Kichenassamy

Choix des solutions particulières à symétrie axiale en relativité générale

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 1 (1957-1958), exp. nº 7, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1957-1958__1__A7_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de MÉCANIQUE ANALYTIQUE
et de MÉCANIQUE CÉLESTE
Année 1957/58
-:-:-:-

3 mai 1958

CHOIX DES SOLUTIONS PARTICULIÈRES À SYMÉTRIE AXIALE EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

par KICHENASSAMY

Nous donnons d'abord une méthode générale de détermination des solutions particulières des théories relativistes à 4 dimensions, la méthode des transformées infinitésimales. Nous appliquons ensuite cette méthode au cas où l'espace-temps possède la symétrie axiale. Cela nous conduit naturellement à faire quelques remarques sur les solutions à symétrie axiale antérieurement utilisées.

1. Nécessité d'élaborer la méthode des transformées.

L'élément primitif de la Relativité générale est une variété V_4 douée d'une structure de variété différentiable de classe C^2, C^4 par morceaux et munie d'une métrique riemannienne ds^2 partout de type hyperbolique normal. Cette métrique est dite régulière si elle admet sur V_4 des composantes $\gamma_{\alpha\beta}$ de classe C', C^3 par morceaux. Soit, dans un système de coordonnées locales (x^α)

(1) $$ds^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta .$$

Les $\gamma_{\alpha\beta}$ sont dits les potentiels de gravitation par le système des coordonnées envisagé.

On appelle modèle d'univers, une variété V_4 munie d'une métrique riemannienne partout régulière et satisfaisant aux conditions suivantes :

1. Dans des domaines D_e vides d'énergie, la métrique est régulière et satisfait aux équations d'Einstein du cas extérieur :

(2a) $$S_{\alpha\beta} = 0 .$$

2. Dans des domaines D_i limités par des hypersurfaces-frontières S et renfermant une distribution énergétique décrite par $T_{\alpha\beta}$, la métrique est régulière et satisfait aux équations d'Einstein du cas intérieur :

(2b) $$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta} .$$

3. A la traversée des hypersurfaces S, les potentiels et leurs dérivées premières sont continues conformément aux conditions de raccordement.

Les équations d'Einstein (2) déterminent la métrique d'une manière physiquement unique. Cependant, la construction effective d'un modèle d'univers dans le cas général se révèle difficile.

Les modèles d'univers obtenus correspondent à des distributions énergétiques traduisant des réalités physiques simples et permettant d'attribuer a priori telle ou telle propriété géométrique à V_4 et telle ou telle forme particulièrement simple à la métrique dans V_4.

Ainsi, une masse isolée fixe crée un champ statique à symétrie sphérique ; deux masses fixes, en admettant qu'elles puissent coexister en équilibre sans graviter, créent un champ statique à symétrie axiale.

Mais la manière dont ces différents champs sont déterminés est peu convaincante ; on s'aperçoit notamment que les différentes symétries sont définies non dans l'espace-temps, mais dans un espace euclidien auxiliaire rapporté aux mêmes coordonnées.

C'est pour échapper à cette difficulté et pour attribuer de la manière la plus naturelle, la symétrie S à V_4 que nous proposons la méthode des transformées infinitésimales, ainsi appelée en raison de l'instrument mathématique utilisé, la dérivée de Lie ou la transformée infinitésimale.

2. La méthode des transformées.

L'idée directrice de cette méthode naît de la remarque suivante : pour attribuer une propriété géométrique à V_4 on l'identifie en chacun de ses points à l'espace vectoriel localement tangent du type de Minkowski.

On définit donc la symétrie S de V_4 de la manière suivante :

1. Choix des coordonnées locales. - Soit U un voisinage de V_4 ; on le rapporte à un système de coordonnées locales privilégiées (y^α) que l'on dit "adaptées" à S. Les coordonnées (y^α) sont par exemple (r, θ, φ, t) lorsque la symétrie S est la symétrie sphérique. On peut munir ce voisinage U :

a. d'une métrique minkowskienne :

$$\overline{ds}^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dy^\alpha\, dy^\beta \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4 \tag{3}$$

b. d'une métrique riemannienne :

(4) $$ds^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dy^\alpha\, dy^\beta$$

2. Choix d'un groupe local. - Le groupe local G_s qui conserve la forme du $\overline{ds}^2$ (3) est isomorphe à un sous-groupe du groupe de Lorentz. Il peut être supposé engendré par un champ de vecteurs $(\vec{\xi})$. Le tenseur $\eta_{\alpha\beta}$ est donc conservé par $(\vec{\xi})$, ce que l'on exprime par :

(5) $$\boxed{\mathcal{L}(\vec{\xi})\, \eta_{\alpha\beta} = 0}$$

$\mathcal{L}(\vec{\xi})$ est la dérivée de Lie ou la transformée infinitésimale par $(\vec{\xi})$. Rappelons que la dérivée de Lie d'une forme à valeurs dans un espace vectoriel N se calcule aisément grâce à la formule fondamentale de A. LICHNEROWICZ :

(6) $$\mathcal{L}(\xi) = i(\xi)\, d + d\, i(\xi)$$

d est l'opérateur de dérivation extérieure, $i(\vec{\xi})$ l'opérateur produit intérieur par $(\vec{\xi})$. On a par exemple :

(7) $$\mathcal{L}(\vec{\xi})\, a_{\alpha\beta} = \xi^\sigma \partial_\sigma a_{\alpha\beta} + a_{\alpha\sigma} \partial_\beta \xi^\sigma + a_{\sigma\beta} \partial_\alpha \xi^\sigma$$

$a_{\alpha\beta}$ est un tenseur deux fois covariant.

3. Passage du local au global. - Dans certaines conditions que nous n'explicitons pas ici, on peut supposer que le champ de vecteurs (ξ) déterminé par (5) engendre un groupe de transformations globales $\overline{G}_s$. Nous supposerons dans la suite, ces conditions toujours réalisées.

4. Définition de la symétrie S de V_4. - La variété V_4 possède la symétrie S si sa métrique est invariante par le groupe des transformations globales $\overline{G}_s$, c'est-à-dire si l'on a :

(8) $$\boxed{\mathcal{L}(\vec{\xi})\, \gamma_{\alpha\beta} = 0}$$

EXEMPLE. - Ainsi, soit à déterminer la métrique globale $\gamma_{\alpha\beta}$ à symétrie sphérique.

a. On rapporte V_4 à un système de coordonnées locales (r, θ, φ, t).

b. Le groupe local G_s est celui qui conserve la forme du $\overline{ds}^2$ suivant :

(9) $$\overline{ds}^2 = - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + dt^2$$

et le champ de vecteurs $(\vec{\xi})$ cherché satisfait à (5).

c. On suppose les conditions réalisées pour que ce champ de vecteurs $(\vec{\xi})$ engendre un groupe de transformations globales $\overline{G}_s$.

d. La métrique à symétrie sphérique est alors déterminée par (9).

REMARQUE 1. - Si la métrique de V_4 possède la symétrie S , toute autre grandeur géométrique se déduisant de cette métrique possède également la symétrie S . Cela découle des propriétés suivantes de la dérivée de Lie :

$$\mathcal{L}(\vec{\xi})\, d - d\, \mathcal{L}(\vec{\xi}) = 0$$
$$\mathcal{L}(\vec{\xi})\, t_1 \otimes t_2 = t_1 \otimes \mathcal{L}(\vec{\xi})\, t_2 + \mathcal{L}(\vec{\xi})\, t_1 \otimes t_2$$
$$\mathcal{L}(\vec{\xi})\, \mathrm{Tr}\, J = \mathrm{Tr}\, \mathcal{L}(\vec{\xi})\, J .$$

REMARQUE 2. - La détermination précédente de la métrique est adaptée au cas général <u>non-statique</u>. En revanche, dans <u>le cas statique</u> où la métrique est indépendante de t , la symétrie $\overline{S}$ de V_4 est déterminée en postulant l'invariance de la métrique par le groupe des transformations globales qui conservent la forme du $\overline{ds}^{*2}$ euclidien suivant :

$$\overline{ds}^{*2} = \eta_{ij}\, dy^i\, dy^j \qquad (i\ ,\ j = 1\ ,\ 2\ ,\ 3) \tag{10}$$

3. <u>Remarques sur les</u> ds^2 <u>à symétrie axiale</u> (au sens usuel).

Avant d'appliquer la méthode des transformées à la symétrie axiale en Relativité générale, il convient de faire quelques remarques sur les ds^2 à symétrie axiale antérieurement utilisés.

1. <u>Définition de la symétrie axiale</u> (au sens usuel). - Considérons un axe, les plans Π passant par cet axe sont repérés par un angle φ . Si tous les plans Π sont équivalents et constituent des plans de symétrie c'est-à-dire si les potentiels ne dépendent pas de φ et si $d\varphi$ ne figure dans le ds^2 que par son carré, on dit que le modèle d'univers correspondant est à symétrie axiale.

Dans cette définition, on admet donc <u>a priori</u> l'existence dans l'espace-temps, d'un axe global de révolution et la possibilité de repérer des angles avant toute détermination de la métrique globale.

2. <u>Les</u> ds^2 <u>statiques à symétrie axiale</u>. - Tous les ds^2 statiques à symétrie axiale antérieurement utilisés peuvent être ramenés au ds^2 de J. Chazy :

$$ds^2 = e^{2\psi}\, dt^2 - e^{-2\psi}[r^2\, d\varphi^2 + e^{2\gamma}(dr^2 + dz^2)\ ] \tag{11}$$

Les équations du cas extérieur donnent :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial r} = r \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 \right]$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = 2r \frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 = 0 \;.$$

a. Supposons ψ régulier conformément à l'axiomatique de la Relativité. Dans ce cas, d'après deux théorèmes bien connus sur les fonctions harmoniques dans une variété riemannienne, l'équation $\Delta \psi = 0$ exige :

$$\psi = \text{Cte}$$

et par suite $\gamma = \text{Cte}$.

Les ds^2 statiques à symétrie axiale partout réguliers se réduisent donc à des ds^2 euclidiens.

b. Supposons ψ non partout régulier. On peut alors interpréter les singularités du champ extérieur comme représentant des liaisons à appliquer aux deux masses pour leur permettre de ne pas graviter. On sait que H. WEYL, en étudiant ce système des tensions, a obtenu un résultat d'un intérêt physique certain : l'effet global de ces tensions sur l'un des corps est une attraction donnée approximativement par la loi de Newton.

3. Les ds^2 non-statiques à symétrie axiale. - Il semble que ces ds^2 correspondent à des solutions particulières du problème de n corps : celles qui correspondent au cas où, en mécanique newtonienne, les corps se meuvent en ligne droite.

Les ds^2 considérés antérieurement sont le ds^2 d'Einstein-Rosen et le ds^2 de J. Delsarte.

a. Le ds^2 d'Einstein-Rosen :

$$ds^2 = -e^{2\psi} dz^2 - r^2 e^{-2\psi} d\varphi^2 - e^{2\theta}(dr^2 - dt^2) \tag{12}$$

s'il est partout régulier et à comportement asymptotique euclidien n'est pas partout localement euclidien. Pour cette raison, il avait été rejeté ; mais il semble qu'il puisse cependant être d'une certaine utilité dans l'étude des radiations gravitationnelles.

b. Le ds^2 de J. Delsarte admet également le groupe d'isométries à un paramètre introduisant l'indépendance des potentiels par rapport à φ ; il suppose en outre que les trajectoires de ce groupe forment une congruence de normales. Ce ds^2 s'écrit :

$$(13) \quad ds^2 = -\frac{1}{(X-T)^2}\left\{\frac{dX^2}{X^3+pX+q} + (X^3 + pX + q)\, dY^2 + (T^3 + pT + q)\, dz^2 - \frac{1}{T^3+pT+q}\, dT^2\right\}$$

Y ou Z pouvant être pris pour φ .

Nous nous proposons maintenant de comparer ces ds^2 à symétrie axiale (au sens usuel) avec ceux fournis par la méthode des transformées.

4. La méthode des transformées et la symétrie axiale.

1. Définition. - Les champs de vecteurs $(\vec{\xi})$ générateurs de la symétrie axiale sont ceux qui conservent la même forme :

a. au $\overline{ds}^2$ suivant :

$$(14) \qquad \overline{ds}^2 = - dr^2 - r^2\, d\varphi^2 - dz^2 + dt^2$$

dans le cas non-statique ;

b. au $\overline{ds}^{*2}$ suivant :

$$(15) \qquad \overline{ds}^{*2} = dr^2 + r^2\, d\varphi^2 + dz^2$$

dans le cas statique.

c. Nous avons envisagé également un cas statique de révolution, $(\vec{\xi})$ laissant invariante dans ce cas, la forme du ds^2 d'une surface de révolution $z = f(r)$:

$$(16) \qquad ds^2 = (1 + f_r^{\,2})\, dr^2 + r^2\, d\varphi^2$$

Nous nous sommes contentés dans chacun de ces cas, de choisir des solutions particulières des équations (5). Nous avons obtenu les champs de vecteurs suivants :

2.a. Cas statique :

α) le champ de vecteurs singulier pour $r = 0$ et dépendant de 4 paramètres :

$$(17) \qquad \xi^1 = (Az + B) \sin\varphi \qquad \xi^2 = \frac{Az + B}{r} \cos\varphi + C \qquad \xi^3 = - Ar \sin\varphi + D$$

β) le champ de vecteurs régulier obtenu à $r = Cte\ (=1)$ et dépendant de 3 paramètres :

(18) $\xi^1 = 0 \qquad \xi^2 = (Az + B) \qquad \xi^3 = - A\varphi + C$

γ) le champ de vecteurs à un paramètre :

(19) $\xi^1 = 0 \qquad \xi^2 = C \qquad \xi^3 = 0$.

Nous appelons les symétries engendrées par (17), (18), (19) respectivement par symétrie axiale statique généralisée, symétrie axiale statique, symétrie axiale statique restreinte (au sens de la méthode des transformées).

2.b. Cas statique de révolution :

α) le champ de vecteurs (19) ;

β) le champ de vecteurs singulier à 3 paramètres :

(20)
$$\xi^1 = \frac{A}{\sqrt{mr^2 + K}} \cos(\sqrt{K}\,\varphi + B)$$
$$\xi^2 = -\frac{A}{r\sqrt{K}\sqrt{mr^2 + K}} \sin(\sqrt{K}\,\varphi + B) + C$$
$$\xi^3 = 0 \quad \text{où} \quad K > 0 .$$

γ) le champ de vecteurs singulier à 3 paramètres :

(21)
$$\xi^1 = \frac{A}{\sqrt{mr^2 + K}} \operatorname{ch}(\sqrt{-K}\,\varphi + B)$$
$$\xi^2 = -\frac{A}{r\sqrt{-K}\sqrt{mr^2 + K}} \operatorname{sh}(\sqrt{-K}\,\varphi + B) + C$$
$$\xi^3 = 0 \quad \text{où} \quad K < 0 .$$

2.c. Cas non-statique :

α) le champ de vecteurs singulier à 5 paramètres :

(22)
$$\xi^1 = (Az + B)\, t \sin\varphi$$
$$\xi^2 = \frac{Az + B}{r}\, t \cos\varphi + C$$
$$\xi^3 = - Art \sin\varphi + D$$
$$\xi^4 = (Az + B)\, r \sin\varphi + G .$$

La symétrie engendrée par (22) est la symétrie axiale non-statique généralisée.

β) le champ de vecteurs régulier à 4 paramètres :

$$\xi^1 = 0 \qquad \xi^2 = A \qquad \xi^3 = Bt + C \qquad \xi^4 = Bz + D \,. \tag{23}$$

La symétrie engendrée par (23) est la symétrie axiale non-statique restreinte.

3. Comparaison des ds^2 à symétrie axiale (au sens usuel) avec ceux fournis par la méthode des transformées.

a. On constate que le ds^2 de J. Chazy ne jouit au sens de la méthode des transformées que de la symétrie axiale statique restreinte. Or, nous avons vu que l'axiomatique de la relativité ne permet pas la considération de ces ds^2 statiques à symétrie axiale. Il est vrai que des ds^2 singuliers gardent un certain intérêt du point de vue physique.

b. Quant aux ds^2 non-statiques, nous en avons formé deux particulièrement simples dans l'hypothèse généralement admise d'un tenseur métrique diagonal

α) l'un est à symétrie axiale non-statique restreinte :

$$ds^2 = -\lambda^2\, dr^2 - \mu^2\, d\varphi^2 - \nu^2(dz^2 - dt^2) \tag{24}$$

λ, μ et ν sont des fonctions de r, et η :

$$\eta = \frac{1}{2B}\left[(Bz + D)^2 - (Bt + C)^2\right]$$

On constate que les ds^2 (12) et (13) non-statiques à symétrie axiale (au sens usuel) ne se ramènent pas à (24). Ils ne sont donc pas à symétrie axiale restreinte au sens de la méthode des transformées.

D'autre part, les équations du cas extérieur conduisent à admettre l'indépendance des $\gamma_{\mu\nu}$ par rapport à η. Le ds^2 (24) se réduit donc à un ds^2 statique.

β) l'autre ds^2 est à symétrie axiale non-statique généralisée ; nous avons d'ailleurs particularisé le champ de vecteurs (22) en posant :

$$C = D = G = 0 \,.$$

Le ds^2 a alors la forme suivante :

$$ds^2 = \frac{u(\eta)}{r \cos\varphi}\left\{- dr^2 - r^2\, d\varphi^2 - dz^2 + dt^2\right\} \tag{25}$$

$$\eta = \frac{1}{2A}\left[(Az + B)^2 + A^2\, t^2\right]$$

Les ds^2 (12) et (13) non-statiques à symétrie axiale (au sens usuel) ne sont pas de la forme (25).

Ces ds^2 (12) et (13) ne sont donc pas en accord avec la méthode des transformées.

D'autre part, les équations du cas extérieur montrent que le ds^2 (25) se réduit à un ds^2 euclidien.

5. Nous avons vu que les ds^2 particuliers fournis par la méthode des transformées dans le cas non-statique se réduisent soit à des ds^2 statiques, soit à des ds^2 euclidiens. Des recherches ultérieures devront préciser si, dans des hypothèses plus générales, la méthode des transformées peut fournir ou non des ds^2 non-statiques à symétrie axiale.

Il semble que la symétrie axiale ne puisse pas avoir une traduction facile en Relativité générale.

Remarquons d'autre part que l'emploi d'un système de coordonnées privilégiées pour traduire une symétrie S de la variété fondamentale restreint considérablement la portée de la méthode des transformées.