Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

Yves Thiry

Théorie pentadimensionnelle de la gravitation et de l'électromagnétisme

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 2 (1958-1959), exp. n° 1, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1958-1959__2__A1_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de MÉCANIQUE ANALYTIQUE
et de MÉCANIQUE CÉLESTE
Année 1958/59
-:-:-:-

22 novembre 1958

THÉORIE PENTADIMENSIONNELLE DE LA GRAVITATION ET DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

par Yves THIRY

1. Présentation axiomatique de la théorie.

L'élément primitif de cette théorie unitaire est constitué par une variété différentiable à 5 dimensions V_5 de classe C^2, les dérivées secondes du changement de coordonnées dans l'intersection de deux domaines de coordonnées admissibles étant de classe C^2 par morceaux (V_5 de classe $[C^2 , C^4$ par morceaux$]$).

Il est défini sur cette variété une métrique riemannienne $d\sigma^2$ partout de type hyperbolique normal, dont l'expression locale dans un système de coordonnées admissible est

$$d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta} \; dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha , \beta , \text{ tout indice grec} = 0 , 1 , 2 , 3 , 4)$$

Le tenseur fondamental, dont les composantes $\gamma_{\alpha\beta}$ sont appelées les "potentiels" pour le système de coordonnées envisagé, et sont de classe C^1 avec des dérivées premières de classe C^2 par morceaux, est appelé à déterminer le "phénomène élémentaire unitaire", c'est-à-dire le mouvement d'une particule matérielle chargée.

La suite des hypothèses constitue pour V_5 le postulat de cylindricité :

La variété riemannienne V_5 admet un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales de V_5 à trajectoires z orientées $d\sigma^2 < 0$, ne laissant invariant aucun point de V_5, la famille de ces trajectoires satisfaisant aux hypothèses suivantes :

- elles sont homéomorphes à un cercle T^1 ;

- on peut trouver une variété différentiable V_4 qui soit comme V_5 de classe $[C^2 , C^4$ par morceaux$]$, telle qu'il existe un homéomorphisme différentiable de classe $[C^2 , C^4$ par morceaux$]$ de V_5 sur le produit topologique $V_4 \times T^1$, dans lequel les trajectoires z s'appliquent sur les cercles facteurs.

V_4 , identifiable à l'espace dont les éléments sont les trajectoires z , est la variété quotient de V_5 par la relation d'équivalence définie par le groupe d'isométries.

Il existe alors dans V_5 des coordonnées locales x^α , dites adaptées au groupe, et qui seront toujours utilisées dans la suite, telles que :

1° les x^i sont un système de coordonnées locales arbitraires de V_4 ; les variétés $x^0 = Cte$ sont des variétés globalement définies dans V_5 et homéomorphes à V_4 ; l'homéomorphisme de V_5 sur $V_4 \times T^1$ peut être supposé appliquer les $x^0 = Cte$ sur les variétés homéomorphes à V_4 de $V_4 \times T^1$;

2° Les $\gamma_{\alpha\beta}$ relatifs aux cordonnées adaptées sont indépendants de x^0 ; le vecteur $\vec{\xi}$ générateur infinitésimal du groupe d'isométries a pour composantes contravariantes

$$\begin{cases} \xi^i = 0 & (i \text{ , tout indice latin} = 1 , 2 , 3 , 4) \\ \xi^0 = 1 \end{cases}$$

et a pour carré γ_{00} qui est négatif ; on posera

$$\xi = \sqrt{-\gamma_{00}} \quad ;$$

3° Ces coordonnées sont définies au changement de coordonnées près

$$\begin{cases} x^{i'} = \psi^{i'}(x^j) \\ x^{0'} = x^0 + \psi(x^j) \end{cases}$$

où ψ représente la restriction à une carte locale de V_4 d'une fonction arbitraire $\psi(z)$ définie sur V_4 , et que l'on appelle changement de jauge.

Dans un repère adapté (repère ayant pour origine un point x de V_5 , orthonormé et dont le premier vecteur $\vec{e}_0$ est un vecteur unitaire tangent en x à la trajectoire $z(x)$ passant par x), la métrique de V_5 s'exprime à l'aide de formes de Pfoff ω^α :

$$d\sigma^2 = -(\omega^0)^2 + (\omega^4)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2$$

où

$$\omega^0 = \xi \, (dx^0 + \frac{\gamma_{0i}}{\gamma_{00}} dx^i) \quad .$$

Nous poserons

$$ds^2 = \xi[(\omega^4)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2]$$

$$= g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

avec

$$g_{ij} = \xi(\gamma_{ij} - \frac{\gamma_{oi}\ \gamma_{oj}}{\gamma_{oo}}) \ .$$

Si l'on considère dans V_5 le vecteur φ_λ défini par

$$\beta\varphi_\lambda = \frac{\gamma_{o\lambda}}{\gamma_{oo}} \ , \ \beta \text{ étant une constante,}$$

et son rotationnel $F_{\lambda\mu}$, on peut définir intrinsèquement sur la variété V_4

- un scalaire ξ
- une métrique de type hyperbolique normal

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

conforme à la métrique-quotient $(\omega^4)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2$ induite par $d\sigma^2$ sur V_4, et que nous appellerons simplement métrique conforme

- un tenseur antisymétrique F_{ij} et sur chaque section W_4 canoniquement homéomorphe à V_4 un champ de vecteur φ_i tel que

$$g_{ij} = \xi\gamma_{ij} + \beta^2\ \xi^3\ \varphi_i\ \varphi_j$$

$$F_{ij} = \partial_i\ \varphi_j - \partial_j\ \varphi_i$$

Ceci étant, la variété V_4, munie de la métrique conforme ds^2, sera interprétée comme l'espace-temps de la relativité générale, les g_{ij} étant les potentiels de gravitation.

L'image réciproque non canonique sur V_4 du champ de vecteur φ_i associé à une section W_4 sera interprétée comme potentiel-vecteur électromagnétique. Plus simplement on dira que φ_i est le potentiel-vecteur électromagnétique et ainsi le tenseur F_{ij} sera interprété comme champ électromagnétique.

Les hypothèses faites sur V_5 induisent sur V_4 munie de la métrique ds^2 et sur le tenseur-champ électromagnétique les hypothèses classiques de l'axiomatique de la théorie provisoire de l'électromagnétisme.

2. La théorie provisoire de l'électromagnétisme.

Avant d'aborder l'élaboration des équations de la théorie, présentons une rapide étude critique de la théorie provisoire de l'électromagnétisme, cette étude et le souci d'unifier, du moins au sens large, le champ gravitationnel et le champ électromagnétique, étant à la base de la genèse de la théorie pentadimensionnelle présentée.

Dans la théorie provisoire de l'électromagnétisme, le champ gravitationnel, défini par la structure géométrique adoptée pour l'Univers, reçoit une explication satisfaisante. Le champ électromagnétique par contre est simplement superposé à cette structure géométrique par son introduction aux seconds membres des équations d'Einstein à l'aide d'un tenseur d'impulsion-énergie élaboré à partir des concepts de la relativité restreinte.

Pour écrire les équations de la théorie provisoire, introduisons dès à présent des inductions distinctes des champs et représentons par F_{ij} le tenseur induction magnétique $(\vec{B})$-champ électrique $(\vec{E})$ et par H_{ij} le tenseur-champ magnétique $(\vec{H})$-induction électrique $(\vec{D})$. En admettant entre champs et inductions les relations

$$\vec{H}\,\tau = \vec{B}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E}$$

τ étant la perméabilité magnétique et ε le pouvoir diélectrique, avec $\varepsilon\tau = 1$, on a entre les tenseurs H_{ij} et F_{ij} la relation

$$H_{ij} = \varepsilon\, F_{ij}$$

Dans ces conditions, nous écrirons le tenseur d'impulsion-énergie du schéma champ électromagnétique pur sous la forme

$$\tau_{ij} = \frac{1}{4}\, g_{ij}\, H_{k\ell}\, F^{k\ell} - \frac{1}{2}(H_i{}^k\, F_{jk} + H_{jk}\, F_i{}^k) \;.$$

Les équations de la théorie provisoire se composent

- des équations d'Einstein :

$$S_{ij} = \chi\, T_{ij}$$

- des équations de Maxwell du premier groupe :

$$\nabla_j H^{ji} = J^i$$

- des équations de Maxwell du second groupe :

$$\frac{1}{2} \eta^{jk\ell i} \nabla_j F_{k\ell} = 0$$

équivalentes au fait qu'il existe localement un potentiel-vecteur φ_i, dont nous assumerons l'existence globale tel que

$$F_{ij} = \partial_i \varphi_j - \partial_j \varphi_i \quad .$$

Dans le schéma champ électromagnétique pur, T_{ij} se réduit à τ_{ij} et $J^i = 0$.

Dans le schéma matière-champ électromagnétique, on prendra

$$T_{ij} = \rho\, u_i\, u_j + \tau_{ij}$$

et on admettra l'équation de transfert de Lorentz

$$J^i = \mu\, u^i$$

μ étant la densité de charge électrique pure.

On démontre alors que $k = \frac{\mu}{\rho}$ demeure constant tout le long d'une ligne de courant et nous ne considèrerons que des schémas homogènes, où k est une constante absolue.

Dans un champ donné, correspondant à un schéma champ électromagnétique pur, si l'on considère une petite masse d'épreuve chargée de rapport charge/masse égale à k et si l'on représente son champ intérieur par un schéma matière pur, il résulte de l'étude du raccordement de son tube d'Univers, lequel est engendré par des lignes de courant de son champ intérieur, et d'un passage à la limite, que la trajectoire de cette masse satisfait au système différentiel :

$$u^i \nabla_i u_j = k\, F_{ji}\, u^i$$

Enonçons à présent un résultat plus général que ce dont nous allons nous servir mais qui est susceptible de jouer un rôle dans l'interprétation de la théorie pentadimensionnelle :

Dans tout mouvement d'un fluide parfait chargé de manière homogène, les lignes de courant sont des lignes orientées dans le temps réalisant l'extremum de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} F \, ds + k \varphi$$

pour des variations à extrémités fixes ; φ étant la forme potentiel-vecteur et F l'indice du fluide c'est-à-dire

$$\exp \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho + p}$$

en admettant une équation d'état $\rho = \varphi(p)$, avec $k = \frac{\mu}{\rho^*}$, $\rho^* = \frac{\rho + p}{F}$.

En utilisant ce résultat pour le schéma matière pure chargée, auquel on passe en posant

$$p = 0 \, , \quad F = 1 \, , \quad \rho^* = \rho$$

et en revenant à la masse d'épreuve, on voit que les trajectoires de cette particule chargée sont les lignes orientées dans le temps réalisant l'extremum de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} [(g_{ij} \, \dot{x}^i \, \dot{x}^j)^{\frac{1}{2}} + k \, \varphi_i \, \dot{x}^i] \, du \, , \quad \dot{x}^i = \frac{dx^i}{du} \quad .$$

Ces trajectoires sont donc des géodésiques de la variété finslerienne admettant pour métrique

$$L(x^i \, , \dot{x}^j) = (g_{ij} \, \dot{x}^i \, \dot{x}^j)^{\frac{1}{2}} + k \, \varphi_i \, \dot{x}^i \quad .$$

3. Les géodésiques de V_5 et leurs projections sur V_4 .

Revenons à présent à la variété riemannienne V_5 envisagée au paragraphe 1 ; posons

$$\mathcal{L}^2 = \gamma_{\alpha\beta} \, \dot{x}^\alpha \, \dot{x}^\beta$$

et supposons $\gamma_{00} \neq 0$.

On peut alors établir le résultat suivant :

Les extrémales sur V_5 de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} \mathcal{L}$ du qui correspondent à la valeur h de l'intégrale première $\partial_0 \mathcal{L} = h$ se projettent sur V_4 selon les extrémales de l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} L(x^i , \dot{x}^j , h) \, du$$

où h a la même valeur et où L est donnée par

$$L = \sqrt{\frac{1+\frac{h^2}{\xi^2}}{\xi} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} + h\beta \varphi_i \dot{x}^i$$

g_{ij} et φ_i ayant les significations données au paragraphe 1.

Cette expression de L est valable pour les géodésiques de V_5 rendant $\mathcal{L}^2$ positif. Pour celles rendant $\mathcal{L}^2$ négatif, qui vont également jouer un rôle dans l'interprétation de la théorie, on posera $ih = h_1$ et on considérera à la place de L la fonction :

$$L_1 = i \left[\sqrt{\frac{\frac{h_1^2}{\xi^2}-1}{\xi} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} + h_1 \beta \varphi_i \dot{x}^i \right]$$

Ces fonctions L sont du type, racine carrée d'une forme quadratique augmentée d'une forme linéaire, de celle qui a défini au paragraphe précédent les trajectoires de la particule chargée en théorème provisoire.

La théorie unitaire pentadimensionnelle a été présentée axiomatiquement et ses propriétés sont présentées comme découlant de cette axiomatique : mais naturellement la genèse de la théorie a suivi une autre voie : un problème de calcul des variations a conduit à un processus de "descente" d'une fonction $\mathcal{L}$ à une fonction L et un processus de "montée" de L à $\mathcal{L}$; le processus de descente appliqué à une métrique riemannienne $\mathcal{L}$ conduit, dans le cas où $\gamma_{00} \neq 0$, à une fonction L du type racine carrée d'une forme quadratique augmentée d'une forme linéaire ; historiquement, c'est donc par le processus inverse de montée à partir de la fonction définissant les trajectoires d'une particule chargée en théorie provisoire qu'a été élaborée une variété V_5 cylindrique.

Revenons aux fonctions L et faisons le raccord avec la théorie provisoire. On est amené à poser

$$(3.1) \quad k = \beta h \sqrt{\frac{\xi}{1+\frac{h^2}{\xi^2}}} \quad \text{ou, pour } L_1, \quad k = \beta h_1 \sqrt{\frac{\xi}{\frac{h_1^2}{\xi^2} - 1}}$$

et à étudier les variations de x^0 en explicitant $\partial_0 \mathcal{L} = h$, ce qui donne

$$(3.2) \qquad dx^0 = \frac{k}{\beta \xi^3} ds - \beta \varphi$$

On constate que si l'on suppose ξ constant, on retrouve exactement les trajectoires de la particule chargée dans l'espace-temps V_4 de la relativité générale comme projections des géodésiques de V_5 le long desquelles x^0 varie suivant la formule (3.2). On est en présence de la théorie pentadimensionnelle de Kaluza-Klein, qui n'apporte rien de nouveau à la théorie provisoire de l'électromagnétisme, mais la représente simplement par un formalisme nouveau, d'ailleurs intéressant et utile, en particulier pour traiter des problèmes globaux en théorie provisoire.

Le rejet de l'hypothèse ξ = Cte conduit à la théorie pentadimensionnelle dont j'ai présenté l'axiomatique.

Considérons dans V_5 les géodésiques le long desquelles x^0 varie suivant la formule (3.2), h étant une constante déterminée et la projection sur V_4 d'une telle géodésique. Il résultera des équations du champ et des conditions de raccordement qui seront adoptées que cette projection définit la trajectoire spatio-temporelle d'une particule chargée. Cette projection est extrémale dans V_4 de l'intégrale associée à la fonction

$$\frac{1}{k} ds + \varphi$$

k ayant la valeur donnée par (3.1).

h étant constant mais ξ variable, cette fonction diffère, autrement que par la multiplication par une constante, de la fonction $ds + k\varphi$ de la théorie provisoire. Les variations de ξ seront donc tenues pour faibles et ξ sera considéré comme voisin de 1, ce que permet l'introduction de la constante β.

4. Les équations de la théorie.

Nous prendrons comme équations de champ de la théorie pentadimensionnelle la généralisation formelle des équations de champ de la relativité générale.

Dans le "cas unitaire extérieur", qui correspondra au schéma champ électromagnétique pur de la relativité générale, les équations s'écriront :

$$\mathcal{S}_{\alpha\beta} = 0 \quad ,$$

$\mathcal{S}_{\alpha\beta} = \mathcal{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \mathcal{R}$ étant le tenseur d'Einstein de V_5 ; elles sont caractérisées par le principe variationnel suivant :

Elles définissent l'extremum de l'intégrale

$$\int_C \mathcal{R}_{\alpha\beta} \, \gamma^{\alpha\beta} \sqrt{|\gamma|} \, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$$

étendue à une chaîne différentiable C de dimension 5 , pour des variations des 15 potentiels et leurs dérivées premières nulles au bord de C .

Il s'agit d'expliciter, uniquement en termes de V_4 muni de la métrique conforme, les équations $\mathcal{S}_{\alpha\beta} = 0$. Le calcul de $\mathcal{S}_{io}$ fait apparaître la dérivée covariante, non pas du tenseur champ électromagnétique F_{ij} défini au paragraphe 1 mais de $\xi^3 F_{ij}$; on est donc conduit à introduire des inductions distinctes des champs, à poser

$$H_{ij} = \xi^3 F_{ij}$$

et à interpréter ξ^3 comme étant le pouvoir diélectique.

Dans les $\mathcal{S}_{ij}$ le tenseur τ_{ij} se reconstitue sous la forme indiquée en théorie provisoire et seules des dérivées premières de ξ interviennent.

Dans V_4 muni de la métrique conforme, en coordonnées locales adaptées, les équations du cas unitaire extérieur s'écrivent :

$$(4.1) \qquad \boxed{\begin{cases} S_{ij} + \frac{3}{2} K_{ij} - \chi \tau_{ij} = 0 \\ \nabla_j H^j{}_i = 0 \\ \Delta_2 \sigma + 2 \Delta_1 \sigma + \chi H_{ij} F^{ij} = 0 \end{cases}}$$

avec

$$K_{ij} = \frac{1}{2} g_{ij} \Delta_1 \sigma - \partial_i \sigma \partial_j \sigma$$

$$\sigma = \log \xi$$

$\chi = \frac{\beta^2}{2}$ est interprété comme étant la constante de la gravitation.

En donnant à ξ la valeur 1 et en supprimant la quinzième équation, on retrouve les équations de la théorie provisoire de l'électromagnétisme, élaborées dans le cadre de la théorie de Klein.

Si ξ est variable, elles généralisent les équations du schéma champ électromagnétique pur de la relativité générale, les variations de la 15e variable de champ (pouvoir diélectrique) étant régies par une 15e équation.

Dans le "cas unitaire intérieur", les équations de la théorie pentadimensionnelle s'écrivent

$$S_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha\beta}$$

$\Theta_{\alpha\beta}$ étant choisi au mieux pour représenter une distribution de matière chargée.

Si l'on utilisait la généralisation formelle du schéma fluide parfait, $\Theta_{\alpha\beta} = r\, v_\alpha\, v_\beta - \varpi\, \gamma_{\alpha\beta}$, l'introduction de l'indice du fluide serait sans doute intéressante pour l'interprétation physique et permettrait peut-être de serrer de plus près les trajectoires de la théorie provisoire extrémales de l'intégrale

$$\int F\, ds + k\, \varphi$$

Nous n'utiliserons que la généralisation formelle du schéma matière pure, $\Theta_{\alpha\beta} = r\, v_\alpha\, v_\beta$, qui est un cas particulier du précédent. r est un scalaire positif, v_α les composantes covariantes d'un vecteur de carré $+1$ ou -1 dont les trajectoires sont appelées lignes de courant pentadimensionnelles. Il résulte des équations de conservation que, dans V_5 , ces lignes de courant sont des géodésiques de cette variété riemannienne et il sera aussi bien utilisé des géodésiques orientées $d\sigma^2 < 0$ qu'orientées $d\sigma^2 > 0$.

Les lignes de courant pentadimensionnelles (orientées $d\sigma^2 > 0$), satisfaisant à l'intégrale $\partial_0 \mathcal{L} = 0$, qui se traduit par $v_0 = h$, se projettent sur V_4 selon des lignes de courant orientées dans le temps, telles que le long de ces lignes

$$\frac{1+\frac{h^2}{\xi^2}}{\xi}\, d\sigma^2 = ds^2$$

et qui sont extrémales de

$$\int_{z_0}^{z_1} \sqrt{\frac{1+\frac{h^2}{\xi^2}}{\xi}}\, ds + \beta h \varphi$$

Si u^i est le vecteur-vitesse unitaire dans la métrique conforme ds^2 de V_4, on a le long d'une ligne de courant

$$v^i = \sqrt{\frac{1+\frac{h^2}{\xi^2}}{\xi}}\, u^i \quad .$$

Les quatorze premières équations du cas unitaire intérieur s'écrivent alors

$$S_{ij} + \frac{3}{2} K_{ij} - \chi \tau_{ij} = r \frac{1+\frac{h^2}{\xi^2}}{\xi} u_i u_j$$

$$\bar{\nabla}_j H^j{}_i = r \frac{2h}{\beta} \sqrt{\frac{1+\frac{h^2}{\xi^2}}{\xi}}\, u_i$$

et l'on est amené à poser

$$\chi \rho = r \frac{1+\frac{h^2}{\xi^2}}{\xi}$$

$$\mu = r \frac{2h}{\beta} \sqrt{\frac{1+\frac{h^2}{\xi^2}}{\xi}}$$

ce qui redonne bien

$$\frac{\mu}{\rho} = k = \beta h \sqrt{\frac{\xi}{1+\frac{h^2}{\xi^2}}}$$

La quinzième équation peut se mettre sous la forme

$$\Delta_2 \sigma + 2 \Delta_1 \sigma + \chi H_{ij} F^{ij} = \frac{r}{\xi} \left(\frac{1}{3} + \frac{h^2}{\xi^2}\right) \quad .$$

En définitive, nous pouvons écrire les équations du cas unitaire intérieur sous la forme suivante, qui généralise le cas du schéma matière-champ électromagnétique de la relativité générale :

$$\boxed{\begin{array}{l} S_{ij} + \frac{3}{2} K_{ij} - \chi \tau_{ij} = \chi \rho u_i u_j \\ \nabla_j H^j{}_i = \mu u_i \\ \Delta_2 \sigma + 2 \Delta_1 \sigma + \chi H_{ij} F^{ij} = \chi \rho \dfrac{\frac{1}{3} + \frac{h^2}{\xi^2}}{1 + \frac{h^2}{\xi^2}} \end{array}}$$

Lorsqu'on considèrera les équations correspondant à des géodésiques de V_5 orientées $d\sigma^2 < 0$, il suffira de poser dans les formules précédentes $h_1 = ih$.

REMARQUES. - Les géodésiques de V_5 orientées $d\sigma^2 > 0$ ne peuvent rendre compte des trajectoires dans V_4 que des particules pour lesquelles $\frac{\mu}{\rho}$ est en valeur absolue assez petit. Ce sera donc pour les autres, et c'est le cas pour l'électron et pour le photon, que l'on fera appel aux géodésiques orientées $d\sigma^2 < 0$

On peut donner à la quinzième équation diverses autres formes, qui sont des formules de divergence et qui sont utiles pour traiter les problèmes globaux.

5. Etudes en théorie pentadimensionnelles

1. - Les problèmes de Cauchy et le principe des géodésiques. - Dans le cas unitaire extérieur, considérons l'énoncé suivant, relatif à V_5 :

- On se donne sur une hypersurface Σ de V_5 engendrée par des trajectoires du groupe d'isométries les potentiels $\gamma_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées premières ; déterminer en dehors de Σ les valeurs de ces potentiels supposés satisfaire aux équations $S_{\alpha\beta} = 0$.

Ce problème est la traduction dans V_5 du suivant :

- On se donne sur une hypersurface S de V_4 les potentiels de gravitation g_{ij}, un potentiel vecteur φ_i et un scalaire ξ ainsi que leurs dérivées premières ; déterminer en dehors de S les valeurs de ces quantités supposées satisfaire aux équations (4.1), Σ étant l'hypersurface de $V_5 = V_4 \times T^1$ se projetant aux points de S. Le problème admet une solution et une seule, qui est cylindrique, sous des hypothèses à préciser (analycité ou simple différentiabilité des données) ; il en résulte que dans V_4 les variétés caractéristiques S_c des équations de la théorie sont toujours les variétés tangentes aux cônes élémentaires de V_4 ; les variétés caractéristiques Σ_c dans V_5 sont engendrées par les trajectoires se projetant sur une S_c et sont par suite tangentes aux cônes élémentaires de V_5. Ces variétés sont les surfaces d'onde du champ unitaire, à la traversée desquelles peuvent se produire des discontinuités des dérivées secondes des potentiels.

L'étude du problème de Cauchy dans le cas unitaire intérieur montre que les circonstances qui généralisent dans V_5 les circonstances rencontrées en relativité générale dans le cas matière pure correspondent dans V_4 à celles rencontrées dans le cas matière pure champ électromagnétique.

L'étude du prolongement de l'intérieur vers l'extérieur et des conditions de raccordement conduisent alors au principe des géodésiques qui permet d'interpréter les géodésiques de V_5, orientées $d\sigma^2 > 0$ ou $d\sigma^2 < 0$ ainsi qu'il a été dit, comme les trajectoires pentadimensionnelles de particules chargées dans le champ unitaire.

2. <u>Etude globale de champs unitaires</u>. – Cette étude porte sur la recherche des hypothèses sous lesquelles les propositions suivantes sont valables :

– L'introduction de distribution de matière, chargée ou non, dans un champ unitaire extérieur donné ne peut s'effectuer que dans des domaines où ce champ n'est pas régulier.

– Un champ unitaire extérieur, régulier partout, est trivial. Les circonstances trouvées induisent dans V_4 les circonstances suivant lesquelles les propositions similaires dans V_4 sont vraies pour différents schémas.

L'étude globale en théorie de Klein, donc en théorie provisoire, conduit à des résultats moins satisfaisants.

3. <u>Equations du mouvement</u>. – Les cinq identités de conservation du tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$, soit

$$D_\alpha (\Theta^\alpha{}_\beta) = 0 \quad (D_\alpha \text{ : opérateur de dérivation covariante pour la connexion riemannienne de } V_5)$$

sont équivalentes à :

- l'intégrale des géodésiques, que l'on peut écrire $v_0 = h$
- une équation de continuité que l'on peut traduire par le fait que

$$\int n \, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \qquad , \quad n = r \, v^4 \sqrt{\gamma}$$

reste constante le long d'une ligne de courant

- trois équations

$$v^{\alpha} D_{\alpha} v_A = 0 \quad (A = 1 , 2 , 3)$$

qui donnent les équations du mouvement sous la forme

$$\frac{d}{dt} \int_C \Theta^4{}_A \sqrt{\gamma} \, d V = \frac{1}{2} \int_C \Theta^{\alpha\beta} \sqrt{\gamma} \, \partial_A \gamma_{\alpha\beta} \, d V$$

(intégralesétendues à un corps C) utilisée en relativité générale.

Les identités de conservation peuvent ainsi être interprétées comme étant les équations pentadimensionnelles du mouvement d'un corps d'épreuve.

Ces équations sont liées de façon intime aux conditions d'isothermie.

On peut définir dans V_5 des coordonnées isothermes par généralisation formelle des coordonnées isothermes utilisées en relativité générale. Les conditions d'isothermie dans V_5

$$\Phi^{\rho} \equiv \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_{\alpha} (\gamma^{\alpha\rho} \sqrt{\gamma}) = 0$$

se traduisent dans V_4 muni de la métrique conforme par les conditions d'isothermie

$$\partial_j (g^{ij} \sqrt{-g}) = 0$$

et par une fixation de la transformation de jauge dont dépend le potentiel électromagnétique, les coordonnées isothermes pentadimensionnelles se trouvant être compatibles avec le caractère cylindrique de V_5 .

La recherche d'une solution unitaire approchée conduit à considérer des équations du mouvement approchées d'ordre p et on a le résultat suivant :

<u>Les équations du mouvement approchées d'ordre</u> p <u>entraînent la vérification des conditions d'isothermie approchées d'ordre</u> p .

Le calcul de la première approximation montre que ce n'est que dans l'interprétation où V_4 est munie de la métrique conforme, que les potentiels relatifs à un schéma non chargé sont identiques à ceux du cas matière pure de la relativité générale.

Les derniers points présentés semblent bien imposer à la théorie l'interprétation qui en a été donnée ici.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HENNEQUIN (Mme Francoise). - Etude mathématique des approximations en relativité générale et en théorie unitaire de Jordan-Thiry, Bull. scient. Comm. Trav. hist. et scient., t. 1, 1956, 2e partie : Mathématiques. - Paris, Gauthier-Villars, 1957 ; p. 73-154 (Thèse Sc. math. Paris. 1956).

[2] JORDAN (Pascual). - Schwerkraft und Weltall, 2te Auflage. - Braunschweig, Friedr. Vieweg und Sohn, 1955 (Die Wissenschaft, 107).

[3] KLEIN (Oskar). - Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie, Z. f. Phys., t. 37, 1926, p. 895-906.

[4] LICHNEROWICZ (André). - Théoriesrelativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. - Paris, Masson, 1955.

[5] THIRY (Yves). - Etude mathématique des équations d'une théorie unitaire à quinze variables du champ, J. Math. pures et appl., t. 30, 1951, p. 275-396 (Thèse Sc. math. Paris. 1950).