Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

André Lichnerowicz

Radiation gravitationnelle

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 2 (1958-1959), exp. nº 11, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1958-1959__2__A11_0>

RADIATION GRAVITATIONNELLE

par André LICHNEROWICZ

L'un des problèmes les plus importants de la théorie relativiste de la gravitation est relatif à la définition et aux propriétés des ondes et radiations gravitationnelles. Dans le cadre de la relativité restreinte, une théorie satisfaisante des ondes et radiations électromagnétiques a été élaborée. Dans la première partie de cette conférence, je montrerai comment cette théorie peut être adaptée à la relativité générale. Cette adaptation nous servira de modèle pour l'étude, dans la seconde partie, du cas gravitationnel.

I. Champ électromagnétique

1. Généralités.

Dans toute théorie relativiste de la gravitation, l'élément primitif est constitué par une variété différentiable de dimension 4, la variété espace-temps V_4. Par hypothèse, sa structure différentiable est $(C^2, C^4$ par morceaux). Sur V_4, nous avons une métrique riemannienne de type hyperbolique normal

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad (\alpha, \beta, \ldots = 0, 1, 2, 3)$$

qui est partout de classe $(C^2, C^3$ par morceaux). Toute précision supplémentaire de la structure différentiable de la variété et de la métrique est dépourvue de signification physique.

Un champ électromagnétique est défini dans V_4 par une 2-forme $F_{\alpha\beta}$ qui est de classe $(C^0, C^2$ par morceaux) et qui satisfait les équations de Maxwell :

$$(1.1) \qquad \underset{\alpha\beta\gamma}{S}\, \nabla_\alpha F_{\beta\gamma} = 0 \qquad \nabla_\beta F^{\beta\alpha} = J^\alpha$$

où ∇ désigne la dérivation covariante, S la sommation après permutation circulaire sur les indices α, β, γ et J^α le vecteur-courant électrique.

Si u^{α} est un vecteur unitaire définissant une direction de temps, les vecteurs champ électrique et champ magnetique défini par $F_{\alpha\beta}$ relativement à cette direction de temps sont respectivement :

(1.2) $$E^{\beta} = F^{\alpha\beta} u_{\alpha} \qquad H^{\beta} = - F^{\star\alpha\beta} u_{\alpha}$$

où $F^{\star\alpha\beta}$ est le 2-tenseur antisymétrique adjoint de $F^{\alpha\beta}$. Les vecteurs E^{β} et H^{β} sont des vecteurs d'espace c'est-à-dire sont orthogonaux à u^{β}.

2. 2-forme singulière.

Sur une variété riemannienne V_n admettant une métrique hyperbolique normale, considérons une 2-forme $F \neq 0$ telle qu'il existe un vecteur $\vec{\ell}$ pour lequel :

(2.1) $$S\ \ell_{\alpha} F_{\beta\gamma} = 0 \qquad \ell^{\alpha} F_{\alpha\beta} = 0$$

S'il en est ainsi, la forme F sera dite singulière et $\vec{\ell}$ un vecteur fondamental de F ; $\vec{\ell}$ est nécessairement isotrope : sinon, nous pourrions introduire un repère orthonormé tel que $\vec{\ell}$ soit l'un des vecteurs du repère et (2.1) implique alors $F = 0$; il en résulte aussi que $\vec{\ell}$ est bien défini à un facteur scalaire près.

Supposons maintenant $n = 4$. Soit $\vec{n}^{(1)}$, $\vec{n}^{(2)}$ deux vecteurs orthogonaux de carré -1 situés dans le 3-plan tangent au cône isotrope le long de $\vec{\ell}$. Il est possible de construire un repère orthonormé $(\vec{\ell}_{\alpha})$ tel que :

$$\frac{\vec{\ell}}{\ell^0} = \vec{\ell}_0 + \vec{\ell}_3 \qquad \vec{\ell}_1 = \vec{n}^{(1)} \qquad \vec{\ell}_2 = \vec{n}^{(2)} \qquad (\vec{\ell}_0^{\,2} = 1) .$$

Si nous écrivons dans ce repère les équations (2.1), nous obtenons :

(2.2) $$F_{\alpha\beta} = \sum_i a_i (\ell_{\alpha} n_{\beta}^{(i)} - \ell_{\beta} n_{\alpha}^{(i)}) \qquad (i = 1 , 2)$$

où les a_i sont des scalaires arbitraires ; (2.2) traduit ce que les physiciens appellent le double état de polarisation de F. Si F et $\vec{\ell}$ sont donnés, les a_i sont invariants par la transformation $\vec{n}^{(i)} \rightarrow \vec{n}^{(i)} + k\,\vec{\ell}$ et définissent un vecteur par rapport aux rotations du couple $(\vec{n}^{(1)}, \vec{n}^{(2)})$ dans leur 2-plan.

Si nous posons :

$$b_{\alpha} = \sum_i a_i\, n_{\alpha}^{(i)}$$

nous voyons qu'il existe un vecteur b_α orthogonal à ℓ_α, tel que

$$F_{\alpha\beta} = \ell_\alpha b_\beta - \ell_\beta b_\alpha \tag{2.3}$$

Ce vecteur est défini à la transformation $b_\alpha \rightarrow b_\alpha + k\,\ell_\alpha$ près. Le scalaire positif :

$$e_F = - b^\alpha b_\alpha = \sum_i (a_i)^2 \tag{2.4}$$

dépend seulement de F et de $\vec{\ell}$.

3. Discontinuités des dérivées du champ électromagnétique.

a. Considérons un champ électromagnétique satisfaisant les équations de Maxwell avec un courant électrique continu ; $F_{\alpha\beta}$ étant de classe (C^0, C^2 par morceaux) étudions les hypersurfaces S à la traversée desquelles les dérivées premières du champ sont discontinues ainsi que la structure de ces discontinuités. Si $f(x^2) = 0$ est l'équation locale de S, nous posons $\ell_\alpha = \partial_\alpha f$; le symbole [...] représentera la discontinuité d'une quantité à travers S. Des conditions de Hadamard, il résulte qu'il existe aux points de S un tenseur antisymétrique φ tel que :

$$[\nabla_\gamma F_{\alpha\beta}] = \varphi_{\alpha\beta}\,\ell_\gamma \tag{3.1}$$

Les équations de Maxwell montrent que φ est une 2-forme singulière de vecteur fondamental $\vec{\ell}$; $\vec{\ell}$ étant ainsi nécessairement isotrope, S satisfait

$$\Delta_1 f = g^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha f\,\partial_\beta f = 0$$

c'est-à-dire est tangent en chacun de ses points au cône isotrope en ce point. De plus de

$$\nabla_\beta \ell_\alpha - \nabla_\alpha \ell_\beta = 0$$

il suit :

$$\ell^\beta(\nabla_\beta \ell_\alpha - \nabla_\alpha \ell_\beta) = 0$$

et $\vec{\ell}$ étant isotrope :

$$\ell^\beta \nabla_\beta \ell_\alpha = 0$$

Les trajectoires du champ $\vec{\ell}$ de S sont des géodésiques isotropes. Nous avons ainsi obtenu dans V_4 les fronts d'onde et rayons électromagnétiques.

b. Supposons $J^\alpha = 0$. Sous cette hypothèse, on peut déduire des équations de Maxwell que les discontinuités du tenseur dérivé du champ électromagnétique et les discontinuités du tenseur de courbure relatives à S satisfont les relations différentielles :

(3.2) $$2\,\ell^\rho\,\nabla_\rho\,[\nabla_\gamma F_{\alpha\beta}] + (\nabla_\rho \ell^\rho)\,[\nabla_\gamma F_{\alpha\beta}] - 2\,\ell^\rho\,F_\rho{}^\sigma [R_{\sigma\gamma,\alpha\beta}] = 0\,.$$

Si le tenseur de courbure de V_4 est continu à la traversée de S, nous avons

(3.3) $$2\,\ell^\rho\,\nabla_\rho\,[\nabla_\gamma F_{\alpha\beta}] + (\nabla_\rho \ell^\rho)\,[\nabla_\gamma F_{\alpha\beta}] = 0$$

soit :

(3.4) $$2\,\ell^\rho\,\nabla_\rho\,\varphi_{\alpha\beta} + (\nabla_\rho \ell^\rho)\,\varphi_{\alpha\beta} = 0$$

les relations mettent en évidence la propagation des discontinuités le long des géodésiques isotropes de S. Si $\varphi_{\alpha\beta} = 0$ en un point x de S, il en est de même en tous les points de la géodésique isotrope S issue de x.

Il existe un vecteur b_α orthogonal à ℓ_α tel que :

(3.5) $$\varphi_{\alpha\beta} = \ell_\alpha\,b_\beta - \ell_\beta\,b_\alpha$$

Après substitution de (3.5) dans (3.4) et multiplication par b^α, nous obtenons :

$$2\,\ell^\rho\,b^\alpha\,\nabla_\rho\,b_\alpha + (\nabla_\rho\,\ell^\rho)\,b^\alpha\,b_\alpha = 0\,.$$

Soit l'identité de conservation :

(3.6) $$\nabla_\rho\,(e_\varphi\,\ell^\rho) = 0 \qquad (e_\varphi = -\,b^\alpha\,b_\alpha > 0)\,.$$

Notons que si F est donné, $\vec{\ell}$ est défini à un facteur scalaire près λ constant le long de la géodésique ; si $\vec{\ell} \to \lambda\vec{\ell}$ alors $e_\varphi \to \lambda^{-4}\,e_\varphi$ et (3.6) exprime que le tenseur d'ordre 4

(3.7) $$\tau^{[\nabla F]}_{\alpha\beta\lambda\mu} = e_\varphi\,\ell_\alpha\,\ell_\beta\,\ell_\lambda\,\ell_\mu$$

qui ne dépend que de F est convervatif :

(3.8) $$\nabla_\alpha\,(\tau^{[\nabla F]\alpha}{}_{\beta\lambda\mu}) = 0\,.$$

On vérifie immédiatement que $\tau^{[\nabla F]}_{\alpha\beta\lambda\mu}$ admet l'expression suivante :

(3.9) $$\tau^{[\nabla F]}_{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left\{ [\nabla_\alpha F^\rho{}_\lambda][\nabla_\beta F_{\rho\mu}] + [\nabla_\alpha F^\rho{}_\mu][\nabla_\beta F_{\rho\lambda}]\right.$$

4. Radiation électromagnétique pure.

Si $\tau_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Maxwell, le vecteur de Poynting associé à la direction de temps $\vec{u}$ est donné par :

$$P_\rho = (g^\alpha_\rho - u^\alpha u_\rho)\, \tau_{\alpha\beta}\, u^\beta$$

Pour que P_ρ soit nul, il faut et il suffit que $\vec{u}$ soit vecteur propre de $\tau_{\alpha\beta}$ par rapport à $g_{\alpha\beta}$. L'étude algébrique montre que deux cas se présentent : si F est non-singulière, il existe des vecteurs propres orientés dans le temps. Si F est singulière, les vecteurs propres de $\tau_{\alpha\beta}$ sont les vecteurs tangents au cône isotrope le long de $\vec{\ell}$ et :

(4.1) $$\tau_{\alpha\beta} = e_F\, \ell_\alpha\, \ell_\beta \qquad (e_F = -\, b^\alpha\, b_\alpha > 0)$$

Il n'est pas possible d'annuler P_ρ et il y a radiation intrinsèque d'énergie.

Nous sommes ainsi conduits à appeler radiation électromagnétique pure un champ électromagnétique défini par une forme singulière et satisfaisant aux équations de Maxwell du vide $(J^\alpha = 0)$. Des conditions de conservation

(4.2) $$\nabla_\alpha\, \tau^\alpha_\beta = 0$$

il résulte

$$\nabla_\alpha(e_F\, \ell^\alpha)\, \ell_\beta + e_F\, \ell^\alpha\, \nabla_\alpha\, \ell_\beta = 0 \ .$$

Les trajectoires du champ des vecteurs $\vec{\ell}$ sont autoparallèles, c'est-à-dire sont des géodésiques isotropes. On peut choisir le champ des vecteurs $\vec{\ell}$ de façon que :

(4.3) $$\ell^\alpha\, \nabla_\alpha \ell_\beta = 0$$

Pour ce choix, (4.2) est équivalent à (4.3) et :

(4.4) $$\nabla_\rho(e_F\, \ell^\rho) = 0 \quad ,$$

F étant fermée et $\vec{\ell}$ satisfaisant $\ell^\alpha F_{\alpha\beta}$, on voit immédiatement que F est invariant par la transformation infinitésimale définie par le champ des vecteurs $\vec{\ell}$. Ainsi :

(4.5) $$\ell^{\rho}\nabla_{\rho} F_{\alpha\beta} - \nabla_{\alpha}\ell_{\rho} F_{\beta}{}^{\rho} - \nabla_{\beta}\ell_{\rho} F^{\rho}{}_{\alpha} = 0 .$$

Si F est nulle en un point x de V_4, il en est de même en tous les points de la trajectoire de $\vec{\ell}$ issue de x.

II. Champ gravitationnel

5. Double 2-forme singulière.

J'appellerai double 2-forme un tenseur $H_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ admettant les propriétés de symétrie du tenseur de courbure d'une variété riemannienne

(5.1) $$H_{\alpha\beta,\lambda\mu} = -H_{\beta\alpha,\lambda\mu} = -H_{\alpha\beta,\mu\lambda} \qquad H_{\alpha\beta,\lambda\mu} = H_{\lambda\mu,\alpha\beta}$$

a. Supposons que par la double 2-forme $H \neq 0$ il existe un vecteur $\vec{\ell}$ tel que

(5.2) $$S\, \ell_{\gamma} H_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0$$

et

(5.3) $$\ell^{\alpha} H_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0$$

λ et μ étant fixés, les 2-formes au point x :

$$\Pi_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} H_{\alpha\beta,\lambda\mu}\, dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta}$$

sont singulières et admettent $\vec{\ell}$ comme vecteur principal. Ainsi $\vec{\ell}$ est nécessairement isotrope. H est appelée une double 2-forme singulière si (5.2) et (5.3) sont satisfaites.

Par contraction de (5.2), on obtient :

$$\ell^{\alpha} H_{\beta\gamma,\alpha\mu} = \ell_{\beta} H_{\gamma\mu} - \ell_{\gamma} H_{\beta\gamma} .$$

De (5.3) il résulte :

(5.4) $$H_{\alpha\beta} = \tau\, \ell_{\alpha} \ell_{\beta}$$

Inversement (5.2) et (5.4) entraînent (5.3).

b. Si nous introduisons les vecteurs $(\vec{n}^{(1)}, \vec{n}^{(2)})$ associés à $\vec{\ell}$, nous obtenons pour les 2-formes singulières $\Pi_{\lambda\mu}$ (λ, μ fixés)

$$H_{\alpha\beta,\lambda\mu} = \sum_{i} a_{(i)\lambda\mu}(\ell_{\alpha} n^{(i)}_{\beta} - \ell_{\beta} n^{(i)}_{\alpha})$$

Des propriétés de symétrie de H, il résulte que $a_{(i)\lambda\mu}$ $(i = 1, 2)$ définit une 2-forme singulière de vecteur fondamental $\vec{\ell}$ et :

$$a_{(i)\lambda\mu} = \sum_{i,j} a_{ij} (\ell_\lambda n^{(j)}_\mu - \ell_\mu n^{(j)}_\lambda) \qquad (i, j = 1, 2) .$$

Nous obtenons ainsi par une double 2-forme singulière une expression générale :

(5.5) $$H_{\alpha\beta,\lambda\mu} = \sum_{i,j} a_{ij}(\ell_\alpha n^{(i)}_\beta - \ell_\beta n^{(i)}_\alpha)(\ell_\lambda n^{(j)}_\mu - \ell_\mu n^{(j)}_\lambda) \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

On notera que :

$$\tau = -(a_{11} + a_{22})$$

c. Si nous posons

(5.6) $$b_{\alpha\lambda} = \sum_{i,j} a_{ij}\, n^{(i)}_\alpha\, n^{(j)}_\lambda$$

nous voyons que :

(5.7) $$H_{\alpha\beta,\lambda\mu} = b_{\alpha\lambda}\ell_\beta\ell_\mu + b_{\beta\mu}\ell_\alpha\ell_\lambda - b_{\alpha\mu}\ell_\beta\ell_\lambda - b_{\beta\lambda}\ell_\alpha\ell_\mu$$

où

(5.8) $$b_{\alpha\lambda}\ell^\lambda = 0$$

Il existe ainsi des quantités $b_{\alpha\lambda}$ symétriques satisfaisant (5.8) et telles que H s'exprime par (5.7); les quantités sont définies à la transformation près :

(5.9) $$b_{\alpha\lambda} \longrightarrow b_{\alpha\lambda} + t_\alpha \ell_\lambda + t_\lambda \ell_\alpha$$

où t_α est un vecteur arbitraire orthogonal à ℓ^α. Le scalaire :

$$e_H = b^{\alpha\lambda}\, b_{\alpha\lambda}$$

ne dépend que du tenseur H et du vecteur $\vec{\ell}$, c'est-à-dire est invariant par (5.9). Pour (5.6) nous avons :

$$e_H = \sum_{i,j} (a_{ij})^2$$

Ainsi e_H est positif et $e_H = 0$ entraîne $H = 0$. Si $\vec{\ell}$ est multiplié par λ, e_H est multiplié par λ^{-4}.

6. Discontinuités du tenseur de courbure.

Considérons un champ gravitationnel satisfaisant aux équations d'Einstein avec un tenseur d'impulsion énergie continu. La métrique étant de classe (C^1, C^3 par morceaux) étudions les hypersurfaces S pour lesquelles le tenseur de courbure est discontinu ainsi que la structure de ces discontinuités. Avec des notations semblables à celles du cas électromagnétique, nous avons :

(6.1) $$[R_{\alpha\beta}] = 0$$

a. Des conditions de Hadamard, il résulte qu'il existe, aux points de S, des quantités $u^{\lambda}_{\mu\beta}$ telles que, en coordonnées locales :

$$[\partial_\alpha \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}] = u^{\lambda}_{\mu\beta}\ell_\alpha \qquad (\ell_\alpha = \partial_\alpha f)$$

Les expressions des composantes du tenseur de courbure donnent :

(6.2) $$[R^{\lambda}_{\mu,\alpha\beta}] = u^{\lambda}_{\mu\beta}\ell_\alpha - u^{\lambda}_{\mu\alpha}\ell_\beta$$

De (6.2) on déduit :

(6.3) $$S\ \ell_\gamma [R_{\lambda\mu,\alpha\beta}] = 0$$

(6.1) et (6.3) montrent que $[R_{\alpha\beta,\lambda\mu}]$ définissent aux points de S une double 2-forme singulière; $\vec{\ell}$ est isotrope et nous obtenons ainsi les ondes et les rayons gravitationnels.

L'expression (5.5) ou (5.7) est valable pour $[R_{\alpha\beta,\lambda\mu}]$ avec :

$$a_{11} + a_{22} = 0 \qquad b_{\alpha}^{\alpha} = 0\ ;$$

ces expressions sont équivalentes à celle indiquée en termes de matrice par Pirani.

b. Supposons que le champ gravitationnel satisfasse aux équations d'Einstein :

(6.4) $$R_{\alpha\beta} = 0 .$$

Sous cette hypothèse, la discontinuité du tenseur de courbure à travers S satisfait les relations différentielles :

(6.5) $$2\,\ell^\rho \nabla_\rho [R_{\alpha\beta,\lambda\mu}] + (\nabla_\rho \ell^\rho)[R_{\alpha\beta,\lambda\mu}] = 0 .$$

Après substitution de (5.7) dans (6.5) et multiplication par $b^{\alpha\lambda}$, on obtient :

(6.6) $$\nabla_\rho (e_{[R]}\ \ell^\rho) = 0 \qquad (e_{[R]} = b^{\alpha\beta}\, b_{\alpha\beta} > 0)$$

Le tenseur d'ordre 4 :

(6.7) $$\tau^{[R]}_{\alpha\beta\lambda\mu} = e_{[R]}\, \ell_\alpha \ell_\beta \ell_\lambda \ell_\mu = \frac{1}{2}\left\{ [R^{\rho}_{\alpha,}{}^{\sigma}{}_{\lambda}][R_{\rho\beta,\sigma\mu}] + [R^{\rho}_{\alpha,}{}^{\sigma}{}_{\mu}][R_{\rho\beta,\sigma\lambda}] \right\}$$

qui dépend seulement du tenseur de courbure est conservatif d'après (6.6).

c. Supposons qu'il existe dans V_4 un champ électromagnétique satisfaisant aux équations de Maxwell du vide et relié au champ gravitationnel par les équations d'Einstein

$$R_{\alpha\beta} = \chi\, \tau_{\alpha\beta} \qquad (\tau_{\alpha\beta} \text{ tenseur de Maxwell}).$$

A la traversée de S les discontinuités du tenseur de courbure satisfont :

$$2\ell^\rho \nabla_\rho [R_{\alpha\beta,\lambda\mu}] + (\nabla_\rho \ell^\rho)[R_{\alpha\beta,\lambda\mu}] = \chi \ell_\lambda [\nabla_\alpha \tau_{\beta\mu} - \nabla_\beta \tau_{\alpha\mu}] - \chi \ell_\mu [\nabla_\alpha \tau_{\beta\lambda} - \nabla_\beta \tau_{\alpha\lambda}]$$

et celles du tenseur dérivé du champ électromagnétique à (3.2). On en déduit comme précédemment :

$$\nabla_\rho \left\{ (e_{[R]} + \chi\, e_\varphi)\, \ell^\rho \right\} = 0 .$$

Le tenseur d'ordre 4 :

$$\tau^{[R]}_{\alpha\beta\lambda\mu} + \chi\, \tau^{[\nabla F]}_{\alpha\beta\lambda\mu}$$

est conservatif.

7. Radiation gravitationnelle pure.

a. Nous sommes ainsi conduits à envisager les métriques pour lesquelles il existe un vecteur $\vec{\ell}$ tel que :

(7.1) $$S\, \ell_\gamma R_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0$$

et

(7.2) $$\ell^\alpha R_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0$$

Pour $R_{\alpha\beta,\lambda\mu} \neq 0$, ℓ_α est isotrope. Le tenseur de Ricci a la forme :

(7.3) $$R_{\alpha\beta} = \tau\, \ell_\alpha \ell_\beta$$

Si $\tau \neq 0$, nous dirons que la métrique correspond à un état de radiation totale pure ; si de plus $R_{\alpha\beta} = 0$ nous dirons que nous avons un état de radiation gravitationnelle pure.

b. de l'identité de Bianchi :

$$\nabla_\rho R_{\alpha\beta,\lambda\mu} + \nabla_\alpha R_{\beta\rho,\lambda\mu} + \nabla_\beta R_{\rho\alpha,\lambda\mu} = 0,$$

il résulte par multiplication par ℓ^ρ pour un état de radiation totale pure :

(7.4) $$\ell^\rho \nabla_\rho R_{\alpha\beta,\lambda\mu} - \nabla_\alpha \ell_\rho R_\beta{}^\rho{}_{,\lambda\mu} - \nabla_\beta \ell_\rho R^\rho{}_{\alpha,\lambda\mu} = 0$$

qui est analogue à (4.5).

Dans un domaine où $R_{\alpha\beta}$ est différent de zéro, il est clair que les trajectoires du champ des vecteurs $\vec{\ell}$ sont des géodésiques isotropes : cela est une conséquence du caractère conservatif du tenseur d'Einstein ; de (7.4) on déduit aisément que ce résultat est général. Considérons le tenseur :

$$P_{\alpha\beta,\lambda\mu} = \ell^\rho \nabla_\rho R_{\alpha\beta,\lambda\mu} \quad .$$

Il résulte de (7.4) :

$$\underset{\lambda\mu\nu}{S} \ell_\nu P_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0 \qquad\qquad \ell^\lambda P_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0$$

Ainsi $P_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ est une double 2-forme singulière. Si nous posons $\ell^\rho \nabla_\rho \ell_\alpha = m_\alpha$ on déduit de (7.1) et (7.2) :

$$S\, m_\alpha R_{\beta\gamma,\lambda\mu} + S\, \ell_\alpha P_{\beta\gamma,\lambda\mu} = 0 \qquad m^\alpha R_{\alpha\beta,\lambda\mu} + \ell^\alpha P_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0$$

$R_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ est singulier pour le vecteur principal $\vec{n}$ qui est nécessairement colinéaire à $\vec{\ell}$ et les trajectoires sont des géodésiques. Nous pouvons toujours supposer $\vec{\ell}$ choisi de façon que :

(7.5) $$\ell^\rho \nabla_\rho \ell^\alpha = 0$$

c. Il est aisé de construire des exemples de radiation. Considérons l'espace numérique R^4 avec les coordonnées :

$$t = x^0 \qquad x = x^1 \qquad y = x^2 \qquad z = x^3$$

et posons $u = t - x$, $v = t + x$. La métrique :

$$ds^2 = e^{2\psi}(dt^2 - dx^2) - (\zeta^2 dy^2 + \eta^2 dz^2) = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$$

où ψ, $\zeta > 0$, $\eta > 0$ sont des fonctions de la seule variable u, représente une radiation totale pure. Avec cette métrique considérons le potentiel-vecteur φ_α défini par :

$$\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \qquad \varphi_3 = \varphi(u) .$$

Le champ électromagnétique correspondant définit une radiation électromagnétique pure.

Si nous écrivons que τ correspond à l'énergie du champ électromagnétique, nous obtenons une relation entre ψ , φ , et ξ , η . Après un changement de coordonnées dont le principe est dû à Bondi, nous avons par exemple la métrique

$$ds^2 = du\,dv - (dy^2 + dz^2) - 2\beta'(u)(y\,dy - z\,dz - \frac{y^2-z^2}{u}du)du - \beta'^2(u)\,uv\,du^2$$
$$- (v - \frac{y^2+z^3}{u})\frac{1}{4u}e^{-2\beta(u)}\varphi'^2(u)\,du^2$$

où $\beta(u)$ et $\varphi(u)$ sont des fonctions arbitraires de u de classe C^2 au moins telles que β' et φ' ne soient différentes de zéro que pour $u \geq u_0 > 0$.

Nous obtenons ainsi un exemple de radiation pure "unitaire". Pour $\varphi' \equiv 0$ nous avons une radiation gravitationnelle pure qui est non triviale pour $u \geq u_0$.

8. Identités de conservation.

Considérons une radiation totale pure ; $\vec{\ell}$ étant supposé satisfaire à (7.5) nous avons :

(8.1) $$R_{\alpha\beta,\lambda\mu} = b_{\alpha\lambda}\ell_\beta\ell_\mu + b_{\beta\mu}\ell_\alpha\ell_\lambda - b_{\alpha\mu}\ell_\beta\ell_\lambda - b_{\beta\lambda}\ell_\alpha\ell_\mu \qquad (b_{\alpha\lambda}\ell^\lambda = 0)$$

et

(8.2) $$R_{\alpha\beta} = \tau\,\ell_\alpha\,\ell_\beta \qquad (\tau = b^\alpha_\alpha) .$$

Du caractère conservatif du tenseur d'Einstein et de (7.5) il résulte :

(8.3) $$\nabla_\rho(\tau\,\ell^\rho) = 0$$

En reportant (8.1) dans (7.4) et se servant des identités de Bianchi on peut établir :

$$\nabla_\rho(\theta_R\,\ell^\rho) = \tau\,\ell^\rho\,\partial_\rho\tau \qquad (\theta_R = b^{\alpha\beta}\,b_{\alpha\beta} > 0)$$

Or d'après (8.3)

$$\nabla_\rho(\tau^2\,\ell^\rho) = \tau\,\ell^\rho\partial_\rho\tau + \tau\,\nabla_\rho(\tau\,\ell^\rho) = \tau\,\ell^\rho\partial_\rho\tau$$

Ainsi :

(8.4) $$\nabla_\rho\{(\theta_R - \tau^2)\ell^\rho\} = 0$$

Si nous associons à $R_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ la forme quadratique $a_{ij}(i , j = 1 , 2)$ liée aux états de polarisation (cf. 5 b.) nous avons :

$$\tau = -(a_{11} + a_{22}) \qquad e_R - \tau^2 = 2\left\{(a_{12})^2 - a_{11}\, a_{22}\right\}$$

Ainsi (8.3) et (8.4) expriment la conservation, pour une radiation totale pure, des deux invariants de la forme quadratique a_{ij}. Posons :

(8.5) $$\tau^R_{\alpha\beta\lambda\mu} = e_R\, \ell_\alpha\, \ell_\beta\, \ell_\lambda\, \ell_\mu = \frac{1}{2}(R^{\rho}{}_{\alpha,}{}^{\sigma}{}_{\beta}\, R_{\rho\beta,\sigma\mu} + R^{\rho}{}_{\alpha,}{}^{\sigma}{}_{\mu}\, R_{\rho\beta,\sigma\lambda})$$

(8.4) exprime que le tenseur d'ordre 4 qui ne dépend que de la métrique :

$$\tau^R_{\alpha\beta\lambda\mu} - R_{\alpha\beta}\, R_{\lambda\mu}$$

est conservatif. Dans le cas d'une radiation gravitationnelle pure $\tau = 0$,

$$\nabla_\rho (e_R\, \ell^\rho) = 0$$

et le tenseur $\tau^R_{\alpha\beta\lambda\mu}$ est conservatif.

9. <u>Le tenseur de Bel.</u>

a. Considérons une métrique arbitraire satisfaisant aux équations d'Einstein :

(9.1) $$R_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\text{ou } R_{\alpha\beta} = \lambda\, g_{\alpha\beta})$$

Au tenseur de courbure associons le tenseur :

$$R^{\star}_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \frac{1}{2}\, \eta_{\alpha\beta\rho\sigma}\, R^{\rho\sigma}{}_{,\gamma\delta}$$

Sous l'hypothèse (9.1), ce tenseur définit une double 2-forme $(R^{\star}_{\alpha\beta,\gamma\delta} = R^{\star}_{\gamma\delta,\alpha\beta})$ et l'on a la relation :

(9.2) $$R^{\alpha\beta,\gamma\lambda}\, R_{\alpha\beta,\gamma\mu} = \frac{1}{4}\, \delta^{\lambda}_{\mu}\, R^{\alpha\beta,\gamma\delta}\, R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$$

Etant donné un vecteur <u>unitaire</u> $\vec{u}$ associons au tenseur de courbure les deux tenseurs symétriques :

(9.3) $$E_{\alpha\beta}(\vec{u}) = R_{\alpha\rho,\beta\sigma}\, u^\rho\, u^\sigma \qquad H_{\alpha\beta}(\vec{u}) = -R^{\star}_{\alpha\rho,\beta\sigma}\, u^\rho\, u^\sigma$$

qui satisfait manifestement à :

$$E_{\alpha\beta}\, u^{\beta} = 0 \qquad H_{\alpha\beta}\, u^\beta = 0\,.$$

La donnée de ces deux tenseurs détermine complètement le tenseur de courbure exactement comme les vecteurs d'espace champ électrique et champ magnétique déterminent le tenseur champ électromagnétique. Dans un repère orthonormé tel que $\vec{\ell}_0 = \vec{u}$, $R_{ro,so} = E_{rs}$ $(r, s, \ldots = 1, 2, 3)$, les composantes $R_{rs,tv}$ sont fournies par H et les composantes $R_{rs,tu}$ par E. En particulier :

$$(9.4) \qquad A = \frac{1}{8} R^{\alpha\beta,\gamma\delta} R_{\alpha\beta,\gamma\delta} = E^{rs} E_{rs} - H^{rs} H_{rs}$$

b. Pour une telle métrique, BEL a introduit le tenseur d'ordre 4 :

$$(9.5) \qquad B_{\alpha\beta,\lambda\mu} = \frac{1}{2}(R_{\alpha}{}^{\rho}{}_{,\lambda}{}^{\sigma} R_{\rho\beta,\sigma\mu} + R_{\alpha}{}^{\rho}{}_{,\mu}{}^{\sigma} R_{\rho\beta,\sigma\lambda})$$

symétrique en α, β en λ, μ et symétrique par rapport aux couples. Des identités de Bianchi il résulte :

$$4 \nabla_{\alpha} B^{\alpha}{}_{\beta,\lambda\mu} = \nabla_{\beta} (R^{\alpha\beta,\gamma}{}_{\lambda} R_{\alpha\beta,\gamma\mu})$$

Si nous posons :

$$(9.6) \qquad T_{\alpha\beta,\lambda\mu} = B_{\alpha\beta,\lambda\mu} - \frac{1}{2} A \, g_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu}$$

il résulte de (9.2) que T satisfait aux identités de conversation :

$$\nabla_{\alpha} T^{\alpha}{}_{\beta,\lambda\mu} = 0$$

Pour une radiation gravitationnelle pure $T_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ se réduit bien entendu au tenseur $\overset{R}{\tau}_{\alpha\beta,\lambda\mu}$. Si $\vec{u}$ est un vecteur unitaire définissant une direction de temps le scalaire

$$T(\vec{u}) = T_{\alpha\beta,\lambda\mu} u^{\alpha} u^{\beta} u^{\lambda} u^{\mu}$$

s'exprime à partir des tenseurs E et H correspondant à $\vec{u}$ par :

$$T(\vec{u}) = \frac{1}{2} (E^{rs} E_{rs} + H^{rs} H_{rs}) > 0$$

Ainsi $T(\vec{u})$ est strictement positive et n'est nulle que si le tenseur de courbure est nul. Le tenseur $T_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ semble ainsi généraliser dans ce cas le tenseur de Maxwell.