda'_o(\epsilon'^2 + i'^2) + D_5 - \rho^2 = 0 \end{cases}$$

On a posé $\rho^2 = 2\Lambda_o + 2\Lambda'_o - 2C$.

Nous avons montré comment on pouvait résoudre ce système par la théorie élémentaire des fonctions implicites;(24) par exemple est vérifié pour les valeurs nulles des 5 variables ϵ , ϵ' , i , i' , et ρ quel que soit k . Isolons une des équations qui contient k , la troisième par exemple. Il reste

$$X_1 = 0 \quad X_2 = 0 \quad X_4 = 0 \quad X_5 = 0$$

qui déterminent ϵ ϵ' i i' en fonction de ρ mais $\dfrac{D(X_1,X_2,X_4,X_5)}{D(\epsilon,\epsilon',i,i')} = 0$ pour $\epsilon = \epsilon' = i = i' = \rho = 0$ et d'autre part ce jacobien est de rang 3, car

$$\frac{D(X_1\ X_2\ X_4)}{D(\epsilon,\epsilon',i)} = \Lambda_o\left[\left(\frac{B^{(1)}}{4} - k\,\Lambda_o\right)\left(\frac{B^{(1)}}{4} - k\,\Lambda'_o\right) - \left(\frac{B^{(2)}}{4}\right)^2\right]$$

n'est pas nul, sauf pour les valeurs de k annulant le crochet ci-dessus.

Donc $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_4 = 0$ déterminent ϵ , ϵ' , i comme fonctions implicites de i' . On a d'ailleurs $\epsilon = \epsilon' \equiv 0$ car $X_1 = 0, X_2 = 0$ sont des fonctions impaires de ϵ et ϵ' à cause de l'hypothèse faite sur la parité de $p - q$, donc s'annulent identiquement quand on y fait $\epsilon = \epsilon' = 0$, quels que soient i et i' pour $\epsilon = \epsilon' = 0$. Comme avec l'hypothèse faite sur k la solution prenant la valeur 0 pour $i' = 0$ est unique, on en conclut que $\epsilon = \epsilon' = 0$ est solution d'ordre de multiplicité 1 du système

$$X_1 = 0 \qquad X_2 = 0 \qquad X_4 = 0$$

on tirera i en fonction de i' de $X_4 = 0$ après y avoir remplacé e et e' par 0 en utilisant cette fois l'équation $X_5 = 0$ on trouvera d'abord i en fonction de ρ , puis i . Par $X_3 = 0$ on obtiendra la valeur de k dont on vérifie qu'elle n'annule pas le crochet ci-dessus. Nous avons montré qu'il existe dessolutions périodiques de la troisième sorte à inclinaisons non nulles quoique petites. Les développements trouvés en fonctions de ρ sont seulement valables tant que ρ reste assez petit. Et dans le cas présent où $p - q$ est pair les orbites limites qui correspondent aux valeurs trouvées pour e , e' , i , i' sont circulaires.

On a les formules suivantes

$$\boxed{\begin{array}{c} i = \rho \dfrac{\Lambda_o}{h} + \dots \; ; \quad i' = \rho \dfrac{\Lambda_o}{h} + \dots \; ; \quad e = e' = 0 \quad ; \quad k = - \dfrac{B^{(1)}}{4} \dfrac{\Lambda_o + \Lambda'_o}{\Lambda_o \Lambda'_o} \\[2ex] i = - \rho \dfrac{\Lambda'_o}{h} - \dots \; ; \; i' = - \rho \dfrac{\Lambda_o}{h} - \dots ; \quad e = e' = 0 \; ; \quad k = - \dfrac{B^{(1)}}{4} \dfrac{\Lambda_o + \Lambda'_o}{\Lambda_o \Lambda'_o} \\[2ex] h = + \sqrt{\Lambda_o \Lambda'_o (\Lambda_o + \Lambda'_o)} \end{array}}$$

si on avait employé pour déterminer k soit $X_1 = 0$, soit $X_2 = 0$, on aurait trouvé des solutions périodiques de la deuxième sorte.

8. Dans le cas où $p - q$ est impair, la fonction R n'est plus une fonction paire par rapport à e et e' , et introduit des termes linéaires en e et e' qui donnent par dérivation des termes indépendants des excentricités. Pour pouvoir considérer la solution qui pour $\rho = 0$ est nulle en e , e' , i , i' nous devons faire l'hypothèse que $p - q > 1$, donc $p - q \geqslant 3$. Nous avons le système suivant

$$
(25)\quad \begin{cases}
X_1 \equiv \dfrac{B^{(1)}}{4}\, e - \dfrac{B^{(2)}}{4}\, e' - k\, \Lambda_o e + B(i + i')^{2n} + \dots & = 0 \\[2ex]
X_2 \equiv - \dfrac{B^{(2)}}{4}\, e + \dfrac{B^{(1)}}{4}\, e' - k\, \Lambda'_o\, e' + B'(i + i')^{2n} + \dots & = 0 \\[2ex]
X_3 \equiv - \dfrac{B^{(1)}}{4}\,(i + i') - k\, \Lambda_o\, i + \dots & = 0 \\[2ex]
X_4 \equiv \Lambda_o\, i - \Lambda'_o\, i' + \dots & = 0 \\[2ex]
X_5 \equiv \Lambda_o(e^2 + i^2) + \Lambda'_o(e'^2 + i'^2) - \rho^2 + \dots & = 0
\end{cases}
$$

on a posé $p - q = 2n + 1 \quad n = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \dots$

(25) s'annulant pour $e = e' = i = i' = \rho = 0$, on peut poser

$$e = \varepsilon \rho^{\lambda} \qquad e' = \varepsilon' \rho^{\lambda} \qquad i = \iota \rho \qquad i' = \iota' \rho$$

λ étant un entier positif. Substituons ces valeurs dans (25), on arrive au système suivant

$$
(26)\quad \begin{cases}
\rho^{\lambda}\left[\left(\dfrac{B^{(1)}}{4} - k\, \Lambda_o\right)\varepsilon - \dfrac{B^{(2)}}{4}\, \varepsilon'\right] + \rho^{2n}\, B(\iota + \iota')^{2n} + \dots & = 0 \\[2ex]
\rho^{\lambda}\left[- \dfrac{B^{(2)}}{4}\, \varepsilon + \left(\dfrac{B^{(1)}}{4} - k\, \Lambda'_o\right)\varepsilon\right] + \rho^{2n}\, B'(\iota + \iota')^{2n} + \dots & = 0 \\[2ex]
\left(- \dfrac{B^{(1)}}{4}\,(\iota + \iota') - k\, \Lambda_o\, \iota\right)\rho + \dots & = 0 \\[2ex]
\rho(\Lambda_o \iota - \Lambda'_o \iota') + \dots & = 0 \\[2ex]
(\Lambda_o \iota^2 + \Lambda'_o \iota'^2 - 1)\,\rho^2 + \rho^{2\lambda}\,(\Lambda_o\, \varepsilon^2 + \Lambda'_o\, \varepsilon'^2) & = 0
\end{cases}
$$

cherchons pour $\rho = 0$ les valeurs de ε, ε', ι , ι' . Deux cas sont à considérer

$$\lambda < 2n = p - q - 1$$

$$\lambda = 2n = p - q - 1$$

si $\lambda < 2n$, le système (26) donne

$$\varepsilon_o = \varepsilon'_o = 0 \qquad\qquad k = -\frac{B^{(1)}}{4}\left(\frac{1}{\Lambda_o} + \frac{1}{\Lambda'_o}\right)$$

$$\iota_o = \pm\frac{\Lambda'_o}{h} \quad \iota'_o = \pm\frac{\Lambda_o}{h} \qquad h = \sqrt{\Lambda_o \Lambda'_o(\Lambda_o + \Lambda'_o)}$$

si $\lambda = 2n$, on a pour $\rho = 0$ le système

$$(27)\quad \begin{cases} \left(\frac{B^{(1)}}{4} - k\ \Lambda_o\right)\varepsilon_o - \frac{B^{(2)}}{4}\ \varepsilon' + B(\iota_o + \iota'_o)^{2n} & = 0 \\ -\frac{B^{(2)}}{4}\ \varepsilon_o + \left(\frac{B^{(1)}}{4} - k\ \Lambda'_o\right)\varepsilon'_o + B'(\iota_o + \iota'_o)^{2n} & = 0 \\ -\frac{B^{(1)}}{4}(\iota_o + \iota'_o) - k\ \Lambda_o\ \iota_o & = 0 \\ \Lambda_o\ \iota_o - \Lambda'_o\ \iota'_o & = 0 \\ \Lambda_o\ \iota_o^2 + \Lambda'_o\ \iota'^2_o - 1 & = 0 \end{cases}$$

les trois dernières équations ne contiennent que ι_o et ι'_o . Pour qu'elles soient compatibles le système linéaire et homogène formé par la troisième et la quatrième équations de (27) doit admettre des solutions non nulles. On doit donc avoir

$$k = -\frac{B^{(1)}}{4}\left(\frac{1}{\Lambda_o} + \frac{1}{\Lambda'_o}\right)$$

D'où bien entendu

$$\iota_o = \pm\frac{\Lambda'_o}{h} \qquad\qquad \iota'_o = \pm\frac{\Lambda_o}{h}$$

en portant dans les deux premières équations (27), on obtient ε_o et ε'_o par la résolution d'un système de Cramer à déterminant non nul. On peut donc écrire

$$e = \varepsilon'_o\ \rho^{2n} + \dots = \varepsilon_o\ \rho^{p-q-1} + \dots$$

$$e' = \varepsilon'_o\ \rho^{2n} + \dots = \varepsilon'_o\ \rho^{p-q-1} + \dots$$

Dans le cas où $p - q$ est un nombre impair supérieur à 1, il existe des solutions périodiques de la troisième sorte où dans la solution de départ les excentricités initiales ne sont pas nulles et où les inclinaisons sont petites. Par rapport à la variable auxiliaire ρ, qui reste petite, les inclinaisons sont du premier ordre, et les excentricités d'ordre $p - q - 1$.

Il est intéressant de voir ce que deviennent les équations (24) ou (25) lorsqu'on suppose $\rho = 0$. Nous avons montré que ce cas limite correspond aux solutions périodiques de première sorte et que l'on retrouve d'une manière extrêmement simple la condition d'existence de ces solutions, à savoir que le rapport des moyens mouvements n et n' est différent du rapport de deux nombres entiers consécutifs.

9. Les résultats des paragraphes 7 et 8 supposent que l'inclinaison mutuelle des orbites reste faible, c'est-à-dire que l'inclinaison de chaque orbite sur le plan fondamental de référence reste petite. Cette hypothèse s'est introduite quand nous avons adopté pour la fonction perturbatrice donc pour R le développement classique de Leverrier, développement effectué à partir de l'hypothèse de la petitesse de l'inclinaison mutuelle. Si l'on suppose que l'inclinaison mutuelle des orbites a une valeur quelconque comprise entre 0 et $180°$, le développement de Leverrier n'est plus valable, et il faut lui substituer le développement de Tisserand. Comme variable indépendante en fonction de laquelle on exprime les éléments elliptiques e, e', i, i', on abandonne ρ. On est amené à étudier un système de cinq équations simultanées, en plus de la condition $\frac{n}{n'} = \frac{p}{q}$. Ces équations sont

$$\frac{\partial R}{\partial \bar{\lambda}} = 0 , \quad \frac{\partial R}{\partial x_1} = 0 , \quad \frac{\partial R}{\partial x_2} = 0 , \quad \frac{\partial R}{\partial x_3} = 0 , \quad \frac{\partial R}{\partial x_4} = 0$$

où $\bar{\lambda} = p\,\lambda'_0 - q\,\lambda_0$; $x_1 = e \cos g_0$, $x_2 = e' \cos g'_0$, $x_3 = e \sin g_0$, $x_4 = e' \sin g'_0$.

Ces équations déterminent les cinq quantités $\bar{\lambda}$, x_1, x_2, x_3, x_4 en fonctions implicites d'une variable auxiliaire ν; cette variable ν est une variable oblique suivant la terminologie de Poincaré. On a en effet

$$\nu = \sin^2 \frac{J'}{2}$$

J' étant l'inclinaison mutuelle des orbites dans le cas où $e = e' = 0$. On retrouve bien entendu les résultats précédents quand les inclinaisons sont petites, mais on montre qu'il existe des valeurs de ν pour lesquelles on a d'autres orbites périodiques. La différence $p - q$ joue encore un rôle capital dans la discussion qui est alors complètement différente suivant que $p - q$ est pair ou impair. Nous ne pouvons nous étendre longuement sur la discussion que nous avons faite. Nous avons surtout voulu mettre en évidence les bases théoriques de la recherche des solutions périodiques à savoir : théorème de Poincaré, solutions périodiques d'un système d'équations différentielles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHAZY (Jean). - Solutions périodiques de la première sorte du problème des trois corps, Bull. astr., Série 2, t. 14, 1949, p. 153-175.

[2] GRÉMILLARD (Jean). - Sur les solutions périodiques de la troisième sorte dans le problème des trois corps, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 234, 1952, p. 2339-2341.

[3] GRÉMILLARD (Jean). - Sur certaines solutions périodiques du problème des trois corps, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 236, 1953, p. 49-51.

[4] GRÉMILLARD (Jean). - Sur la recherche des solutions périodiques de la troisième sorte, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 236, 1953, p. 1952-1953.

[5] GRÉMILLARD (Jean). - Recherches sur les conditions d'existence de solutions périodiques de la troisième sorte du problème des trois corps, Thèse Sc. math. Paris. 1957 (à paraître dans le "Bulletin astronomique").

[6] POINCARÉ (Henri). - Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, tome 1. - Paris, Gauthier-Villars, 1852.

[7] POINCARÉ (Henri). - Leçons de mécanique céleste, Tomes 1 et 2. - Paris, Gauthier-Villars, 1905-1907.

[8] TISSERAND (F.). - Traité de mécanique céleste, Tome 1. - Paris, Gauthier-Villars, 1889.