Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

André Kolmogorov

Théorie générale des systèmes dynamiques de la mécanique classique

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 1 (1957-1958), exp. nº 6, p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1957-1958__1__A6_0>

THÉORIE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES DE LA MÉCANIQUE CLASSIQUE (1),

par André KOLMOGOROV

Mon problème sera d'éclaircir l'étude des systèmes conservatifs de la mécanique classique au moyen des conceptions fondamentales et des résultats de la théorie spectrale et de la théorie moderne des systèmes dynamiques. Il me semble d'ailleurs que le thème que j'ai choisi doit avoir un intérêt plus large, car il est un exemple de ces cas où naissent des liens profonds entre des parties distinctes de la mécanique classique et de la mécanique moderne.

Dans son remarquable rapport au congrès de 1900 HILBERT déclara que l'unité de la Mathématique, l'impossibilité de la diviser en branches distinctes l'une de l'autre, découle de la structure même de notre science. Une des preuves les plus convaincantes de la vérité de cette pensée, c'est l'apparition à chaque étape de l'expansion mathématique de points de rencontre où, du fait de problèmes tout à fait concrets, il devient indispensable d'introduire des notions de liaison entre les méthodes de disciplines mathématiques bien différentes. Pour les mathématiciens du 19e siècle l'un de ces points de rencontre fut la question de l'intégration des systèmes différentiels de la mécanique classique.

Les problèmes de mécanique, de théorie des équations differentielles, s'y liaient étroitement avec des problèmes de calcul des variations, de géométrie différentielle à plusieurs dimensions, de théorie des fonctions analytiques et de théorie des groupes continus. Après les travaux de POINCARÉ, le rôle des théories topologiques apparut fondamental pour les questions de ce type. D'autre part, le théorème de POINCARÉ-CARATHEODORY servit de point de départ à la théorie métrique des systèmes dynamiques, considérée comme étude des propriétés des mouvements vérifiées pour presque toutes les positions initiales du système.

---

(1) Ceci est la traduction (due à J.-P. BENZÉCRI) du texte russe de la Conférence faite par A.N. KOLMOGOROV [17] au Congrès international des Mathématiciens à Amsterdam en 1954. Des tirés à part du texte russe furent distribués par A.N. KOLMOGOROV au Séminaire de Mécanique analytique et Mécanique céleste, le 22 mars 1958, lors de l'exposé qu'il fit sur le même sujet. L'auteur prévoit la publication prochaine de détails complémentaires, dans un autre recueil.

La théorie ergodique qui s'est développée à partir de là a reçu diverses généralisations. Elle est devenue un centre indépendant d'intérêt et un lieu de liaisons pour les méthodes et les problèmes de bien des branches toutes nouvelles des mathématiques : la théorie abstraite de la mesure, la théorie des groupes d'opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert et les autres espaces de dimension infinie, la théorie des processus aléatoires, etc. Au précédent congrès de 1950, un grand rapport de KAKUTANI [14] fut consacré aux problèmes généraux de la théorie ergodique.

Les méthodes topologiques, comme l'on sait, ont reçu de notables applications en théorie des oscillations, en particulier pour résoudre des problèmes tout-à-fait concrets, qui apparaissent quand on étudie les systèmes : régulation automatique en électrotechnique, etc. Cependant, ces questions concrètes, physiques et techniques, concernent surtout les systèmes non conservatifs.

Nous nous occuperons ici d'étudier les mouvements asymptotiquement stables, en particulier les points d'équilibre stables et les cycles stables. Nous étudierons aussi les courbes intégrales s'accumulant vers ces mouvements asymptotiquement stables. Dans les systèmes conservatifs, les mouvements asymptotiquement stables sont impossibles. C'est pourquoi, par exemple, la recherche de mouvements particuliers, quelque intérêt mathématique qu'elle présente dans le cas des systèmes dynamiques a souvent un intérêt physique réel limité. Le point de vue métrique présente un intérêt fondamental dans le cas des systèmes conservatifs, car il permet d'étudier les propriétés de l'ensemble des mouvements. La théorie ergodique générale contemporaine a préparé pour ce genre d'étude toute une série de concepts qui ont une signification physique profonde. Cependant, les résultats obtenus de ces points de vue contemporains dans l'étude de problèmes concrets de la mécanique classique sont fort limités jusqu'à présent.

Il s'agit d'abord du problème suivant : supposons que le mouvement sur une variété à s dimensions V^s soit déterminé par un système canonique d'équations différentielles avec une fonction de Hamilton analytique $H(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)$. Supposons, d'autre part, qu'on ait les intégrales premières analytiques indépendantes $I_1, I_2, \dots, I_k$ et que les conditions

$$I_1 = C_1 , \dots , I_k = C_k$$

déterminent dans l'espace Ω^{2s}, une variété analytique M^{2s-k}. On sait que pour presque toutes les valeurs $C_1, \dots, C_k$, une densité analytique invariante apparaît, d'une manière naturelle sur M^{2s-k}, ce qui permet d'appliquer au mouvement sur M^{2s-k} les principes généraux de la théorie métrique des systèmes dynamiques.

Il est naturel d'utiliser ces méthodes modernes dans les cas où, en plus des intégrales premières indépendantes $I_1, \ldots, I_k$, il n'y a pas d'autres intégrales premières, ou quand trouver d'autres intégrales premières apparaît trop difficile, et que les autres méthodes analytiques classiques, permettant d'achever l'intégration du système, apparaissent aussi inapplicables.

Dans de tels cas, il faut, à l'aide de telles ou telles considérations qualitatives, résoudre le problème suivant : Le mouvement sur M^{2s-k} sera-t-il transitif ? Nous entendons par là : rechercher si presque tout M^{2s-k} se compose d'une seule variété ergodique. S'il y a transitivité, nous devrons déterminer le caractère du spectre sur la variété ergodique. En l'absence de transitivité, nous devons étudier, à un ensemble de mesure nulle près, ou au moins à un ensemble de mesure arbitrairement petite près, le caractère de la décomposition de M^{2s-k} en variétés ergodiques, et le caractère du spectre sur ces variétés.

Nous connaissons seulement deux problèmes concrets de la mécanique classique dans lesquels ce programme ait été plus ou moins réalisé :

1° le cas du mouvement libre sur une surface fermée V^2 de courbure partout négative ([2]). HOPF, en 1939, a établi que le mouvement sur les variétés à 3 dimensions L_h^3 défini par la condition de constance de l'énergie $H = h$, est transitif et que le spectre est continu (voir [12]).

2° Comme on le verra plus loin dans le cas d'un mouvement libre sur une surface analytique suffisamment proche de l'ellipsoïde de l'espace euclidien à 3 dimensions, le mouvement sur L_h^3 n'est pas transitif, et à un ensemble de mesure nulle près, la variété se décompose en tores à 2 dimensions T^2, sur chacun desquels le mouvement est transitif et le spectre discret (voir fin du paragraphe 2).

Cependant, il me semble que le moment est aujourd'hui proche où il sera possible d'avancer considérablement dans cette direction.

([2]) Peut-être n'est-il pas inutile de remarquer que dans l'espace euclidien ordinaire, on peut considérer une surface fermée V^2 de genre 1, et disposer à son voisinage un nombre fini de centres d'attraction ou de répulsion qui définissent sur V^2 un potentiel de forces, de telle sorte que le mouvement d'un point matériel sur V^2, sous l'action des forces extérieures produites, soit équivalent mathématiquement au mouvement libre dans une métrique de courbure partout négative.

1. Les systèmes analytiques dynamiques et leurs propriétés stables.

Les systèmes dynamiques de la mécanique classique apparaissent comme des cas particuliers des systèmes dynamiques analytiques à invariant intégral. Le support d'un tel système dynamique est une variété analytique à n dimensions, soit Ω^n l'espace de phase du système. Dans ce système, les seules transformations des coordonnées $(x_1 , \dots , x_n)$ admissibles pour un point $x \in \Omega^n$ seront toujours analytiques.

Les membres de droite des équations différentielles qui déterminent le mouvement,

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = F_\alpha(x_1 , \dots , x_n) \tag{1}$$

et la densité invariante qui définit la mesure invariante

$$m(A) = \int_A M(x)\, dx_1 \dots dx_n$$

seront supposées être des fonctions analytiques des coordonnés [3].

Conformément à ce que nous avons dit dans l'introduction, nous nous occuperons surtout de systèmes canoniques, c'est-à-dire pour lesquels $n = 2s$, où les coordonnées $(p , q) \in \Omega^{2s}$ se séparent en 2 groupes $q_1 , \dots , q_s$ et $p_1 , \dots , p_s$, les transformations de coordonnées admissibles, sont des transformations de contact, et les équations canoniques prennent la forme

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} , \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \tag{2}$$

et la quantité invariante

$$M(p , q) = 1 .$$

On accordera une attention particulière à la recherche de propriétés des systèmes dynamiques réalisées pour des F_α et des M quelconques ou pour une fonction H quelconque dans le cas de systèmes canoniques. C'est-à-dire qu'on cherchera quelle propriété est typique, et quelle propriété au contraire peut être considérée comme une exception. Cette question est cependant fort délicate. On peut l'aborder du point de vue des ensembles exceptionnels dans les espaces fonctionnels

---

(3) Partout où nous parlons simplement de la mesure, sans la spécialiser ultérieurement, nous avons en vue la mesure m .

du système (F_α , M) ou de la fonction H . En dépit des progrès notables obtenus dans cette direction, dans la théorie générale des systèmes dynamiques abstraits, une semblable étude est plus intéressante comme moyen de démonstration de théorèmes d'existence, que pour répondre immédiatement à des questions réelles de physique et de mécanique même arbitrairement stylisées et idéalisées. Au contraire, attaquer la question du point de vue de la mesure apparaît tout-à-fait naturel. C'est ainsi qu'a argumenté par exemple von NEUMANN [21] . Mais, on se heurte à l'absence de mesure naturelle sur les espaces fonctionnels.

Nous allons suivre 2 voies.

a. Nous cherchons à obtenir des résultats positifs dans le sens suivant : reconnaître si un système dynamique appartient à l'un des cas d'exception ou au contraire à un des cas triviaux qu'on définira en donnant un sens convenable au mot exception, par exemple en négligeant des ensembles de mesure nulle. Nous utiliserons la notion de stabilité au sens conservation d'un type donné de positions des systèmes dynamiques quand on modifie très peu les fonctions F_α et M , et la fonction H . Un type donné de comportement d'un système dynamique pour lequel il existe un seul exemple de réalisation stable doit, de ce point de vue, être considéré comme important et ne pas être négligé. Au point de vue des transformations analytiques, conformément à l'approximation choisie , une petite variation d'une fonction $f_\theta(x)$ sera le passage de $f_o(x)$ à une fonction

$$f(x) = f_o(x) + \theta \varphi(x , \theta)$$

où le paramètre θ est petit, et la fonction φ analytique pour l'ensemble des variables $x_1 , x_2 , \dots , x_n , \theta$. Une telle approximation peut être critiquée, mais elle permet d'obtenir quelques résultats intéressants dans les cas où on peut se limiter à considérer les fonctions f_o et f comme dérivables jusqu'à un ordre borné; ceci sera indiqué.

b. Nous chercherons à obtenir des résultats négatifs sur le caractère exceptionnel de quelque évènement, en utilisant seulement quelques exemples. Dans la classe K des fonctions $f(x)$ on peut introduire un nombre fini de fonctionnelles

$$F_1(f) , F_2(f) , \dots , F_r(f)$$

qui, dans un sens ou dans un autre, peuvent être considérées comme prenant en général des valeurs quelconques

$$F_1(f) = C_1 , \dots , F_r(f) = C_r$$

dans une région quelconque d'un espace à r dimensions $C = (C_1, \dots, C_r)$. Nous dirons alors qu'un évènement donné, qui ne peut avoir lieu que lorsque C parcourt un ensemble dont la mesure de Lebesgue est nulle, est exceptionnel et doit être négligé.

Je vais maintenant envisager les cas concrets où ces idées peuvent s'appliquer à l'étude des systèmes dynamiques dont l'espace de base est un tore à 2 dimensions.

2. Les systèmes dynamiques sur le tore à 2 dimensions et quelques systèmes canoniques à 2 degrés de liberté.

Comme partout dans la suite, les points du tore T^2 seront donnés par 2 coordonnées circulaires x_1, x_2, le point x ne changeant pas lorsqu'on passe de x_α à $x_\alpha + 2\pi$. Les fonctions F_α qui se trouvent dans le 2e membre des équations :

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2)$$

et la densité invariante $M(x_1, x_2)$ seront supposées analytiques conformément à ce que nous avons déjà supposé, et de plus, nous les soumettons aux conditions

$$F_1^2 + F_2^2 > 0, \quad M > 0. \tag{1}$$

Pour simplifier, nous faisons encore l'hypothèse de normalisation : $m(T^2) = 1$. Introduisons les fréquences moyennes de révolution

$$\lambda_1 = \int_{T^2} F_1(x)\, dm \; ; \quad \lambda_2 = \int_{T^2} F_2(x)\, dm$$

en renforçant légèrement les résultats de POINCARÉ, DENJOY et KNESER, on parvient, dans ce cas, à la conclusion suivante : par une transformation analytique des coordonnées, les équations du mouvement peuvent être ramenées à la forme :

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 M(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 M(x_1, x_2).$$

Il est bien connu que dans le cas d'un rapport irrationnel

$$\boxed{\gamma = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}},$$

toutes les trajectoires sont partout denses, et la mesure m est transitive. D'autre part, d'après MARKOV [20], il est facile de démontrer que pour γ irrationnel, le système dynamique est fortement ergodique, c'est-à-dire qu'il contient une seule variété ergodique E dont les points aient une mesure

$$\boxed{\mu_\varepsilon = cm}$$

où c est une constante. L'affirmation naturelle, que le mouvement sur T^2, dans les conditions (1), possède en général toutes les propriétés que nous venons d'énumérer, apparaît maintenant comme une conséquence des principes généraux : l'on néglige, en effet, le cas où un nombre fini de fonctionnelles, ici λ_1 et λ_2, prennent leur valeur sur un ensemble de mesure nulle : ici l'ensemble des points λ_1, λ_2 dont le rapport est rationnel.

Dans la note [15], j'ai pu aller un peu plus loin. J'ai démontré, en effet, qu'en supposant l'existence d'un nombre c et d'un nombre h ($c > 0$ et $h > 0$) tel que, pour tout entier r et s ait lieu l'égalité

$$|r - s\gamma| \geqslant c\,h^s \tag{2}$$

les équations du mouvement peuvent être par une transformation analytique réduites à la forme :

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 , \quad \frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 . \tag{3}$$

Comme on le sait d'après la théorie des équations différentielles, la condition (2) est vérifiée, pour c et h convenables, pour presque tous les irrationnels γ. En conséquence, à l'exception du cas où γ peut être approché avec une approximation anormalement grande par des fractions $\frac{r}{s}$, un système analytique dynamique à invariant intégral sur le tore T^2, apparaît comme n'ayant que des solutions presque périodiques et même <u>conditionnellement périodiques</u> avec 2 fréquences indépendantes λ_1 et λ_2.

On connaît beaucoup de problèmes de la mécanique classique à 2 degrés de liberté avec $s = 2$, $n = 4$ dans lesquels l'existence de 2 intégrales premières univalentes dans tout Ω^4, I_1 et I_2, entraîne la décomposition de la variété Ω^4, à l'exception de quelques variétés singulières à 3 dimensions au plus, en variétés à 2 dimensions :

$$L^2_{C_1C_2} = L^2(I_1 = C_1 , \quad I_2 = C_2) .$$

Aux points d'équilibre sont vérifiées les 4 équations

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{\partial H}{\partial q_2} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = 0 .$$

Dans le cas d'une fonction H analytique, leur ensemble sur Ω^4 ne peut donc être qu'au plus dénombrable. C'est pourquoi, sur la variété L^2, ils ne peuvent apparaître qu'à titresexceptionnels. D'où l'on tire la conclusion que presque toutes les variétés compactes L^2 sont des tores. Ce sont en effet, des variétés compactes, orientables, à 2 dimensions, sur lesquelles est défini un champ de vecteurs qui ne comporte pas de vecteurs nuls.

Les problèmes de la mécanique classique du type considéré sont comme on le sait toujours intégrables. L'étude qualitative de problèmes spéciaux d'un tel type :

- mouvement sous l'action d'uneforce de pesanteur sur une surface de révolution,
- mouvement libre sur la surface d'un ellipsoïde de l'espace euclidien à trois dimensions,
- mouvement de points sur le plan, sous l'action de forces d'attraction newtonniennes émanant de deux centres immobiles... et problèmes semblables,

conduisent à un grand nombre d'exemples de décomposition de l'espace Ω^4 essentiellement en tores T^2, avec des trajectoires qui sont partout denses et correspondent à des mouvements périodiques avec 2 fréquences indépendantes λ_1 et λ_2. Entre ces tores en général, il y a un ensemble partout dense de tores qui correspondent à des fréquences commensurables (donc à des trajectoires fermées). Dans certains cas discrets, il apparaît des variétés singulières à 3 dimensions au plus sur lesquelles en particulier, se placent les points d'équilibre, et les mouvements qu'on appelle asymptotiques. L'examen de tels cas intégrables donne beaucoup d'exemples intéressants de décompositions assez compliquées de l'espace des phases Ω en variétés ergodiques et un reste formé de points non réguliers qui se trouvent sur les trajectoires des mouvements asymptotiques (4).

Dans la note [15] dont j'ai déjà parlé, on démontre que pour des irrationnels γ exceptionnels, qui ne vérifient pas la condition (2), il existe encore une série de possibilités nouvelles parfois assez inattendues pour les systèmes analytiques. Nous en parlerons plus tard. Dans les problèmes de la mécanique classique dont nous avons fait mention, ces cas exceptionnels n'apparaissent pas pour la simple raison suivante : le passage aux coordonnées circulaires ξ_1, ξ_2 sur les tores T^2 et aux paramètres de ces tores C_1, C_2 dans ces

---

(4) En relation avec cela, je remarque qu'une analyse qualitative très complexe de l'attraction par 2 centres immobiles, qui se trouve dans les traités bien connus de CHARLIER est apparue incomplète ou en partie inexacte et a dû être corrigée par deux fois [1], [25].

problèmes, s'effectue par des transformations de contact, aussi, les équations gardent-elles la forme canonique :

$$\frac{d\xi_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial C_\alpha} H , \quad \frac{dC_\alpha}{dt} = - \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} H$$

et, comme l'invariance des tores T^2 s'obtient seulement dans les cas où

$$\frac{dC_1}{dt} = \frac{dC_2}{dt} = 0 ,$$

la fonction H dépend seulement de C_1 et C_2 . Ceci conduit, sans aucune exception sur chacun des tores T^2 aux équations (3) avec des constantes λ_1 et λ_2 .

C'est pourquoi, la signification réelle pour la mécanique classique de l'analyse des systèmes sur T^2 que j'ai introduite, dépend de la chose suivante : l'existence d'exemples assez importants de systèmes canoniques à 2 degrés de liberté qui ne soient pas intégrables par des méthodes classiques et dans lesquelles, les tores à 2 dimensions, invariants pour les transformations de S^t, jouent un rôle assez important.

Pour se convaincre du fait que de tels exemples existent, considérons, en prenant un cas introduit par BIRKHOFF dans [3] , l'étude des voisinages d'un mouvement elliptique périodique, système qui comporte 2 coordonnées circulaires q_1 , q_2 et des moments p_1 , p_2 pour lesquels

$$H(p , q) = W(p) .$$

Les équations du mouvement prennent la forme :

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial W}{\partial p_\alpha} , \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = 0 .$$

Il est évident que les tores T^2_c définis par les conditions

$$p_1 = c_1 , \quad p_2 = c_2$$

sont invariants, et que sur chacun d'eux se produit un mouvement conditionnellement périodique d'équations :

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \lambda_\alpha(c) = \frac{\partial}{\partial c_\alpha} W(c_1 , c_2)$$

avec 2 fréquences qui dépendent des c. Supposons alors que le jacobien des fréquences λ_α par rapport aux moments p_α soit différent de zéro :

$$\left|\frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial p_\beta}\right| = \left|\frac{\partial^2 W}{\partial p_\alpha \, \partial p_\beta}\right| \neq 0 \tag{4}$$

il apparaît que dans ce cas, la décomposition du domaine considéré de Ω^4 en tores à 2 dimensions T^2 est certainement stable par rapport aux petites variations de H qui soient de la forme

$$H(p\,,\,q\,,\,\theta) = W(p) + \theta\, S(p\,,\,q\,,\,\theta)\ .$$

Pour obtenir une formulation précise, considérons le domaine $G \subseteq \Omega^4$ déterminé par les conditions $p \in B$, où B est une zône bornée de l'espace des points p. W et S étant supposées analytiques, et les conditions (4) vérifiées, on peut démontrer ce qui suit : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|\theta| < \delta$ dans le système dynamique

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} H(p\,,\,q\,,\,\theta)\ ,\quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial}{\partial q_\alpha} H(p\,,\,q\,,\,\theta)$$

tout le domaine G, à l'exception d'un ensemble de mesure inférieure à ε, se compose de T^2 sur chacun desquels le mouvement, exprimé dans les coordonnées circulaires ξ_1 et ξ_2 qui dépendent analytiquement de $(p\,,\,q)$, est déterminé par les équations

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \lambda_1\ ,\quad \frac{d\xi_2}{dt} = \lambda_2\ .$$

λ_1 et λ_2 sont constants sur chaque tore T^2, c'est-à-dire que les mouvements sont conditionnellement périodiques avec 2 périodes.

La méthode de la démonstration est la suivante : on étudie ce que deviennent les tores T_c^2 et les fréquences $\lambda_\alpha(c)$ qui vérifient la condition (2) lorsqu'on fait varier θ. On établit qu'un tel tore, pour une variation suffisamment petite de θ ne se décompose pas. Il se déplace seulement dans Ω en gardant sur soi les trajectoires du mouvement conditionnellement périodique avec les mêmes fréquences λ_α.

Beaucoup d'auditeurs ont déjà deviné qu'il s'agit essentiellement de reprendre quelque peu les idées qui ont été si longuement discutées en mécanique céleste, sur la possibilité d'éviter l'apparition de <u>petits dénominateurs</u> anormaux lorsqu'on calcule les orbites perturbées. Différente en cela de la théorie générale des perturbations, ma méthode fournit des résultats précis et non des considérations sur la convergence de séries de tel ou tel type d'approximation par rapport à θ . J'obtiens ce résultat de la manière suivante : au lieu de calculer des mouvements perturbés pour des données initiales fixes, je modifie également les données initiales, de sorte qu'en modifiant θ , j'aboutis toujours à des mouvements avec des conditions initiales (2) qui sont normales.

Je vais faire encore trois remarques à propos de ce qui vient d'être dit.

1° Le théorème de la réductibilité du mouvement sur T^2 à la forme (3) peut être démontré pour des conditions de différentiabilité d'ordre fini des fonctions F_α et M , naturellement avec un affaiblissement correspondant des conclusions. Le théorème sur la conservation des tores dans Ω^4 au contraire, exige visiblement sinon l'analyticité de $W(p)$ et de $S(p , q , \theta)$, au moins l'existence pour ces fonctions d'un nombre infini de dérivées soumises à quelques conditions sur l'ordre et la croissance.

2° L'ensemble exceptionnel de mesure inférieure à ε , considéré dans le 2e théorème, peut effectivement apparaître partout dense, et vraisemblablement, de mesure positive pour θ arbitrairement petit. Cette circonstance est analogue à l'apparition des zones d'instabilité que BIRKHOFF a rencontrées dans ses recherches sur le voisinage des trajectoires du type périodique.

3° Comme exemple de cas particulier auquel est applicable tout ce que nous avons dit plus haut, on peut indiquer le mouvement libre sur une surface analytique proche d'un ellipsoïde de l'espace euclidien à trois dimensions.

3. Les systèmes dynamiques sur des variétés compactes sont-ils en général transitifs, et convient-il de considérer le cas du spectre continu comme un cas général, et le cas du spectre discret comme un cas d'exception ?

L'hypothèse de l'importance prédominante du cas transitif et du cas du spectre continu a été souvent formulée en liaison avec les hypothèses ergodiques de la physique. Dans leur application aux systèmes canoniques, il est naturel de rapporter ces 2 hypothèses seulement aux variétés invariantes à $2s - 1$ dimensions L_h^{2s-1} qui sont définies par la constante d'énergie

$$H = h ,$$

et de les considérer seulement dans le cas de variétés L_h^{2s-1} compactes, puisque sur les variétés non compactes, dans les problèmes les plus simples, prédominent généralement les trajectoires dispersives dont on parlera plus loin dans le paragraphe 4 . Si l'on s'écarte de la première hypothèse, il est normal de rapporter la deuxième, non plus à toute la variété Ω^n ou à L_h^{2s-1} dans le cas des systèmes canoniques, mais à ces variétés ergodiques en lesquelles se décompose Ω^n , en se décidant, bien sûr, à négliger certaines variétés ergodiques dont la réunion aura une mesure nulle.

Lorsqu'on l'applique aux systèmes canoniques analytiques, il faut répondre de façon négative aux deux questions. En effet, les théorèmes de la stabilité de la décomposition en tores que nous avons démontrés pour les systèmes à deux degrés de liberté se conservent aussi pour un nombre quelconque de degrés de liberté. Si dans la couche toroïde à deux dimensions, G , de l'espace des phases Ω^{2s} ,

$$H(p , q , \theta) = W(p) + \theta S(p , q , \theta)$$

pour $\theta = 0$, cette couche se décompose visiblement en tores s dimensionnels invariants T_p^s sur chacun desquels le mouvement est conditionnellement périodique avec s périodes, et dans le cas où

$$\left|\frac{\partial^2 W}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\right| \neq 0$$

sur presque tous les tores T_p^s les périodes sont indépendantes en ce sens que toute expression de la forme (n , λ) est telle que :

$$(n , \lambda) = \sum_\alpha n_\alpha \lambda_\alpha \neq 0$$

quel que soit n_α . Pour cette raison, les trajectoires sont partout denses sur le tore et la mesure de Lebesgue à s dimensions sur T^s est transitive. Tout le tore apparaît comme une seule variété ergodique. Les théorèmes 1 et 2 de ma note [16] assurent que dans les conditions précédentes, pour de petites valeurs de θ , tout ce tableau change seulement dans quelques tores correspondants à des systèmes de fréquences pour lesquelles les expressions du type (n , λ) décroissent trop vite quand

$$|\vec{n}| = \sqrt{\sum n_\alpha^2}$$

s'accroît. Sur la majorité des tores T_p^s , le caractère des mouvements originaux se conserve. Il y a seulement un petit déplacement dans Ω^{2s} qui se poursuit pour les petites valeurs de θ et qui donne les trajectoires recouvrant G à un ensemble de mesure nulle près. Pour de petites variations de H , le système dynamique reste non transitif. La région G , définie à un ensemble de petite mesure près, continue à se décomposer en variétés ergodiques à spectre discret dont la nature est celle que nous avons précisée.

En liaison avec ce problème, il est intéressant de remarquer que certains physiciens, (cf. par exemple L. LANDAU et L. PJATIGORSKIJ [19]) ont émis l'hypothèse qu'en général, un système dynamique canonique Ω^{2s} sans trajectoire dispersive se décompose en tores T^s qui portent sur eux des mouvements conditionnellement périodiques à s périodes. Cette idée s'appuie visiblement sur l'observation exclusive de systèmes linéaires et sur la restriction aux cas intégrables de la mécanique classique. Il convient, en tous cas, de remarquer que les méthodes de démonstration du théorème introduit plus haut, sont étroitement liées à la décomposition de Ω^{2s} en T^s et ne sont pas applicables à la décomposition en tores d'une autre dimension $r > s$ ou $r < s$. Dans le cas général, l'hypothèse que nous venons d'utiliser ne peut pas être conservée. Il est très vraisemblable que pour s quelconque, il existe des exemples de systèmes canoniques à s degrés de liberté qui soient stables sur les variétés L_h^{2s-1}. J'ai en vue le mouvement sur les géodésiques d'une variété compacte V^s de courbure constante négative : c'est-à-dire, les systèmes avec :

$$(1) \qquad H(p\ ,\ q) = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}(q)\ p_\alpha\ p_\beta$$

où les g_α sont les coordonnées sur la variété compacte V^s de courbure négative constante, et les $g_{\alpha\beta}$ des composantes du tenseur métrique sur V^s .

La stabilité de la propriété de courbure négative par rapport aux faibles variations des fonctions $g_{\alpha\beta}(q)$ ne demande aucun éclaircissement. La difficulté provient seulement du fait que modifier les $g_{\alpha\beta}(q)$ n'est pas la seule façon possible de modifier le hamiltonien $H(p\ ,\ q)$, que la transitivité pour $s > 2$ n'est démontrée que pour le cas d'une courbure constante, et que dans ce cas, lorsqu'on change de $g_{\alpha\beta}$, la courbure va cesser d'être constante. Cette deuxième difficulté disparaît dans le cas $s = 2$ pour lequel, la transitivité est démontrée aussi pour la courbure variable. La première n'existe pas si on se limite aux fonctions de la forme :

$$(2) \qquad H(p\ ,\ q) = U(q) + \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}(q)\ p_\alpha\ p_\beta\ .$$

La mécanique classique s'occupe surtout des fonctions (2) puisque, par passage à une nouvelle métrique, les systèmes de la forme (2) se ramènent à la forme (1).

Si l'on se souvient de ce qui a été dit antérieurement du mouvement libre sur les surfaces proches d'un ellipsoïde de l'espace euclidien à 3 dimensions, on en vient à la conclusion que, déjà dans les problèmes les plus simples de la mécanique classique, il faut considérer comme stables et ayant également droit à notre attention au moins deux cas bien distincts : l'un est lié à la transitivité sur les variétés L_h^3 d'énergie constante et à un spectre continu ; l'autre à l'absence de transitivité et à un spectre essentiellement discret. Je ne connais pas de résultats analogues sur la stabilité de tel ou tel type général de comportement des systèmes non canoniques à invariants intégraux sur des compacts Ω^n .

4. Quelques remarques sur le cas non-compact.

Dans le cas d'un compact, on a la particularité importante suivante : il peut exister des trajectoires qui pour t tendant vers $\pm\infty$ sortent de toute partie compacte de Ω . J'exposerai ici quelques résultats généraux de la théorie ergodique, qui s'appliquent pour tout courant continu S^t dans un espace localement compact Ω . Une fuite uni-latérale à l'infini n'est possible que pour des trajectoires qui forment un ensemble de mesure nulle. Je définirai donc un point x qui s'écarte par la condition suivante : pour tout compact K , il existe un nombre T tel que tous les points de S_x^t avec $|t| > T$ se trouvent à l'extérieur de K . Par Ω'' , nous désignons l'ensemble de tous les points qui s'en vont à l'infini. Pour étudier en détail les cas complets de systèmes dynamiques classiques, il est raisonnable de construire une théorie ergodique individuelle, non pas sous la forme purement métrique qui est exposée dans le livre de HOPF [11] , mais plutôt suivant des travaux antérieurs de HOPF [10] et STEPANOV [24] , et en certains points, en suivant l'exposé de KRYLOV et BOGOLJUBOV [18] , quoiqu'ils aient en vue le cas compact.

Pour un tel exposé, il reste fondamental comme dans le cas compact, d'introduire la notion de point régulier. Un point x est régulier s'il existe pour lui une mesure invariante μ jouissant des propriétés suivantes :

1° La mesure du complémentaire dans Ω de $\bar{I}_x$ est nulle, soit $\mu(\Omega - \bar{I}_x) = 0$ où $\bar{I}_x$ est la fermeture de la trajectoire qui passe par x .

2° $\mu(V_y) > 0$ pour un voisinage V_y quelconque d'un point $y \in I_x$.

3° Pour deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ continues et différentes de zéro sur un compact,

$$\lim \frac{\int_a^T f(S_x^t)\, dt}{\int_a^T g(S_x^t)\, dt} = \frac{\int_\Omega f\, d\mu}{\int_\Omega g\, d\mu}$$

si seulement

$$\int_{\Omega} g \, d\mu \neq 0$$

4° μ est transitive.

Comme nous n'avons pas de conditions de normalisation, la mesure μ est définie pour un point, seulement à un multiplicateur constant près. Nous la désignerons cependant par μ_x , et nous l'appellerons mesure individuelle du point x . A cause de cela, il convient de modifier quelque peu la définition des variétés ergodiques. Deux points x et x' appartiennent à la même variété ergodique, si leurs mesures individuelles sont identiques au sens de l'identité à un facteur constant près. Ainsi, toutes les variétés Ω' de points réguliers peuvent s'exprimer comme somme de variétés ergodiques

$$\Omega' = \sum \varepsilon .$$

Les mesures μ_ε sont, elles aussi, définies par les variétés ergodiques à un facteur constant près.

Le théorème ergodique <u>individuel</u> affirme que :

$$\Omega = \Omega' + \Omega'' + N , \qquad \text{où } \lambda(N) = 0$$

pour toute mesure invariante λ . Pour nous, la relation

$$m(N) = 0$$

est essentielle.

Une mesure invariante transitive μ est : ou bien μ_ε de l'une des variétés ergodiques ε , ou bien du type

$$\mu(A) = r_I(A \cap I)$$

où r_I est une mesure "temporelle" sur une trajectoire I qui s'écarte à l'infini. A la différence du deuxième cas trivial, il est naturel d'appeler ergodique les mesures du premier type, car il leur correspond une variété ε_μ avec

$$\mu_{\varepsilon_\mu} = \mu .$$

Mes considérations, qui dans le cas d'un compact Ω peuvent être utilisées pour affirmer que le système dynamique le plus général est transitif, donnent, dans le cas d'un système non-compact, les résultats suivants : en général, on se trouve dans un des deux cas ci-après. Le système est dispersif, c'est-à-dire que presque tous les points ont des trajectoires s'écartant vers l'infini, ou bien la mesure m est ergodique. Il est évident que dans le deuxième cas, les points s'éloignant à l'infini ne forment qu'un ensemble de mesure nulle.

On applique quelquefois cette hypothèse à un problème particulier de la mécanique classique sous la forme suivante. Supposons que le problème donné ait un certain nombre d'intégrales premières, et qu'on ne pense pas en trouver d'autres, la donnée des valeurs des intégrales premières connues définit des variétés, on considère alors comme vraisemblable que la transitivité a lieu sur ces variétés. Pour justifier une telle hypothèse, on peut remarquer que, d'après les recherches de HEDLUND et HOPF, cette alternative a lieu pour les mouvements sur les géodésiques de l'espace à courbure constante négative.

Si on sait qu'il existe un ensemble de mesure positive formé de points qui vont à l'infini, il est alors naturel de penser que le système est dispersif. Visiblement, c'est sur des idées analogues qu'est fondée l'hypothèse de BIRKHOFF sur le caractère dispersif du problème des trois corps.

Cependant, il est vraisemblable que par les méthodes indiquées dans le paragraphe 3 pour les systèmes canoniques, on peut construire des exemples où l'on trouve à la fois de façon stable dans Ω^{2s} , une partie dispersive de mesure > 0 , et un domaine positif G qui est rempli essentiellement de tores s-dimensionnels invariants.

Pour parler de questions plus élémentaires, je remarquerai que les spécialistes de la théorie qualitative des équations différentielles s'occupent peu de problèmes concrets sur les trajectoires de divers types s'en allant à l'infini. On peut en donner un exemple frappant. Pour rejeter la question de CHAZY sur la possibilité de capture et d'échange dans le problème des trois corps, [5], [6], on n'eut d'abord que les mémoires de BECKER [2] et ŠMIDT [23] qui ne manquaient d'ailleurs pas de fautes logiques, ni de calculs fort lourds. C'est seulement très récemment, qu'un exemple de capture a été conçu par SITNIKOV [22] d'une façon très simple et presque sans calculs.

5. Mesure transitive, spectre et fonctions propres des systèmes analytiques.

Nous disons qu'une mesure μ dans Ω^n est analytique, si elle peut être donnée sous la forme :

$$\mu(A) = \int_{V^k \cap A} f(\xi)\, d\xi , \dots , d\xi_k$$

où V^k est une variété analytique localement fermée dans Ω^n, d'une dimension quelconque $k \leq n$, et f une fonction des coordonnées ξ_α sur V^k dépendant analytiquement des coordonnées x_α de Ω^n.

La variété V^k est déterminée de façon unique par la mesure μ si celle-ci n'est pas identiquement nulle. Le nombre k peut donc pour cette raison, être appelé dimension de la mesure μ.

Nous nous intéresserons spécialement aux mesures transitives. Dans ce cas, la variété V^k doit être invariante. Des variétés invariantes de même dimension ne se coupent pas. Celles de dimensions différentes ne peuvent qu'être incluses les unes dans les autres (une de petite dimension dans une plus grande). Chaque variété invariante porte sur soi au plus une mesure transitive. D'après ce qui a été dit, le système des mesures transitives analytiques a une structure assez intuitive.

Jusqu'à ces temps derniers, dans les systèmes analytiques, on ne connaissait que des mesures analytiques transitives. Ce n'est que très récemment que GRABAR [9], ayant construit un analogue analytique de l'exemple de MARKOV (systèmes analytiquement irréductibles mais non strictement ergodiques) a pu donner un exemple de mesure non analytiquement transitive dans les systèmes analytiques. Il est possible, cependant, que la somme de toutes les variétés ergodiques non analytiques soient toujours négligeables au sens de la mesure fondamentale m..

Les variétés ergodiques correspondent biunivoquement à leurs mesures $\mu_\mathcal{E}$ qui, par définition, sont transitives.

Examinons le cas des variétés ergodiques correspondant à des mesures analytiques transitives qui ne se réduisent pas à la mesure $\mu_\mathcal{E}$ d'une trajectoire. Nous remarquons que, dans le cas d'une mesure analytique $\mu_\mathcal{E}$, la variété ergodique se trouve sur le support de la mesure $\mu_\mathcal{E}$ qui est partout dense mais que déjà dans les cas simples d'exemples classiques, le complémentaire $V^r - \mathcal{E}$ peut être partout dense sur V^r.

Les propriétés spectrales des mesures transitives sur les systèmes analytiques sont peu étudiées. Les spectres discrets n'ont été obtenus qu'avec une base finie de fréquences indépendantes

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_x,$$

et pour la mesure analytique, un nombre de fréquences indépendantes égal dans tous les cas à la dimension de ces variétés.

Le spectre continu a été complètement déterminé seulement tout récemment par GELFAND et FOMIN [7], [8] pour quelques cas de mouvement le long des géodésiques sur des surfaces à courbure constante négative. Dans ces cas, le spectre est un spectre de Lebesgue dénombrablement multiple.

Il n'est pas exclu que les cas que nous venons de rencontrer soient les seuls cas généraux pour les systèmes analytiques transitifs.

Pour les mesures non analytiques transitives, il est bien plus probable que la structure est tout-à-fait quelconque. Cela ne ferait pas de doute si l'on avait établi un analogue analytique du théorème de KAKUTANI [13] sur le prolongement isométrique d'un courant quelconque dans le mouvement d'un système dynamique continu.

En ce qui concerne les fonctions propres, arrêtons-nous quelques instants sur l'exemple d'un système analytique dynamique sur le tore à deux dimensions T^2 avec un spectre discret et des fonctions propres partout discontinues. Il est vrai que cet exemple, lié à une approximation anormalement rapide de l'expression rationnelle $\frac{r}{s}$ du rapport $\gamma = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ des fréquences moyennes est, de par ses origines mêmes, un cas tout-à-fait exceptionnel. Pour étudier la question de plus près, envisageons de nouveau les équations du mouvement sur le tore à deux dimensions en introduisant le paramètre θ qui varie dans certaines limites $[\theta_1 , \theta_2]$

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = F_\alpha (x_1 , x_2 , \theta)$$

Nous supposerons que les fonctions $F_\alpha (x_1 , x_2 , \theta)$ sont analytiques. Il est alors évident que le rapport des fréquences moyennes $\gamma(\theta)$ dépendra analytiquement de θ. Si $\gamma(\theta)$ n'est pas constant, l'ensemble R de tous les θ pour lesquels le système peut être transformé analytiquement en un système de la forme

$$\frac{d\xi_\alpha}{dt} = \lambda_\alpha$$

remplira presque tout le segment $[\theta_1 , \theta_2]$. Les fonctions propres

$$\varphi_{m,n} = e^{i(m\lambda_1 + n\lambda_2)} ,$$

par retour aux coordonnées initiales x_1, x_2, seront pour $\theta \in R$ des fonctions analytiques de x_1 et x_2. En général, même sur R, elles seront sur cet ensemble partout discontinues en θ , et cette discontinuité ne pourra pas être supprimée en rejetant de R un ensemble de mesure nulle. Cela a ceci de remarquable que $\varphi_{m,n}(x_1 , x_2 , \theta)$ peut être prolongée dans certains points du complémentaire de R . $[(\theta_1 , \theta_2) - R]$ grâce à l'hypothèse qu'elle n'est pas analytique, mais continue en x_1 et x_2 .

Il est possible que la dépendance de $\varphi_{m,n}(x_1 , x_2 , \theta)$ par rapport aux variables θ sur R se rattache à une classe de fonctions du type des fonctions monogènes de BOREL [4] , qui en dépit de leur caractère partout discontinu se laissent étudier par tel ou tel moyen analytique.

CONCLUSION. - J'estimerai avoir atteint mon but, si j'ai pu convaincre mes auditeurs de ce qu'en dépit de grandes difficultés, et du caractère relatif des résultats qu'on a déjà obtenus, le problème posé de l'utilisation des notions générales de la théorie ergodique contemporaine, pour l'analyse des propriétés qualitatives de systèmes analytiques et particulièrement des systèmes canoniques, mériterait l'attention de chercheurs capables de saisir les liaisons multiples que l'on trouve là, avec les branches les plus diverses des mathématiques. En conclusion, je remercie le comité d'organisation de la possibilité qu'il m'a donnée de lire ce rapport.

BIBLIOGRAPHIE (5)

[1] BADALJAN (G. K.). - Trudy vtorogo vsesojuznogo matematičeskogo s"ezda, [Travaux du 2e Congrès panunioniste, Leningrad, 1934] , t. 2. - Moskva, Akad. Nauk SSSR, 1936 ; p. 239-241.

[2] BECKER (L.). - On capturs orbits, Monthly Notices of royal astr. Soc., t. 80, 1920, p. 590-597.

[3] BIRKHOFF (George D.). - Dynamical systems. - New-York, American mathematical Society, 1927 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., n° 9).

[4] BOREL (Emile). - Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe. - Paris, Gauthier-Villars, 1917 (Collection de monographies sur la théorie des fonctions).

[5] CHAZY (Jean). - Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 8, 1929, p. 353-380.

[6] CHAZY (Jean). - Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps, Bull. astr., 2e série, t. 8, 1932, p. 403-436.

---

(5) Les références bibliographiques citées, ici, sont celles du mémoire de A. N. KOLMOGOROV, mais elles ont été précisées et rangées suivant l'ordre alphabétique des auteurs, conformément à l'usage suivi dans le Séminaire.

[7] GEL'FAND (I.M.) i FOMIN (S.V.). - Unitarnye predstavlenija grupp li i potoki geodezičeskikh na poverkhnostjakh postojannoj otricatel'noj krivizny, Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 76, 1951, p. 771-774.

[8] GEL'FAND (I.M.) i FOMIN (S.V.). - Geodesic flows on manifolds of constant negative curvature, Uspekhi Matem. Nauk, N.S., t. 7, 1952, p. 118-137.

[9] GRABAR' (M. I.). - O strogoj èrgodičnosti dinamičeskikh sistem, Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 95, 1954, p. 9-12.

[10] HOPF (Eberhard). - Zwei Sätze über den wahrscheinlichen Verlauf der Bewegungen dynamischer System, Math. Annalen, t. 103, 1930, p. 710-719.

[11] HOPF (Eberhard). - Ergodentheorie. - Berlin, Springer, 1937 (Ergebnisse der Mathematik ..., Fünfter Band, n° 2).

[12] HOPF (Eberhard). - Statistik der geodätischen Linien in Mannigfalgigkeiten negativer Krümmung, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, t. 91, 1939, p. 261-304.

[13] KAKUTANI (Shizuo). - Representation of measurable flows in euclidean 3-space, Proc. nat. Acad. Sc. U.S.A., t. 28, 1942, p. 16-21.

[14] KAKUTANI (Shizuo). - Ergodic theory, Proceedings of the international Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950. - Providence, American mathematical Society, 1952 ; p. 128-142.

[15] KOLMOGOROV (A. H.). - O dinamičeskikh sistemakh s integral'nym invariantom na tore, Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 93, 1953, p. 763-766.

[16] KOLMOGOROV (A. H.). - O sokhranenii uslovno periodičeskikh dviženij pri malom izmenenii funkcii gamil'tona, Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 98, 1954, p. 527-530.

[17] KOLMOGOROV (A. H.). - Théorie générale des systèmes dynamiques de la mécanique classique [en russe] , Proceedings of the international Congress of Mathematicians [1954. Amsterdam], vol. 1. - Groningen, Noordhoff et Amsterdam, North-Holland publishing, 1957 ; p. 315-333.

[18] KRYLOV (N.M.) i BOGOLJUBOV (N.H.). - La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire, Annals of Math., Series 2, t. 38, 1937, p. 65-113.

[19] LANDAU (L.) i PJATIGORSKIJ (L.). - Mekhanika, 1940.

[20] MARKOV (A. A.). - Trudy vtorogo vsesojuznogo matematičeskogo s"ezda, [Travaux du 2e Congrès panunioniste, Leningrad, 1934] , t. 2. - Moskva, Akad. Nauk SSSR, 1936 ; p. 227-232.

[21] von NEUMANN (Johann). - Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. - Berlin, Springer, 1932 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften ..., n° 38).

[22] SITNIKOV (K. A.). - O vozmožnosti zakhvata v zadače trekh tel, Recueil math. Soc. math. Moscou (Mat. Sbornik), t. 32, 1953, p. 693-705.

[23] ŠMIDT (O. J.). - Doklady Akad. Nauk SSSR, N.S., t. 58, 1947, p. 213-216.

[24] STEPANOV (W.). - Sur une extension du théorème ergodique, Compos. Math., t. 3, 1936, p. 239-253.

[25] TALLQVIST (N. J.). - Acta Soc. sc. Fennicae, N. S., sect. A, t. 1, 1927, n° 1-6.