Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

Jean Meffroy

Expression analytique et calcul effectif du terme séculaire pur de la perturbation du troisième ordre des grands axes

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 2 (1958-1959), exp. nº 10, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1958-1959__2__A10_0>

11 avril 1959

EXPRESSION ANALYTIQUE ET CALCUL EFFECTIF DU TERME SÉCULAIRE PUR DE LA PERTURBATION DU TROISIÈME ORDRE DES GRANDS AXES

par Jean MEFFROY

Si l'on développe les grands axes en série entière suivant les puissances des masses et si l'on suppose que le rapport des moyens mouvements est incommensurable, les termes de degré 1 sont périodiques, aucun n'est séculaire : c'est le théorème de l'invariabilité des grands axes ; les termes de degré 2 sont périodiques et séculaires mixtes, aucun n'est séculaire pur : c'est le théorème de Poisson. On crut longtemps que le théorème de l'invariabilité des grands axes et le théorème de Poisson s'étendaient de proche en proche à toutes les puissances des masses, mais en 1876, HARETU [4] mit en évidence dans les grands axes un terme séculaire pur en t de degré 3 par rapport aux masses. L'existence de ce terme fut confirmée par EGINITIS [1] . De son côté LE VERRIER ([5] , p. [126]) avait trouvé dans la longitude de Saturne troublée par Jupiter un terme séculaire pur en t^2 de degré 3 par rapport aux masses auquel correspondait dans le grand axe un terme séculaire pur en t . Toutefois le calcul de Le Verrier était purement numérique et par ailleurs les calculs de Haretu et d'Eginitis n'inspiraient pas une grande confiance aux astronomes. GAILLOT [2] signale, mais sans en donner l'explication, une grave omission dans la seconde partie du Mémoire de Haretu. L'existence dans les grands axes d'un terme séculaire pur de degré 3 par rapport aux masses étant acquise, il restait à trouver une expression analytique nette et incontestable de ce terme et à procéder à son calcul effectif. Je pense y être parvenu dans ma thèse [6] et dans un travail qui lui fait suite [7] . Le présent exposé, divisé en deux parties, résume mes résultats. Dans une première partie, j'explique rapidement les calculs qui m'ont permis d'atteindre l'expression analytique du terme séculaire pur et, dans une seconde partie, je procède à un examen succinct des quelques cas dans lesquels j'ai poussé jusqu'au bout le calcul de ce terme. J'indique en terminant deux problèmes dont la résolution mettrait un point final à la question.

1. Expression analytique du terme séculaire pur de la perturbation du troisième ordre des grands axes.

1° : Hypothèses.

J'ai considéré 3 corps, le fait de prendre un nombre N de corps supérieur à 3, comme le faisaient mes devanciers, allongeant les calculs sans introduire par ailleurs dans le problème un élément de nature nouvelle.

J'ai rapporté la planète troublée au Soleil et la planète troublante au centre de gravité du Soleil et de la planète troublée, les fonctions perturbatrices des deux planètes ne différant ainsi que par un facteur constant et se ramenant par conséquent à une fonction perturbatrice unique.

J'ai pris pour éléments osculateurs, au lieu des éléments elliptiques qui ne satisfont pas à des équations canoniques, les éléments canoniques L , G , Θ , ℓ , g , θ (planète troublée) et L' , G' , Θ' , ℓ' , g' , θ' (planète troublante) qui satisfont à des équations canoniques et introduisent dans les calculs des simplifications considérables.

J'ai systématiquement négligé les constantes arbitraires qui s'introduisent dans les calculs au cours des diverses intégrations : s'il existe dans les grands axes un terme séculaire pur de degré 3 par rapport aux masses pour le système de valeurs nulles des constantes arbitraires d'intégration, il y existera a fortiori un terme séculaire pur pour un système de valeurs quelconques des constantes arbitraires d'intégration.

J'ai supposé que la distance de la planète troublée au Soleil est inférieure à la distance de la planète troublante au centre de gravité du Soleil et de la planète troublée.

Enfin (c'était là l'hypothèse essentielle sans laquelle le problème ne se serait pas posé) j'ai supposé que le rapport des moyens mouvements est incommensurable.

2° Notations.

S Soleil de masse 1 ; P planète troublée de masse m ; P' planète troublante de masse m' ; C centre de gravité de S et P ; $SP = r$, $CP' = \rho$ d'où, en vertu de l'avant dernière de mes hypothèses : $r/\rho < 1$; σ = cosinus de l'angle des vecteurs $\vec{SP}$ et $\vec{CP'}$.

R = fonction perturbatrice $= m' \sum_{p=1}^{\infty} R_p\, m^p$; $m'\, m^p\, R_p = R^{(p)}$; $R_1 = \mathcal{P}(R_1) + \mathcal{S}(R_1)$;

(1) $\mathcal{P}(R_1)$ = partie périodique de $R_1 = \sum_2 (M \sin D + N \cos D)$

avec $D = \alpha \ell + \beta \ell'$, $\ell = nt + \varepsilon$, $\ell' = n't + \varepsilon'$, ε et ε' = longitudes moyennes de l'époque, $M = M_{\alpha,\beta}$, $N = N_{\alpha,\beta}$, $\sum_2 = \sum_{\alpha,\beta}$, α , β = entiers variant chacun de $-\infty$ à $+\infty$ et non simultanément nuls ;

(2) $\mathcal{S}(R_1)$ = partie séculaire de $R_1 = N_{o,o}$

$\mathcal{P}(R_2)$ s'obtient en remplaçant dans (1) M par P et N par Q . $\mathcal{S}(R_2)$ s'obtient en remplaçant dans (2) $N_{o,o}$ par $Q_{o,o}$;

$A = \alpha n + \beta n'$, $A' = \alpha' n + \beta' n'$, $\alpha + \alpha' = \alpha''$, $\beta + \beta' = \beta''$, $A + A' = A''$, $M' = M_{\alpha',\beta'}$, $M'' = M_{\alpha'',\beta''}$, $\sum_4 = \sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'}$, α' , β' étant comme α et β des entiers variant de $-\infty$ à $+\infty$ et non simultanément nuls et α'' , β'' n'étant pas simultanément nuls.

Les perturbations du premier ordre (ensemble des termes de degré 1 par rapport aux masses), du deuxième ordre (ensemble des termes de degré 2 par rapport aux masses), du troisième ordre (ensemble des termes de degré 3 par rapport aux masses) ... sont respectivement représentées par les symboles δ, δ^2 , δ^3 ... .

3° De l'égalité $L = \sqrt{\mu a}$ où μ est constant et où a est le demi grand axe, on tire :

(3) $$\delta^3 a = \frac{da}{dL} \delta^3 L + \frac{d^2 a}{dL^2} \delta L \ \delta^2 L \quad .$$

Le terme séculaire pur de $\delta^3 a$ se tronçonne donc en deux morceaux : celui qui provient du produit $\delta L \ \delta^2 L$ et delui qui provient de $\delta^3 L$.

Je n'ai eu aucune peine à trouver le terme séculaire pur du produit $\delta L \ \delta^2 L$ qui résulte, en vertu du théorème de l'invariabilité des grands axes et du théorème de Poisson, de la multiplication des termes de δL , qui sont essentiellement périodiques, par les termes séculaires mixtes de $\delta^2 L$ dont la partie périodique est la même. Reprenant le théorème de Poisson dont j'ai donné une démonstration légèrement plus courte que celle de Tisserand et qui a été signalée par Yusuke Hagihara [3] , j'ai montré que $\delta^2 L$ renferme le terme séculaire mixte

$$m'^2 \, t \sum_2 \frac{\alpha}{A} \left\{ |M, N_{o,o}| \sin D + |N, N_{o,o}| \cos D - \frac{\partial N_{o,o}}{\partial L} \alpha \, (M \cos D - N \sin D) \right\}$$

$$+ m \, m' t \sum_2 \frac{\alpha}{A} \left\{ |M, N_{o,o}|' \sin D + |N, N_{o,o}|' \cos D - \frac{\partial N_{o,o}}{\partial L'} \beta \, (M \cos D - N \sin D) \right\}$$

l'opérateur $|\ ,\ |$ étant la somme des opérateurs $D(\ ,\ )/D(G,g)$ et $D(\ ,\ )/D(\Theta,\theta)$ et l'opérateur $|\ ,\ |'$ la somme des opérateurs $D(\ ,\ )/D(G',g')$ et $D(\ ,\ )/D(\Theta',\theta')$. J'ai alors montré que le produit $\delta L \delta^2 L$ renferme le terme séculaire pur en t :

$$(4) \qquad m'^3 \frac{t}{2} \sum_2 \frac{\alpha^2}{A^2} |S,N_{o,o}| + mm'^2 \frac{t}{2} \sum_2 \frac{\alpha^2}{A^2} |S,N_{o,o}|'$$

S étant la demi somme des carrés de M et N.

Le calcul du terme séculaire pur de $\delta^3 L$ m'a demandé par contre de très longs efforts. On a :

$$\delta^3 L = \sum_{i=1}^{5} (\delta^3 L)_i$$

avec

$$(\delta^3 L)_1 = \int \frac{\partial}{\partial \ell} R^{(2)} dt \quad , \quad (\delta^3 L)_2 = \int \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{R^{(3)}}{m} dt \quad , \quad (\delta^3 L)_3 = \int \frac{\partial}{\partial \ell} \delta R^{(1)} dt \quad ,$$

$$(\delta^3 L)_4 = \int \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{\delta R^{(2)}}{m} dt \quad , \quad (\delta^3 L)_5 = (\delta^3 L)_{5_1} + (\delta^3 L)_{5_2} = \int \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{\delta^2 R^{(1)}}{m} dt$$

$(\delta^3 L)_{5_1}$ étant la partie de $(\delta^3 L)_5$ qui ne renferme que $R^{(1)}$ et $(\delta^3 L)_{5_2}$ la partie de $(\delta^3 L)_5$ qui renferme à la fois $R^{(1)}$ et $R^{(2)}$.

$(\delta^3 L)_1$, $(\delta^3 L)_2$ et $(\delta^3 L)_3$ sont à écarter : en vertu du théorème de l'invariabilité des grands axes, $(\delta^3 L)_1$ et $(\delta^3 L)_2$ se composent exclusivement de termes périodiques et en vertu du théorème de Poisson, $(\delta^3 L)_3$ se compose exclusivement de termes périodiques et séculaires mixtes. J'ai montré que $(\delta^3 L)_4$ renferme, outre des termes périodiques et séculaires mixtes, le terme séculaire pur en t :

$$(5) \qquad \begin{aligned} & mm'^2 \frac{t}{2} \sum_2 \frac{\alpha}{A} \left\{ \alpha \frac{\partial T}{\partial L} + |M,P| + |N,Q| - \frac{dn}{dL} \frac{\alpha^2}{A} T \right\} \\ & + m^2 m' \frac{t}{2} \sum_2 \frac{\alpha}{A} \left\{ \beta \frac{\partial T}{\partial L'} + |M,P|' + |N,Q|' - \frac{dn'}{dL'} \frac{\beta^2}{A} T \right\} \end{aligned}$$

avec $T = NP - MQ$ et qui provient exclusivement comme on le voit des parties périodiques $\mathcal{P}(R_1)$ et $\mathcal{P}(R_2)$ de R_1 et R_2. J'ai montré en outre que $(\delta^3 L)_{5_2}$ renferme, outre des termes périodiques et séculaires mixtes, le terme séculaire pur égal et de signe contraire à (5). La somme $(\delta^3 L)_4 + (\delta^3 L)_{5_2}$ ne renferme donc aucun terme séculaire pur et le terme séculaire pur de $\delta^3 L$ ne peut provenir en définitive que de $(\delta^3 L)_{5_1}$. J'ai montré que $(\delta^3 L)_{5_1}$ renferme, outre des termes périodiques et séculaires mixtes et outre des termes séculaires purs en t^2 et en t qui s'entredétruisent, le terme séculaire pur en t :

$$m'^3\frac{t}{2}\left\{\sum_2 \frac{\alpha}{A^2}\left(\alpha\left|\frac{\partial S}{\partial L}, N_{o,o}\right| + \left|\left|M,N\right|, N_{o,o}\right| - 2\frac{dn}{dL}\frac{\alpha^2}{A}\left|S,N_{o,o}\right|\right) + \frac{1}{4}\frac{d^2n}{dL^2}\sum_4 \frac{\alpha\alpha'\alpha''^2}{AA'A''}MM'M''\right\}$$

$$+ mm'^2\frac{t}{2}\sum_2 \frac{\alpha}{A^2}\left(\alpha\left|\frac{\partial S}{\partial L}, N_{o,o}\right|' + \left|\left|M,N\right|, N_{o,o}\right|' - 2\frac{dn}{dL}\frac{\alpha^2}{A}\left|S,N_{o,o}\right|'\right.$$

$$(6) \qquad \left. + \beta\left|\frac{\partial S}{\partial L'}, N_{o,o}\right| + \left|\left|M,N\right|', N_{o,o}\right| - 2\frac{dn'}{dL'}\frac{\beta^2}{A}\left|S,N_{o,o}\right|\right)$$

$$+m^2m'\frac{t}{2}\left\{\sum_2 \frac{\alpha}{A^2}\left(\beta\left|\frac{\partial S}{\partial L'}, N_{o,o}\right|' + \left|\left|M,N\right|', N_{o,o}\right|' - 2\frac{dn'}{dL'}\frac{\beta^2}{A}\left|S,N_{o,o}\right|'\right) + \frac{1}{4}\frac{d^2n'}{dL'^2}\sum_4 \frac{\beta\beta'\alpha''\beta''}{AA'A''}MM'M''\right\}$$

Des expressions analytiques (4) et (6) du terme séculaire pur du produit $\delta L\,\delta^2 L$ et du terme séculaire pur de $\delta^3 L$, on déduit aisément, à l'aide de (3), l'expression analytique du terme séculaire pur de $\delta^3 a$.

4° Les formules (4) et (6) confirment les prévisions de Tisserand ([12], chap. XXVI, p. 429, paragraphe 184) qui pensait que le terme séculaire pur de $\delta^3 a$ ne provient pas exclusivement de la partie séculaire de la fonction perturbatrice. Elles montrent que la partie séculaire de la fonction perturbatrice, plus précisément $\mathcal{S}(R_1)$, introduit dans le produit $\delta L\,\delta^2 L$ et dans $\delta^3 L$ un terme séculaire pur en t ayant pour coefficient une série double en α, β où α est l'entier relatif à la longitude moyenne ℓ de la planète troublée P et β l'entier relatif à la longitude moyenne ℓ' de la planète troublante P' dans le développement de R_1 en série de sinus et cosinus de la quantité $\alpha\ell + \beta\ell'$. Elles montrent en outre que la partie périodique de la fonction perturbatrice, plus précisément $\mathcal{P}(R_1)$, introduit dans $\delta^3 L$, très exactement dans la partie de $(\delta^3 L)_{5_1}$ qui ne renferme que les perturbations de la planète troublée P et dans la partie de $(\delta^3 L)_{5_1}$ qui ne renferme que les perturbations de la planète troublante P', un terme séculaire pur en t ayant pour coefficient une série quadruple en α, β, α', β', le couple d'entiers α, α' se rapportant à ℓ et le couple d'entiers β, β' se rapportant à ℓ'. Elles montrent encore que $\mathcal{P}(R_1)$ n'introduit dans la partie de $(\delta^3 L)_{5_1}$ qui renferme à la fois les perturbations de P et P' aucun terme séculaire pur. Le calcul des deux séries quadruples ci-dessus, qui représentant en définitive le coefficient de t dans le terme séculaire pur introduit dans $\delta^3 a$ par la partie périodique de la fonction perturbatrice, est extrêmement long et c'est lui qui constituait toute la difficulté de ma thèse ([6] , p. 107-181) .

Il convient de signaler ici qu'avant d'aborder dans toute sa généralité la recherche du terme séculaire pur de $\delta^3 a$, je me suis livré, sur le conseil de Jean CHAZY, à une étude systématique du cas particulier où P et P' décrivent une droite fixe passant par S ([6] , p. 37-59) . Jean CHAZY pensait que j'atteindrais ainsi plus facilement le terme séculaire pur de $\delta^3 a$. Mais j'ai abouti à un résultat négatif. J'ai montré qu'alors le produit $\delta L \, \delta^2 L$ ne se compose d'aucun terme séculaire pur et que les seuls termes séculaires purs de $\delta^3 L$ sont des termes en t^2 qui s'entredétruisent. L'examen de ce cas particulier n'a pas néanmoins été inutile en ce sens qu'il m'a permis de mettre au point la méthode dont je me suis servie dans le cas général.

Les formules (4) et (6) confirment par ailleurs les résultats de Henri Poincaré qui a prouvé que le développement de L suivant les puissances des masses ne renferme pas de termes séculaires purs de rang inférieur à 2 ([11] , chap. XI, p. 306, paragraphe 185) . Elles montrent que le terme séculaire pur de $\delta^3 a$ est de rang 2 . Je rappelle qu'Henri POINCARÉ appelle rang du terme séculaire pur $m^p t^q$ où m est la masse ou un coefficient de l'ordre de la masse, t le temps et où p et q sont des entiers positifs, la différence $p - q$. Ici : $p = 3$, $q = 1$ d'où $p - q = 3 - 1 = 2$.

J'ai montré en outre qu'HARETU et EGINITIS ([6] , p. 197-205) ont tous deux trouvé le terme séculaire pur du produit $\delta L \, \delta^2 L$ mais ont tous deux laissé échapper le terme séculaire pur de $\delta^3 L$. En d'autres termes, ils ont tous deux laissé échapper le terme séculaire pur introduit dans $\delta^3 a$ par la partie périodique de la fonction perturbatrice et ils n'ont trouvé qu'une fraction du terme séculaire pur introduit dans $\delta^3 a$ par la partie séculaire de la fonction perturbatrice.

J'ai indiqué enfin dans deux Notes l'origine précise du terme séculaire pur introduit dans $\delta^3 a$ d'une part par la partie séculaire de la fonction perturbatrice [9] et d'autre part par la partie périodique de la fonction perturbatrice [10] .

2. Calcul effectif du terme séculaire pur de la perturbation du troisième ordre des grands axes.

5° L'expression analytique du terme séculaire pur de $\delta^3 a$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{C}_P + \mathcal{U}_P + \mathcal{C}_{PP'} + \mathcal{C}_{P'} + \mathcal{U}_{P'}$$

où $\mathcal{C}_P$ et $\mathcal{U}_P$ sont les termes séculaires purs respectivement introduits par les parties séculaire et périodique de la fonction perturbatrice dans la portion $(\delta^3 a)_P$ de $\delta^3 a$ qui ne renferme que les perturbations de la planète troublée P, $\mathcal{C}_{PP'}$ le terme séculaire pur introduit par la partie séculaire de la fonction perturbatrice dans la portion $(\delta^3 a)_{PP'}$ de $\delta^3 a$ qui renferme à la fois les perturbations de P et de la planète troublante P', $\mathcal{C}_{P'}$ et $\mathcal{U}_{P'}$, les termes séculaires purs respectivement introduits par les parties séculaire et périodique de la fonction perturbatrice dans la portion $(\delta^3 a)_{P'}$ de $\delta^3 a$ qui ne renferme que les perturbations de P'. Pour prouver l'existence effective dans $\delta^3 a$ d'un terme séculaire pur, il restait à montrer que les trois quantités $\mathcal{C}_P + \mathcal{U}_P$, $\mathcal{C}_{PP'}$, $\mathcal{C}_{P'} + \mathcal{U}_{P'}$, qui contiennent respectivement en facteur $m'^3 t$, $mm'^2 t$, $m^2 m' t$, ne sont pas simultanément nulles et, à cet effet, à procéder au calcul du coefficient de t dans chacune do ces trois quantités. J'ai donné dans un Mémoire qui fait suite à ma thèse [7] le calcul complet de $\mathcal{C}_P$ en réduisant le développement de R_1 en série de polynômes de Legendre

$$R_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^n}{\rho^{n+1}} P_n(\sigma) \quad \text{avec} \quad P_n(\sigma) = \frac{1}{2.4.\ \dots\ 2n} \frac{d^n}{d\sigma^n} (\sigma^2 - 1)^n \qquad n = 2,3 \dots$$

à son premier terme $\frac{r^2}{\rho^3} P_2(\sigma)$, ce qui revient à négliger dans $(\delta^3 a)_P$ les puissances de a^2/a'^3 supérieures à la troisième et en négligeant dans $\frac{r^2}{\rho^3} P_2(\sigma)$ les inclinaisons et les puissances des excentricités supérieures à la sixième. Posant $(\alpha n + \beta n')^{-2} = (\alpha, \beta)$, j'ai alors montré que la partie séculaire de la fonction perturbatrice, plus précisément $\mathcal{S}(R_1)$, introduit dans la portion de $\delta^3 L$ qui ne renferme que les perturbations de P le terme séculaire pur

$$m'^3 \frac{t}{2} \left(\frac{a^2}{a'^3}\right)^3 \frac{1}{n^2 a^4} \frac{3^2}{2^4} \Big\{ \frac{3}{2} \Big[\frac{-3.5}{2^2} (-1,1) + 3^2(-1,2) + (-2,1) \Big] e'^2$$

$$+ \frac{1}{2} \Big[\frac{3.61}{2^3}(-1,1) - 2.3^3(-1,2) + \frac{5}{2}(-2,1) + \frac{7}{2}(-1,-1) - \frac{37}{2}(-1,-2) \Big] e^2 e'^2$$

$$+ \Big[-11(-1,1) - 3(-1,2) + \frac{3.5}{2^2}(-2,1) - \frac{7.53}{2^4}(-2,3) + \frac{3.7.53}{2^4}(-1,3)$$

$$+ \frac{3}{2^4}(-1,-1) - \frac{1}{2^4}(-2,-1) \Big] e^4 \Big\} \sin 2(\varpi - \varpi')$$

et j'ai montré que $\delta(R_1)$ introduit dans la portion du produit $\delta L \delta^2 L$ qui ne renferme que les perturbations de P le terme séculaire pur

$$m'^3 \frac{t}{2} \left(\frac{a^2}{a'^3}\right)^3 \frac{1}{na^2} \frac{3^3}{2^6} \left\{ \frac{3.5}{2^2} (-1,1) - 3^2(-1,2) - (-2,1) \right\} e^2 e'^2 \sin 2(\varpi - \varpi') .$$

Ces deux termes séculaires purs sont nuls lorsque l'excentricité e' de la planète troublante P' est nulle. Lorsque l'excentricité e de la planète P est nulle, le second de ces deux termes séculaires purs est également nul, et, dans le premier, le terme médian en $e^2 e'^2$ a disparu.

J'ai montré en outre ([7] , p. 271-274, paragraphe 6 et note (2) p. 274) que lorsque les excentricités et les inclinaisons sont nulles, $\delta(R_1)$ n'introduit dans $(\delta^3 a)_P$ aucun terme séculaire pur en $m'^3 t(a^2/a'^3)^n$ avec $n = 3,4,5, \ldots$ ce qui revient à considérer tous les termes du développement de R_1 en série de polynômes de Legendre. On aurait pu montrer de même que $\delta(R_1)$ n'introduit dans $(\delta^3 a)_{PP'}$ aucun terme séculaire pur en $m m'^2 t(a^2/a'^3)^n$ et qu'il n'introduit dans $(\delta^3 a)_{P'}$ aucun terme séculaire pur en $m^2 m' t(a^2/a'^3)^n$ $n = 3,4,5 \ldots$. $\delta(R_1)$ n'introduit donc dans $\delta^3 a$ aucun terme séculaire pur lorsque les excentricités et les inclinaisons sont nulles. J'ai montré par ailleurs [8] que lorsque les excentricités sont nulles et que les inclinaisons ont des valeurs non nulles et même ont des valeurs considérables, $\delta(R_1)$ n'introduit dans $\delta^3 a$ aucun terme séculaire pur. Ces deux résultats négatifs sont importants en ce sens qu'ils montrent le rôle prépondérant joué par les excentricités dans la formation du terme séculaire pur de $\delta^3 a$.

Enfin, dans un Mémoire actuellement en cours, je donne le calcul complet du terme séculaire pur $\mathcal{U}_P$ introduit dans $(\delta^3 a)_P$ par la partie périodique de la fonction perturbatrice. Réduisant toujours le développement de R_1 en série de polynômes de Legendre à son premier terme $\frac{r^2}{\rho^3} P_2(\sigma)$ mais élargissant par ailleurs mes hypothèses, je tiens compte dans $\frac{r^2}{\rho^3} P_2(\sigma)$ des excentricités et des inclinaisons et je néglige les puissances des excentricités et des inclinaisons supérieures à la sixième.

6° Pour clore la question du terme séculaire pur de $\delta^3 a$, deux problèmes restent à résoudre :

a. La recherche du terme séculaire pur éventuellement introduit dans $\delta^3 a$ par les constantes arbitraires d'intégration qu'à l'exemple de mes devanciers j'ai systématiquement négligées dans ma thèse. Jean CHAZY ne comprenait pas pourquoi TISSERAND et les quelques mécaniciens célestes classiques qui se sont occupés de cette question négligent systématiquement les constantes arbitraires d'intégration ([12], chap. XI, paragraphe 75, p. 202). Ces dernières, qui introduisent un terme séculaire pur dès la perturbation du premier ordre dans les longitudes moyennes et dès la perturbation du deuxième ordre dans les éléments canoniques autres que les longitudes moyennes et les L ou dans les éléments elliptiques autres que les longitudes moyennes et les grands axes, peuvent introduire un terme séculaire pur dans $\delta^3 a$.

b. La recherche des conditions de validité de l'expression analytique du terme séculaire pur de $\delta^3 a$. D'une façon plus précise, la recherche de la borne supérieure $\bar{t}$ du temps t au delà de laquelle cette expression analytique cesse d'être exacte. Les perturbations divers ordres des éléments canoniques ou elliptiques s'obtiennent à partir du développement de la fonction perturbatrice en série de Taylor suivant les puissances de $\delta L + \delta^2 L + \dots$, $\delta G + \delta^2 G + \dots, \dots$ ou de $\delta a + \delta^2 a + \dots$, $\delta e + \delta^2 e + \dots$, $\dots$. Or les éléments canoniques autres que les L, ou les éléments elliptiques autres que les grands axes, renferment dès la perturbation du premier ordre des termes séculaires purs. Malgré la petitesse des masses, ces termes séculaires purs finissent par croître au delà de toute limite quand le temps t tend vers l'infini et il n'est plus possible, dans cette dernière hypothèse, de developper la fonction perturbatrice en série de Taylor suivant les puissances des quantités ci-dessus. La détermination de $\bar{t}$ met alors à jour un nouveau problème apparemment très difficile : celui de la recherche, pour $t > \bar{t}$, d'une expression analytique du terme séculaire pur de $\delta^3 a$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] EGINITIS (D.). - Mémoire sur la stabilité du système solaire, Ann. Obs. Paris, Mémoires, t. 19, 1889, p. H.1 à H.16.

[2] GAILLOT (A.). - Application integrale de la méthode d'interpolation ..., Chapitre I : Application de la methode d'interpolation à la détermination de l'ensemble des inégalités des divers ordres des éléments de Saturne, ... Addition II, Ann. Obs. Paris, t. 24, 1901, p. 155-161.

[3] HAGIHARA (Yusuke). - Stability in celestial Mechanics. Tokyo, 1957, pg 2, voir p. 15.

[4] HARETU (Spiru C.). - Sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires, Ann. Obs. Paris, Mémoires, t. 18, 1885, p. I.1 à I.39.

[5] LE VERRIER (U.-J.). - Recherches astronomiques, Chapitre XXI : Théorie du mouvement de Saturne, Addition I, Ann. Obs. Paris, Mémoires, t. 11, 1876, p. [25] à [129].

[6] MEFFROY (Jean). - Contribution à l'étude de la stabilité du système solaire, Bull. astr., Série 2, t. 19, 1955, p. 1-224 (Thèse Sc. math. Paris. 1954).

[7] MEFFROY (Jean). - Sur l'existence effective du terme séculaire pur de la perturbation du troisième ordre des grands axes, Bull. astr., Série 2, t. 21, 1957, p. 261-322.

[8] MEFFROY (Jean). - Sur un cas d'élimination du terme séculaire pur introduit dans la perturbation du troisième ordre des grands axes par le coefficient d'argument nul de la fonction perturbatrice, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 247, 1958, p. 863-865.

[9] MEFFROY (Jean). - Sur l'origine du terme séculaire pur de la perturbation du troisième ordre des grands axes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 1294-1297.

[10] MEFFROY (Jean). - Sur l'origine du terme séculaire pur de la perturbation du troisième ordre des grands axes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 1773-1776.

[11] POINCARÉ (Henri). - Leçons de Mécanique céleste, t. 1. - Paris, Gauthier-Villars, 1905.

[12] TISSERAND (F.). - Traité de Mécanique céleste, t. 1. - Paris, Gauthier-Villars, 1889.