Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste

Louis Bel

La radiation gravitationnelle

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 2 (1958-1959), exp. nº 12, p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1958-1959__2__A12_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire de MÉCANIQUE ANALYTIQUE
et de MÉCANIQUE CÉLESTE

Année 1958/59

-:-:-:-

16 mai 1959

LA RADIATION GRAVITATIONNELLE

par Louis BEL

I. Introduction.

1. Le problème.

Il semble que le plus raisonnable qu'on puisse faire pour aborder le problème de la radiation gravitationnelle est d'essayer de trouver des analogies entre ce problème et celui bien connu de la radiation électromagnétique. Dans cet esprit, plusieurs tentatives ont été déjà faites par différents auteurs. L'exposé que je me propose de faire suit le point de vue de MM. LICHNEROWICZ et PIRANI qui est essentiellement celui de supposer que c'est le tenseur de courbure, plutôt que le tenseur métrique, l'élément géométrique adéquat à la description des phénomènes de radiation gravitationnelle.

2. Généralités.

a. En relativité générale l'élément primitif est l'espace-temps, c'est-à-dire une variété différentiable V_4 de classe C^2 , C^4 par morceaux, munie d'une métrique de type hyperbolique normal, à un carré positif et trois carrés négatifs

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\ dx^\alpha\ dx^\beta \qquad (\alpha , \beta = 0 , 1 , 2 , 3 \ ; \ x^0 \text{ : variable temporelle})$$

de classe C^1 , C^3 par morceaux.

b. Soit T_x l'espace vectoriel tangent au point x de V_4 . Je désignerai par $T_x^{\wedge(2)}$ l'espace des tenseurs antisymétriques. Il est bien connu que si $\vec{e}_{\alpha|}$ est une base de T_x , l'ensemble des $E_{I|}$ (I , J = 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6) :

$$(C)\qquad \begin{array}{lll} E_{1|} = \vec{e}_{2|} \wedge \vec{e}_{3|} & E_{2|} = \vec{e}_{3|} \wedge \vec{e}_{1|} & E_{3|} = \vec{e}_{1|} \wedge \vec{e}_{2|} \\ \vec{E}_{4|} = \vec{e}_{1|} \wedge \vec{e}_{0|} & E_{5|} = \vec{e}_{2|} \wedge \vec{e}_{0|} & E_{6|} = \vec{e}_{3|} \wedge \vec{e}_{0|} \end{array}$$

est une base de $T_x^{\wedge(2)}$. En outre, avec la définition habituelle de produit scalaire sur $T_x^{\wedge(2)}$, si $\vec{e}_{\alpha|}$ est un repère orthonormé de T_x , $E_{I|}$ est un repère orthonormé de $T_x^{\wedge(2)}$. Je désignerai par G_{IJ} le tenseur fondamental de $T_x^{\wedge(2)}$. Avec la convention (C) la forme quadratique attachée à G_{IJ} est à trois carrés positifs et trois carrés négatifs. "L'image réciproque" de G_{IJ} sur T_x est le tenseur

$$\gamma_{\alpha\beta,\lambda\mu} = g_{\alpha\lambda}\, g_{\beta\mu} - g_{\alpha\mu}\, g_{\beta\lambda}$$

c. Le tenseur de courbure de la métrique $R_{\alpha\beta,\lambda\mu}$, possède les propriétés de symétrie

(1) $$R_{\alpha\beta,\lambda\mu} = - R_{\beta\alpha,\lambda\mu} = - R_{\alpha\beta,\mu\lambda}$$

et satisfait, en outre, les relations

(2) $$\underset{\alpha,\beta,\lambda}{\mathcal{S}} R_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0$$

$\underset{\alpha,\beta,\lambda}{\mathcal{S}}$ désigne la somme sur la permutation circulaire des trois indices α , β et λ . De (1) et (2), il vient

(3) $$R_{\alpha\beta,\lambda\mu} = R_{\lambda\mu,\alpha\beta} \quad .$$

J'appellerai, suivant une terminologie de A. LICHNEROWICZ, légèrement modifiée, double 2-forme tout tenseur du quatrième ordre possédant les propriétés de symétrie (1) ; double 2-forme symétrique tout tenseur du quatrième ordre possédant les propriétés de symétrie (1) et (3). Toute double 2-forme peut être considérée comme un tenseur du deuxième ordre de $T_x^{\wedge(2)}$. Je désignerai par H_{IJ} "l'image" de $R_{\alpha\beta,\lambda\mu}$.

d. Les équations qui limitent la généralité des potentiels de gravitation sont les équations d'Einstein :

(4) $$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(R - 2\lambda)\, g_{\alpha\beta} = X T_{\alpha\beta}$$

où $R_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci, R le scalaire de courbure, λ la constante cosmologique, X un facteur de proportionnalité et $T_{\alpha\beta}$ le tenseur d'impulsion-énergie. Dans le vide et en absence de champ électromagnétique $T_{\alpha\beta} = 0$, les équations (4) sont alors équivalentes à :

(5) $$R_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$$

II. La radiation électromagnétique.

1. Le champ électromagnétique. Les équations de Maxwell.

a. En absence de tout phénomène d'induction le champ électromagnétique est décrit en relativité générale par un champ de 2-formes F de classe C^0, C^2 par morceaux. Pour un repère orthonormé tel que $\vec{e}_{0|} = \vec{u}$ les vecteurs champ électrique et champ magnétique, relatifs à ce repère, sont les vecteurs d'espace

$$\vec{E}(\vec{u}) : E_\beta = F_{\alpha\beta} u^\alpha \qquad \vec{H}(\vec{u}) : H_\beta = - \overset{*}{F}_{\alpha\beta} u^\alpha$$

où $\overset{*}{F}$ est la 2-forme adjointe de F

$$\overset{*}{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\gamma\delta} \qquad (\eta \text{ : tenseur élément de volume})$$

b. Le champ électromagnétique est régi par les équations de Maxwell :

$$\nabla_\beta F^{\beta\alpha} = J^\alpha \qquad \underset{\alpha,\beta,\gamma,}{\mathcal{S}} \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$$

où ∇ est l'opérateur de dérivation covariante dans la connexion riemannienne et $\vec{J}$ le vecteur courant électrique. Dans le vide $\vec{J} = 0$.

2. Étude algébrique d'une 2-forme.

a. Considérons les deux scalaires attachés à la 2-forme F

$$\Psi = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \qquad \Phi = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}$$

En termes de $\vec{E}$ et $\vec{H}$, on a :

$$\Psi = \vec{E}^2 - \vec{H}^2 \qquad \Phi = - 2\vec{E}\vec{H}$$

b. L'étude algébrique d'une 2-forme conduit à distinguer deux cas suivant que le scalaire

$$K^2 = \Psi^2 + \Phi^2$$

soit nul ou différent de zéro.

1° Si $K \neq 0$, la 2-forme est dite régulière, et on démontre qu'il existe deux vecteurs isotropes $\vec{\ell}$ et $\vec{m}$ tels que

$$F_{\alpha\beta} \ell^\alpha = a\ell_\beta \qquad \overset{*}{F}_{\alpha\beta} \ell^\alpha = b\ell_\beta$$

$$F_{\alpha\beta} m^\alpha = - am_\beta \qquad \overset{*}{F}_{\alpha\beta} m^\alpha = - bm_\beta \qquad (a^2 + b^2 \neq 0)$$

2° Si $K = 0$, la 2-forme est dite singulière. On démontre dans ce cas qu'il existe un vecteur $\vec{\ell}$ isotrope, et un seul, tel que

$$F_{\alpha\beta} \, \ell^{\alpha} = 0 \qquad \overset{*}{F}_{\alpha\beta} \, \ell^{\alpha} = 0$$

Inversement, s'il existe un vecteur $\vec{\ell}$ satisfaisant ces relations, $\vec{\ell}$ est nécessairement isotrope et K est nul. $\vec{\ell}$ est dit le vecteur fondamental de la 2-forme.

3. Le tenseur de Maxwell. Densité d'énergie et vecteur de Poynting.

a. Considérons le vecteur densité de force de Lorentz $\vec{K}$:

$$K_{\beta} = F_{\alpha\beta} \, J^{\alpha}$$

Compte tenu du premier groupe d'équations de Maxwell, nous pouvons écrire

$$K_{\beta} = F_{\alpha\beta} \, \nabla_{\rho} \, F^{\rho\alpha}$$

En intégrant par parties le deuxième membre on peut donner à cette relation la forme

$$K_{\beta} = \nabla_{\alpha} \, \tau^{\alpha}{}_{\beta}$$

où $\tau^{\alpha\beta}$ est le tenseur de Maxwell

$$\tau^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \Psi - F^{\alpha}{}_{\rho} \, F^{\beta\rho}$$

b. L'étude algébrique du tenseur de Maxwell conduit aussi à distinguer deux cas suivant que la 2-forme avec laquelle il est construit est singulière ou régulière.

1° Si F est régulière $\tau^{\alpha\beta}$ a deux valeurs propres doubles $+K$ et $-K$. Le 2-plan de vecteurs propres correspondant à la valeur propre $+K$ est un 2-plan orienté dans le temps.

2° Si F est singulière, les quatre valeurs propres sont nulles et il n'y a pas de vecteur propre orienté dans le temps. Il existe par contre un vecteur propre isotrope $\vec{o}$, et un seul (le vecteur fondamental de F)

$$\tau_{\alpha\beta} \, \ell^{\alpha} = 0 \qquad .$$

On démontre dans ce cas que

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau \, \ell_{\alpha} \, \ell_{\beta}$$

c. Pour un repère orthonormé $\vec{e}_{\alpha|}$ tel que $\vec{e}_{0|} = \vec{u}$ la densité d'énergie électromagnétique est le scalaire $V(\vec{u})$

$$V(\vec{u}) \; : \; V = \tau^{\alpha\beta} \; u_{\alpha} \; u_{\beta}$$

en termes de $\vec{E}$ et $\vec{H}$ on a

$$V = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2)$$

Pour ce même repère le vecteur de Poynting est le vecteur

$$\vec{P}(\vec{u}) \; : \; P_{\alpha} = (g^{\gamma}_{\alpha} - u_{\alpha} \, u^{\gamma}) \, \tau_{\beta\gamma} \; u^{\beta}$$

si $\vec{P}(\vec{u}) = 0$ on a :

$$\tau_{\beta\alpha} \; u^{\beta} = V u_{\alpha}$$

c'est-à-dire $\vec{u}$ est vecteur propre de $\tau_{\alpha\beta}$. Ainsi pour qu'il existe un repère orthonormé tel que $\vec{P}(\vec{u}) = 0$ il faut et il suffit que F soit régulière.

4. La radiation électromagnétique.

Je suppose dans ce paragraphe que $\vec{J} = 0$. Ainsi $\nabla_{\alpha} \, \tau^{\alpha}{}_{\beta} = 0$. Considérons un élément de 2-surface spatiale S et soit $\vec{n}$ le vecteur d'espace orthogonal à S . Le flux d'énergie électromagnétique à travers S est, en première approximation, proportionnel à $\vec{P}.\,\vec{n}$. Pour que ce flux soit nul quel que soit $\vec{n}$, il faut et il suffit que $\vec{P} = 0$. Ce résultat, ainsi que l'étude algébrique d'une 2-forme, et celui des discontinuités des dérivées premières du tenseur champ électromagnétique, nous amènent, successivement, à décrire un état de radiation électromagnétique intrinsèque par :

1° une 2-forme telle que $\vec{P}(\vec{u}) \neq 0$ quel que soit $\vec{u}$, de carré $+1$

2° une 2-forme singulière, c'est-à-dire telle que $\Psi^2 + \Phi^2 = 0$

3° une 2-forme F telle qu'il existe un vecteur $\vec{\ell}$, nécessairement isotrope, satisfaisant les relations

$$F_{\alpha\beta} \, \ell^{\alpha} = 0 \qquad \overset{*}{F}_{\alpha\beta} \, \ell^{\alpha} = 0 \qquad .$$

Des résultats des paragraphes 2 et 3 , il résulte que ces trois points de vue sont équivalents. Je les ai, néanmoins, distingués, car nous les retrouverons dans le cas gravitationnel avec cette différence qu'ils ne seront plus équivalents.

Je rappelle, pour terminer, que F étant singulière et $\tau^{\alpha\beta}$ conservatif, les trajectoires du vecteur fondamental de F sont des géodésiques isotropes, ce qui fournit une interprétation satisfaisante des rayons électromagnétiques comme étant des géodésiques de longueur nulle de la métrique.

III. La radiation gravitationnelle.

1re partie : Formalisme général

5. Les tenseurs adjoint à gauche, adjoint à droite et biadjoint.

a. Au tenseur de courbure R , à toute double 2-forme en général, nous pouvons associer les trois tenseurs suivants :

(1)
$$(* R)_{\alpha\beta,\lambda\mu} = \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\gamma\delta,}{}_{\lambda\mu} \qquad (R *)_{\alpha\beta,\lambda\mu} = \frac{1}{2} \eta_{\lambda\mu\rho\sigma} R_{\alpha\beta,}{}^{\rho\sigma}$$
$$(* R *)_{\alpha\beta,\lambda\mu} = \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} \eta_{\lambda\mu\rho\sigma} R^{\gamma\delta,\rho\sigma}$$

que j'appellerai respectivement, adjoint à gauche, adjoint à droite et biadjoint. R étant une double 2-forme symétrique, il est clair que

$$(* R)_{\alpha\beta,\lambda\mu} = (R *)_{\lambda\mu,\alpha\beta} \qquad (* R *)_{\alpha\beta,\lambda\mu} = (* R *)_{\lambda\mu,\alpha\beta}$$

Le biadjoint est donc, lui aussi, une double 2-forme symétrique. Par contre les deux adjoints ne le sont pas en général. Nous verrons dans un instant quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'ils le soient.

b. Le tenseur de courbure et son biadjoint sont liés par la relation due à LANCZOS [5] :

(2) $$(* R *)_{\alpha\beta,\lambda\mu} + R_{\alpha\beta,\lambda\mu} = B_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} + B_{\beta\mu} g_{\alpha\lambda} - B_{\alpha\mu} g_{\beta\lambda} - B_{\beta\lambda} g_{\alpha\mu}$$

où $B_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} R\, g_{\alpha\beta}$

si $R_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$, on a $B_{\alpha\beta} = 0$. Donc

(2') $$(* R *)_{\alpha\beta,\lambda\mu} + R_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0 \qquad .$$

La réciproque est aussi vraie. Si on a (2'), $R_{\alpha\beta}$ est proportionnel au tenseur métrique. On peut énoncer le résultat suivant : pour que l'on ait $R_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$ il faut et il suffit que le biadjoint coïncide avec le tenseur de courbure au signe près. D'où le corollaire suivant : pour que l'on ait

$R_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$ il faut et il suffit que l'adjoint à gauche soit égal à l'adjoint à droite. En effet de (2'), il vient

$$[*\,(*\,R\,*)]_{\alpha\beta,\lambda\mu} + (*\,R)_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0$$

or $*\,* = -1$. Donc :

$$(2'') \qquad -\,(R\,*)_{\alpha\beta,\lambda\mu} + (*\,R)_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0 \qquad .$$

La réciproque est tout aussi simple à démontrer. Dans le cas $R_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$ je poserai par la suite

$$(*\,R)_{\alpha\beta,\lambda\mu} = (R\,*)_{\alpha\beta,\lambda\mu} \equiv \overset{*}{R}_{\alpha\beta,\lambda\mu}$$

$\overset{*}{R}$ est une double 2-forme symétrique. Je l'appellerai l'adjoint de R .

Des relations de définition (1) il vient

$$(3) \quad (*\,R)^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\mu} = (R\,*)^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\mu} = 0 \qquad (*\,R\,*)^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\mu} = S^{\beta}_{\mu}$$

où $S^{\beta}_{\mu} = R^{\beta}_{\mu} - \frac{1}{2} R\, g^{\beta}_{\mu}$

6. Les scalaires fondamentaux.

Au tenseur de courbure on peut attacher six scalaires. Trois du deuxième degré et trois du troisième degré.

$$A = \frac{1}{8} R^{\alpha\beta}{}_{,\lambda\mu} R^{\lambda\mu}{}_{,\alpha\beta} = \frac{1}{2} H^{I}{}_{J} H^{J}{}_{I}$$

$$B = \frac{1}{8} R^{\alpha\beta}{}_{,\lambda\mu} (*\,R)^{\lambda\mu}{}_{,\alpha\beta} = \frac{1}{2} H^{I}{}_{J} (*\,H)^{J}{}_{I}$$

$$C = \frac{1}{8} R^{\alpha\beta}{}_{,\lambda\mu} (*\,R\,*)^{\lambda\mu}{}_{,\alpha\beta} = \frac{1}{2} H^{I}{}_{J} (*\,H\,*)^{J}{}_{I}$$

$$D = \frac{1}{16} R^{\alpha\beta}{}_{,\lambda\mu} R^{\lambda\mu}{}_{,\rho\sigma} R^{\rho\sigma}{}_{,\alpha\beta} = \frac{1}{2} H^{I}{}_{J} H^{J}{}_{K} H^{K}{}_{I}$$

$$E = \frac{1}{16} R^{\alpha\beta}{}_{,\lambda\mu} R^{\lambda\mu}{}_{,\rho\sigma} (*\,R)^{\rho\sigma}{}_{,\alpha\beta} = \frac{1}{2} H^{I}{}_{J} H^{J}{}_{K} (*\,H)^{K}{}_{I}$$

$$F = \frac{1}{16} R^{\alpha\beta}{}_{,\lambda\mu} R^{\lambda\mu}{}_{,\rho\sigma} (*\,R\,*)^{\rho\sigma}{}_{,\alpha\beta} = \frac{1}{2} H^{I}{}_{J} H^{J}{}_{K} (*\,H\,*)^{K}{}_{I}$$

Tous les autres scalaires du même type qu'on peut former coïncident soit exactement, soit au signe près avec ces six scalaires. Si $R_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$ de (2') il vient

$$C = - A \qquad F = - D$$

7. <u>Tenseurs associés à une direction de temps.</u>

a. Considérons un vecteur $\vec{u}$ de carré $+1$. A ce vecteur et au tenseur de courbure on peut associer les quatre tenseurs :

(4)

$$X(\vec{u}) : X_{\alpha\lambda} = (* R *)_{\alpha\beta,\lambda\mu} u^{\beta} u^{\mu} \qquad Y(\vec{u}) : Y_{\alpha\lambda} = R_{\alpha\beta,\lambda\mu} u^{\beta} u^{\mu}$$

$$Z(\vec{u}) : Z_{\alpha\lambda} = -(* R)_{\alpha\beta,\lambda\mu} u^{\beta} u^{\mu} \qquad Z'(\vec{u}) : Z'_{\alpha\lambda} = -(R *)_{\alpha\beta,\lambda\mu} u^{\beta} u^{\mu}$$

$X(\vec{u})$ et $Y(\vec{u})$ sont manifestement symétriques. De (2) il vient :

(5) $$Z_{\alpha\lambda} = Z'_{\lambda\alpha}$$

b. Ces quatre tenseurs sont des tenseurs d'espace dans ce sens qu'ils admettent tous le vecteur $\vec{u}$ comme vecteur propre correspondant à la valeur propre zéro. Ainsi, pour un repère orthonormé tel que $\vec{e}_{0|} = \vec{u}$, on a, par exemple

$$Z_{0\lambda} = Z_{\lambda 0} = 0$$

et par conséquent

$$Z_{\alpha\lambda} Z^{\alpha\lambda} = Z_{ij} Z^{ij} = \sum_{i,j} (Z_{ij})^2 \geqslant 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Le carré spatio-temporel de chacun d'eux est strictement positif sauf si le tenseur correspondant est nul.

De (3) il vient

$$X^{\alpha}{}_{\alpha} = S_{\beta\mu} u^{\beta} u^{\mu} \qquad Y^{\alpha}{}_{\alpha} = R_{\beta\mu} u^{\beta} u^{\mu} \qquad Z^{\alpha}{}_{\alpha} = Z'^{\alpha}{}_{\alpha} = 0$$

si $R_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$, on a, d'après (2') et (2")

(5') $$Y(\vec{u}) = - X(\vec{u}) \qquad Z(\vec{u}) = Z'(\vec{u})$$

Z est donc lui aussi, dans ce cas, symétrique. En outre

$$Y^{\alpha}{}_{\alpha} = \lambda$$

c. Soit $\vec{e}_{\alpha|}$ un repère orthonormé tel que $\vec{e}_{0|} = \vec{u}$. On a les résultats suivants :

$$(H_{IJ}) = \begin{pmatrix} (X_{ij}) & (Z_{ij}) \\ (Z'_{ij}) & (Y_{ij}) \end{pmatrix} \qquad (* H *)_{IJ} = \begin{pmatrix} (Y_{ij}) & (-Z'_{ij}) \\ (-Z_{ij}) & (X_{ij}) \end{pmatrix}$$

(6)

$$((* H)_{IJ}) = \begin{pmatrix} (Z'_{ij}) & (Y_{ij}) \\ (-X_{ij}) & (-Z_{ij}) \end{pmatrix} \qquad ((H *)_{IJ}) = \begin{pmatrix} (Z_{ij}) & (-X_{ij}) \\ (Y_{ij}) & (-Z'_{ij}) \end{pmatrix}$$

Nous voyons, ainsi, que si les quatre tenseurs X, Y, Z et Z' sont nuls le tenseur de courbure lui-même est nul. D'où le corollaire suivant : si deux doubles 2-formes admettent pour un certain $\vec{u}$ mêmes tenseurs associés elles coïncident. On peut, donc, dire qu'ils caractérisent la double 2-forme.

Les relations (6) permettent le calcul explicite des scalaires fondamentaux. Nous verrons tout à l'heure quelle est cette forme explicite pour le cas $R_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$.

8. Le tenseur $T^{\alpha\beta,\lambda\mu}$.

a. Considérons les identités de Bianchi

(7) $$\underset{\alpha,\gamma,\delta}{S} \nabla_\alpha R_{\gamma\delta,\rho\sigma} = 0$$

En contractant α et ρ nous trouvons le résultat bien connu

(8) $$\nabla_\alpha R_{\gamma\delta,}{}^{\alpha}{}_{\sigma} = J_{\gamma\delta,\sigma}$$

où $J_{\gamma\delta;\sigma} = \nabla_\gamma R_{\delta\sigma} - \nabla_\delta R_{\gamma\sigma}$

D'autre part, η étant à dérivée covariante nulle, les identités (7) sont équivalentes à :

$$\nabla_\alpha (* R)^{\beta\alpha}{}_{,\rho\sigma} = 0$$

ou encore

(9) $$\nabla_\alpha (* R *)^{\beta\alpha,\lambda\mu} = 0$$

b. Comme conséquences de (8) et (9) nous avons :

$$R_{\beta\rho,}{}^{\mu}{}_{\sigma} \nabla_{\alpha} R^{\alpha\rho,\lambda\sigma} = R_{\beta\rho,}{}^{\mu}{}_{\sigma} J^{\lambda\sigma,\rho}$$

$$(* R *)_{\beta\rho,}{}^{\mu}{}_{\sigma} \nabla_{\alpha} (* R *)^{\alpha\rho,\lambda\sigma} = 0$$

En intégrant par parties les premiers membres on obtient deux relations qui permettent, après un calcul un peu long, de trouver le résultat suivant :

(10) $$\nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta,\lambda\mu} = L^{\lambda\mu,\beta}$$

où

$$T^{\alpha\beta,\lambda\mu} \equiv R^{\alpha\rho,\lambda\sigma} R^{\beta}{}_{\rho,}{}^{\mu}{}_{\sigma} + R^{\alpha\rho,\mu\sigma} R^{\beta}{}_{\rho,}{}^{\lambda}{}_{\sigma}$$

$$+ (* R *)^{\alpha\rho,\lambda\sigma} (* R *)^{\beta}{}_{\rho,}{}^{\mu}{}_{\sigma} + (* R *)^{\alpha\rho,\mu\sigma} (* R *)^{\beta}{}_{\rho,}{}^{\lambda}{}_{\sigma} - 2Ag^{\alpha\beta} g^{\lambda\mu}$$

$$L^{\lambda\mu,\beta} \equiv R^{\beta}{}_{\rho,}{}^{\mu}{}_{\sigma} J^{\lambda\sigma,\rho} + R^{\beta}{}_{\rho,}{}^{\lambda}{}_{\sigma} J^{\mu\sigma,\rho}$$

$$+ \frac{1}{2}[(* R *)_{\alpha\rho,}{}^{\lambda}{}_{\sigma} G^{\alpha\beta\rho,\mu\sigma} + (* R *)_{\alpha\rho,}{}^{\mu}{}_{\sigma} G^{\alpha\beta\rho,\lambda\sigma}]$$

avec

$$G_{\alpha\beta\rho,\sigma\mu} = \underset{\alpha,\beta,\rho}{S} \nabla_{\alpha} (* R *)_{\beta\rho,\sigma\mu}$$

T et L possèdent les propriétés de symétrie

$$T^{\alpha\beta,\lambda\mu} = T^{\beta\alpha,\lambda\mu} = T^{\alpha\beta,\mu\lambda} = T^{\lambda\mu,\alpha\beta} \qquad ,$$

$$L^{\lambda\mu,\beta} = L^{\mu\lambda,\beta} \qquad .$$

Si $R_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$, L est nul puisque J est nul et G aussi d'après (2') et (7). Donc

(10') $$\nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0 \qquad .$$

9. <u>Le scalaire</u> $V(\vec{u})$

Soit encore $\vec{u}$ un vecteur de carré + 1 , et considérons le scalaire

$$V(\vec{u}) : V = T^{\alpha\beta,\lambda\mu} u_{\alpha} u_{\beta} u_{\lambda} u_{\mu} \qquad .$$

En termes de tenseurs associés on a :

$$V = X_{\alpha\beta} X^{\alpha\beta} + Y_{\alpha\beta} Y^{\alpha\beta} + Z_{\alpha\beta} Z^{\alpha\beta} + Z'_{\alpha\beta} Z'^{\alpha\beta} \qquad .$$

Ce scalaire est doué de propriétés intéressantes. En effet, puisque le carré spatio-temporel de chacun des quatre tenseurs est positif ou nul, et n'est nul que si le tenseur correspondant est nul, on a :

$$V(\vec{u}) \geqslant 0$$

l'égalité ne se produisant que si $X = Y = Z = Z' = 0$, c'est-à-dire que si $R_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0$

10. Le vecteur $\vec{P}(\vec{u})$.

Considérons encore un vecteur $\vec{u}$ de carré $+1$. A ce vecteur et au tenseur T nous pouvons associer le vecteur

$$\vec{P}(\vec{u}) : P_\alpha = (g^\rho_\alpha - u_\alpha u^\rho)\, T_{\rho\beta,\lambda\mu}\, u^\beta u^\lambda u^\mu$$

Manifestement $u^\alpha P_\alpha = 0$: $P(\vec{u})$ est orthogonal à $\vec{u}$. Il est donc orienté dans l'espace. Si $\vec{P}(\vec{u})$ est nul, de sa définition même il vient

$$T_{\alpha\beta,\lambda\mu}\, u^\beta u^\lambda u^\mu = V(\vec{u})\, u_\alpha$$

2e partie : Définition d'un état de radiation gravitationnelle intrinsèque

11. Etude algébrique d'une double 2-forme symétrique.

Dans toute cette deuxième partie, je supposerai que $R_{\alpha\beta} = 0$. Il est très facile de voir que ceci ne représente aucune perte de généralité vis-à-vis du cas $R_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$.

a. Je me propose tout d'abord de signaler les résultats auxquels conduit l'étude de l'équation

$$\Delta \equiv \text{dét}\, |H^I{}_J - \rho\delta^I{}_J| = 0$$

Compte tenu de (5') et (6), elle peut s'écrire aussi

$$\Delta = \text{dét} \begin{vmatrix} (-X^i_j - \rho\delta^i_j) & (-Z^i_j) \\ (Z^i_j) & (-X^i_j - \rho\delta^i_j) \end{vmatrix} = 0$$

[Le changement de signe tient aux signatures respectives de l'espace $(-,-,-)$ et de $T_x^{\Lambda(2)}$ $(+,+,+,-,-,-)$].

Un calcul simple montre que

$$\Delta = \text{dét}\,|X^k_j + iZ^k_j + \rho\delta^k_j|\ \text{dét}\,|X^k_j - iZ^k_j + \rho\delta^k_j|$$

Pour calculer Δ il suffit, donc, de calculer $\delta = \text{dét}\,|X^k_j + iZ^k_j + \rho\delta^k_j|$

b. La matrice $-\mathcal{H} = (X^k_j + iZ^k_j)$ caractérise complètement la double 2-forme R , et nous voyons que le problème de la recherche des valeurs propres de la matrice $(H^I{}_J)$ se ramène à la recherche des valeurs propres de la matrice $\mathcal{H}$. En outre on a :

$$\text{tr}\,\mathcal{H} = 0 \qquad \text{tr}\,\mathcal{H}^2 = A + iB \qquad \text{tr}\,\mathcal{H}^3 = D + iE$$

c'est-à-dire :

$$A = X^\alpha{}_\beta\ X^\beta{}_\alpha - Z^\alpha{}_\beta\ Z^\beta{}_\alpha \qquad\qquad B = 2X^\alpha{}_\beta\ Z^\beta{}_\alpha$$

$$D = 3Z^\alpha{}_\beta\ Z^\beta{}_\gamma\ X^\gamma{}_\alpha - X^\alpha{}_\beta\ X^\beta{}_\gamma\ X^\gamma{}_\alpha \qquad E = Z^\alpha{}_\beta\ Z^\beta{}_\gamma\ Z^\gamma{}_\alpha - 3X^\alpha{}_\beta\ X^\beta{}_\gamma\ Z^\gamma{}_\alpha$$

c. Revenons à l'équation $\delta = 0$. Un calcul qui est un peu long, mais qui ne présente aucune difficulté conduit au résultat suivant

$$\delta = \rho^3 - \frac{1}{2}\rho(A + iB) - \frac{1}{3}(D + iE) = 0$$

soient Z_1 , Z_2 et Z_3 les racines de cette équation. On démontre aisément que

(11) $$\sum Z_i = 0 \qquad \sum Z_i^2 = A + iB \qquad \sum Z_i^3 = D + iE$$

d. Au point de vue de la multiplicité des valeurs propres on peut distinguer trois cas :

1er cas : Z_1 , Z_2 , $Z_3 \neq$: les trois valeurs propres sont différentes

2e cas : $Z = Z_2 = Z_3$, $Z_1 = -2Z$: une des valeurs propres est double

3e cas : $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0$: les trois valeurs propres sont confondues; elles sont donc nécessairement nulles.

Ces trois cas peuvent être caractérisés en termes de scalaires grâce aux relations (11). Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait un cas 2 est que

$$(A + iB)^3 = 6(D + iE)^2$$

et pour que l'on ait un cas 3 il faut et il suffit que

$$A = B = D = E = 0 \quad .$$

e. Des considérations sur les vecteurs propres, c'est-à-dire, sur les solutions de

$$(H^I{}_J - \rho\delta^I{}_J)\ F^J = 0$$

conduisent à subdiviser chacun des cas 2 et 3 en deux cas différents. Je donne ci-après les formes réduites que peut prendre la matrice $\mathcal{H}$ pour des repères orthonormés convenables dans les cinq cas que je viens de distinguer et je signale quelques particularités relatives à chaque cas

Cas 1

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 + i\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 + i\beta_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \sum_i(\alpha_i + i\beta_i) = 0 \\ \\ \alpha_1 + i\beta_1 \,,\, \alpha_2 + i\beta_2 \,,\, \alpha_3 + i\beta_3 \neq \end{array}$$

Le repère orthonormé est complètement fixé.

Cas 2a

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} -2(\alpha + i\beta) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + i\beta \end{pmatrix}$$

Le repère orthonormé est indéterminé à deux rotations près : une dans le 2-plan 2 - 3 , l'autre dans le 2-plan 0 - 1 . Les deux vecteurs isotropes $\vec{l} = \vec{e}_{0|} + \vec{e}_{1|}$ et $\vec{m} = \vec{e}_{0|} - \vec{e}_{1|}$ satisfont aux relations :

$$R_{\alpha\beta,\lambda\mu}\, l^\alpha\, l^\lambda = 2\alpha\, l_\beta\, l_\mu \qquad \overset{*}{R}_{\alpha\beta,\lambda\mu}\, l^\alpha\, l^\lambda = 2\beta\, l_\beta\, l_\mu$$

$$R_{\alpha\beta,\lambda\mu}\, m^\alpha\, m^\lambda = 2\alpha\, m_\beta\, m_\mu \qquad \overset{*}{R}_{\alpha\beta,\lambda\mu}\, m^\alpha\, m^\lambda = 2\beta\, m_\beta\, m_\mu$$

$$T_{\alpha\beta,\lambda\mu}\, l^\beta\, l^\lambda\, l^\mu = 0 \qquad T_{\alpha\beta,\lambda\mu}\, m^\beta\, m^\lambda\, m^\mu = 0$$

Cas 2b

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} -2(\alpha + i\beta) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + i\beta - \sigma + i\rho & \rho + i\sigma \\ 0 & \rho + i\sigma & \alpha + i\beta + \sigma - i\rho \end{pmatrix}$$

Le repère est indéterminé au même degré que dans le cas précédent. Il existe un seul vecteur isotrope, le vecteur $\vec{\ell} = \vec{e}_{0|} + \vec{e}_{1|}$, tel que

$$R_{\alpha\beta,\lambda\mu}\,\ell^{\alpha}\,\ell^{\lambda} = 2\alpha\,\ell_{\beta}\,\ell_{\mu} \qquad \overset{*}{R}_{\alpha\beta,\lambda\mu}\,\ell^{\alpha}\,\ell^{\lambda} = 2\beta\,\ell_{\beta}\,\ell_{\mu}$$

$$T_{\alpha\beta,\lambda\mu}\,\ell^{\beta}\,\ell^{\lambda}\,\ell^{\mu} = 0$$

Cas 3a

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma + i\rho & \rho + i\sigma \\ -\sigma + i\rho & 0 & 0 \\ \rho + i\sigma & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Même indétermination pour le repère que dans le cas 2. Le vecteur $\vec{\ell} = \vec{e}_{0|} + \vec{e}_{1|}$ satisfait les relations

$$R_{\alpha\beta,\lambda\mu}\,\ell^{\alpha}\,\ell^{\lambda} = 0 \qquad \overset{*}{R}_{\alpha\beta,\lambda\mu}\,\ell^{\alpha}\,\ell^{\lambda} = 0$$

$$T_{\alpha\beta,\lambda\mu}\,\ell^{\alpha}\,\ell^{\lambda} = 0 \qquad T_{\alpha\beta,\lambda\mu}\,\ell^{\lambda}\,\ell^{\mu} = 0$$

Cas 3b

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma + i\rho & \rho + i\sigma \\ 0 & \rho + i\sigma & \sigma - i\rho \end{pmatrix}$$

La double 2-forme R est singulière au sens de A. LICHNEROWICZ [6] c'est-à-dire qu'il existe un vecteur isotrope, ici le vecteur $\vec{\ell} = \vec{e}_{0|} + \vec{e}_{1|}$, tel que

$$R_{\alpha\beta,\lambda\mu}\,\ell^{\alpha} = 0 \qquad \overset{*}{R}_{\alpha\beta,\lambda\mu}\,\ell^{\alpha} = 0$$

d'où il vient

$$T_{\alpha\beta,\lambda\mu}\,\ell^{\lambda} = 0$$

D'ailleurs

$$T_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 8(\sigma^{2} + \rho^{2})\,\ell_{\alpha}\,\ell_{\beta}\,\ell_{\lambda}\,\ell_{\mu}$$

Le repère est seulement astreint à être tel que $\vec{\ell} = \vec{e}_{0|} + \vec{e}_{1|}$.

Cette classification est due essentiellement à PETROV [7], mais elle a été établie ici sous un principe de classification différent.

12. Première définition.

Soit $\vec{e}_{\alpha|}$ un repère orthonormé, tel que $\vec{e}_{0|} = \vec{u}$. Si on interprète le scalaire $V(\vec{u})$ comme étant la densité d'énergie gravitationnelle relative à ce repère, le vecteur $\vec{P}(\vec{u})$ est alors le vecteur flux d'énergie gravitationnelle. Un raisonnement analogue à celui que j'ai fait pour le cas électromagnétique nous amène, ainsi, à décrire un état de radiation gravitationnelle intrinsèque par une double 2-forme symétrique R telle que $\vec{P}(\vec{u}) \neq 0$ quel que soit $\vec{u}$. On peut se demander quelle relation existe entre cette définition et la classification du paragraphe précédent. La réponse est simple, car on peut démontrer que si $\vec{P}(\vec{u}) = 0$, R est nécessairement du type 1 ou 2a. Ainsi pour que l'on ait un état de radiation gravitationnelle intrinsèque il faut et il suffit que R soit du type 2b ou 3. PIRANI est parvenu à la même conclusion bien qu'inspiré par des considérations d'un tout autre genre [8].

13. Deuxième définition.

Par analogie avec le cas électromagnétique on peut se demander si un état de radiation gravitationnelle intrinsèque peut être caractérisé par une double 2-forme symétrique ayant tous les scalaires fondamentaux nuls. Les résultats du paragraphe 11 montrent qu'une telle définition est plus restrictive que la précédente dans ce sens que R doit être nécessairement du type 3.

14. Troisième définition.

A. LICHNEROWICZ a proposé de décrire un état de radiation gravitationnelle intrinsèque et pure par une double 2-forme R symétrique et singulière [6]. R est alors nécessairement du type 3b. Cette définition est la plus restrictive des trois que je viens de considérer. C'est en adoptant cette troisième définition que l'analogie entre le phénomène de la radiation gravitationnelle et celui de la radiation électromagnétique peut être poussée plus loin. Je rappelle que cette définition a son origine et trouve sa justification dans l'étude des discontinuités du tenseur de courbure.

15. Les rayons gravitationnels.

Nous avons vu que dans les cas 2b et 3 il existe un vecteur $\vec{\ell}$ isotrope satisfaisant des relations qui caractérisent le type de R. Un calcul qui est un peu long et qui est différent pour chaque cas montre que les trajectoires de $\vec{\ell}$ sont des géodésiques isotropes, ce qui donne une interprétation satisfaisante des rayons gravitationnels comme étant les géodésiques de longueur nulle de la métrique.

Je signale aussi que dans le cas 2a, aussi bien les trajectoires de $\vec{\ell}$ que celles de $\vec{m}$ sont des géodésiques isotropes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEL (Louis). - Définition d'une densité d'énergie et d'un état de radiation totale généralisée, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 246, 1958, p. 3015-3018.

[2] BEL (Louis). - Etude algébrique d'un certain type de tenseur de courbure, Le cas 3 de Petrov, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 247, 1958, p. 2096-2099.

[3] BEL (Louis). - Introduction d'un tenseur du quatrième ordre, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 1297-1300.

[4] BEL (Louis). - Quelques remarques sur la classification de Petrov, Etude du cas 2, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 2561-2563.

[5] LANCZOS (Cornelius). - A remarkable property of the Riemann-Christoffel tensor in four dimensions, Annals of Math., Series 2, t. 39, 1938, p. 842-850.

[6] LICHNEROWICZ (André). - Ondes électromagnétiques et ondes gravitationnelles en relativité générale, Cahiers de Phys., n° 96, 1958, p. 287-296.

[7] PETROV (A. Z.). - Classification des espaces définissant des champs gravitationnels [en russe], Kazan Gos. Univ. Uč. Zap., t. 114, 1954, p. 55-69.

[8] PIRANI (F. A. E.). - Invariant formulation of gravitational radiation theory, Phys. Rev., Series 2, t. 105, 1957, p. 1089-1099.