SÉMINAIRE JANET.
MÉCANIQUE ANALYTIQUE
ET MÉCANIQUE CÉLESTE

PHAM MAU QUAN

Le principe de fermat en relativité générale

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 1 (1957-1958), exp. nº 5, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1957-1958__1__A5_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de MÉCANIQUE ANALYTIQUE
et de MÉCANIQUE CÉLESTE
Année 1957/58
-:-:-:-

15 février 1958

LE PRINCIPE DE FERMAT EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

par PHAM MAU QUAN

1. Introduction.

Le principe de Fermat en optique peut s'énoncer sous la forme suivante qui le rapproche du principe de Maupertuis ou de moindre action. Dans un milieu transparent isotrope d'indice de réfraction n variable, les rayons lumineux sont les extrêmales du chemin optique défini par l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} n \, d\sigma$$

où $d\sigma$ est l'élément linéaire de l'espace.

On peut obtenir une démonstration de ce principe en partant de l'idée suivante.

La lumière est un phénomène électromagnétique gouverné par les équations de Maxwell qui sont un système d'équations aux dérivées partielles auxquelles doivent satisfaire les champs et inductions électromagnétiques. Les variétés caractéristiques de ces équations représentent les surfaces d'ondes électromagnétiques et les bicaractéristiques, les rayons électromagnétiques associés. Leur étude permet de trouver les lois de propagation du champ électromagnétique et en particulier celles de la lumière. Le principe de Fermat doit en être une conséquence.

Pour faire cette étude, il est nécessaire d'établir d'abord les équations de la théorie électromagnétique de Maxwell en relativité générale. Or primitivement la relativité générale est une théorie du champ de gravitation. Pour élargir la description de l'univers, on est conduit à introduire le champ électromagnétique. On peut pour cela ajouter simplement les équations de Maxwell aux équations d'Einstein en exprimant l'interférence des champs gravitationnel et électromagnétique grâce à des termes entrant dans leurs seconds membres.

L'étude de l'électromagnétisme en relativité restreinte conduit à représenter les champs et inductions électromagnétiques par un couple de tenseurs antisymétriques d'ordre 2 : $H_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$. Dans un repère orthonormé déterminé, les H_{0i} , G_{0i}

donnent les composantes du champ et de l'induction électrique et les H_{ij} , G_{ij} celles de l'induction et du champ magnétiques. Elles sont telles que

$$(G_{0i}) = \varepsilon\ (H_{0i}) \qquad \mu(G_{ij}) = (H_{ij})$$

où ε et μ représentent le pouvoir diélectrique et la perméabilité magnétique au point considéré. Comme la variété espace-temps V_4 possède en chaque point un espace vectoriel tangent du type de Minkowski, il est naturel pour décrire les phénomènes électromagnétiques dans l'univers de se donner sur V_4 un couple de tenseurs antisymétriques d'ordre 2 qu'on rapporte aux coordonnées admissibles de V_4 .

Dans une première partie, j'établirai les équations relativistes de l'induction électromagnétique ; j'étudierai les caractéristiques des équations généralisées de Maxwell en montrant que les rayons électromagnétiques sont géodésiques de longueur nulle d'une variété riemannienne associée $\overline{V}_4$. Dans une seconde partie, je ferai l'étude géométrique des rayons électromagnétiques dans l'espace à trois dimensions Cette étude fournira l'énoncé généralisé du principe de Fermat dont l'existence est liée à celle d'univers stationnaire.

I. INDUCTIONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

2. Inductions électromagnétiques.

Considérons un domaine D de l'espace-temps V_4 rapporté à des coordonnées locales x^α et muni de la métrique d'univers

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \quad . \tag{2.1}$$

Supposons que le domaine D soit occupé par une distribution énergétique schématisée sous forme de fluide chargé et conducteur. Soit $\vec{u}$ le vecteur vitesse unitaire.

Une induction électromagnétique est définie sur le domaine D lorsqu'il existe sur D deux champs de tenseurs antisymétriques $H_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$ et deux matrices $(\varepsilon^\alpha_\beta)$, (μ^α_β) dites matrices d'induction tels que

$$G_{\alpha\beta}\, u^\alpha = \varepsilon^\rho_\beta H_{\alpha\rho} u^\alpha \qquad \mu^\rho_\beta \overset{*}{G}_{\alpha\rho} u^\alpha = \overset{*}{H}_{\alpha\beta}\, u^\alpha \tag{2.2}$$

où $\overset{*}{H}_{\alpha\beta}$, $\overset{*}{G}_{\alpha\beta}$ désignent les tenseurs adjoints à $H_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$

$$\overset{*}{H}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} H^{\gamma\delta} \qquad \overset{*}{G}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} G^{\gamma\delta} . \tag{2.3}$$

Je me bornerai ici au cas où les deux matrices d'induction représentent deux homothéties. Les relations (2.2) se réduisent à

(2.4) $$G_{\alpha\beta}\, u^{\alpha} = \varepsilon H_{\alpha\beta}\, u^{\alpha} \qquad \mu \overset{*}{G}_{\alpha\beta}\, u^{\alpha} = \overset{*}{H}_{\alpha\beta}\, u^{\alpha}$$

où ε et μ sont deux scalaires. Ces équations de liaison permettent d'exprimer $G_{\alpha\beta}$ en fonctions de $H_{\alpha\beta}$

(2.5) $$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} H_{\alpha\beta} + \frac{1 - \varepsilon\mu}{\mu} (H_{\sigma\alpha}\, u^{\sigma}\, u_{\beta} - H_{\sigma\beta}\, u^{\sigma}\, u_{\alpha}) .$$

Pour $\varepsilon\mu = 1$, les deux tenseurs $H_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta}$ sont proportionnels.

Les deux champs de tenseurs $H_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta}$ doivent satisfaire à deux systèmes de quatre équations aux dérivées partielles qui ne sont autre que la traduction en relativité générale des équations de Maxwell, soient

(2.6) $$\mathcal{E}^{\delta} \equiv \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\, \nabla_{\alpha} H_{\beta\gamma} = 0 \qquad \mathcal{G}^{\beta} \equiv \nabla_{\alpha} G^{\alpha\beta} = \chi' J^{\beta}$$

où χ' est une constante que l'on peut réduire à 1 par un choix judicieux des unités et J^{β} le vecteur courant électrique qui décrit la distribution de l'électricité dans le domaine considéré. On peut faire l'hypothèse

(2.7) $$J^{\beta} = \delta u^{\beta} + \sigma u_{\alpha}\, H^{\alpha\beta} .$$

Le vecteur courant électrique possède ainsi une composante δu^{β} colinéaire à u^{α} qui représente le courant de convection et une composante $\sigma u_{\alpha} H^{\alpha\beta}$ orthogonale à u^{α} qui représente le courant de conduction. Les scalaires δ et σ représentent la densité de charge et la conductivité électrique du milieu.

On notera que le premier groupe des équations de Maxwell exprime les conditions nécessaire et suffisante pour qu'il existe localement un vecteur φ_{α} dont $H_{\alpha\beta}$ est le rotationnel $H_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha} \varphi_{\beta} - \partial_{\beta} \varphi_{\alpha}$. φ_{α} est dit potentiel-vecteur pour le champ électromagnétique. On démontre que les vecteurs $\mathcal{E}^{\alpha}$ et $\mathcal{G}^{\alpha}$ qui figurent aux premiers membres des deux groupes d'équations de Maxwell vérifient les identités

(2.8) $$\nabla_{\alpha} \mathcal{E}^{\alpha} = 0 \qquad \nabla_{\alpha} \mathcal{G}^{\alpha} = 0$$

qui traduisent la conservation de l'électricité. En particulier la deuxième identité donne

(2.9) $$\nabla_{\alpha} J^{\alpha} = \nabla_{\alpha} (\delta u^{\alpha} + \sigma u_{\rho}\, H^{\rho\alpha}) = 0$$

3. Variétés caractéristiques et bicaractéristiques des équations de Maxwell.

En relativité générale, les équations de l'électromagnétisme sont constituées par l'ensemble des équations de Maxwell et des équations d'Einstein. Les ε, μ, σ étant des fonctions données de x^α, les variables de champ sont les $g_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$, δ, u^α. Les équations d'Einstein doivent déterminer les $g_{\alpha\beta}$ et u^α. Considérons en particulier les équations de Maxwell pour lesquelles nous étudions le problème de Cauchy. On se donne sur l'hypersurface S d'équation locale $x^0 = 0$, les valeurs des $(H_{\alpha\beta})$ et on cherche à déterminer les valeurs sur S des dérivées obliques $\partial_0 H_{\alpha\beta}$. Les équations de Maxwell sont équivalentes à l'ensemble des deux systèmes

$$\mathcal{E}^k \equiv \frac{1}{2} \eta^{0ijk} \partial_0 H_{ij} + \psi^k = 0 \tag{3.1}$$

$$\mathcal{B}_i \equiv \frac{1}{\mu} (g^{00} - (1-\varepsilon\mu)(u^0)^2) \partial_0 H_{0i} + \frac{1}{\mu} (g^{0j} - (1-\varepsilon\mu)\, u^0 u^j) \partial_0 H_{ji} + \phi_i = \delta u_i + \sigma u^\alpha H_{\alpha i} \tag{3.2}$$

(où ψ^k et ϕ_i sont des quantités connues sur S) et aux deux identités vérifiées sur S

$$\mathcal{E}^0 \equiv \frac{1}{2} \eta^{0ijk} \partial_i H_{jk} = 0 \tag{3.3}$$

$$\mathcal{B}^0 = \delta u^0 + \sigma u_\alpha H^{\alpha 0} \tag{3.4}$$

où $\mathcal{B}^0$ ne dépend pas des $\partial_0 H_{\alpha\beta}$. (3.3) exprime que le tenseur H_{ij} induit sur S dérive localement d'un potentiel vecteur.

Si l'hypersurface S n'est pas exceptionnelle, l'équation (3.4) fournit la valeur de δ, les équations (3.1) déterminent les valeurs des $\partial_0 H_{ji}$ et les équations (3.2) celles des $\partial_0 H_{0i}$ sur S.

Les variétés caractéristiques des équations de Maxwell sont nécessairement telles que

$$g^{00} - (1 - \varepsilon\mu)(u^0)^2 = 0 \, .$$

Dans un système de coordonnées locales arbitraire quelconque, elles sont définies par

$$\bar{\Delta}_1 f \equiv \bar{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \, \partial_\beta f = 0 \quad \text{où} \quad \bar{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - (1 - \varepsilon\mu)\, u^\alpha u^\beta \tag{3.6}$$

et sont tangentes aux cônes caractéristiques $\bar{C}_x$

$$\bar{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \, dx^\beta = 0 \qquad \bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - (1 - \frac{1}{\varepsilon\mu})\, u_\alpha u_\beta \, . \tag{3.7}$$

Ces cônes caractéristiques des équations de Maxwell sont en général distincts des cônes caractéristiques des équations d'Einstein. Ils leur sont intérieurs si $\varepsilon\mu > 1$ et coïncident avec eux pour $\varepsilon\mu = 1$.

Les cônes caractéristiques $\bar{C}_x$ des équations de Maxwell définissent la métrique associée

(3.8) $$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \equiv \left(g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) u_\alpha u_\beta\right) dx^\alpha dx^\beta .$$

Si nous introduisons la variété riemannienne $\bar{V}_4$ définie par la variété différentiable portant l'espace-temps et munie de la métrique associée, les cônes caractéristiques des équations de Maxwell sont cônes élémentaires de $\bar{V}_4$. Les variétés caractéristiques V_3^M des équations de Maxwell sont alors des variétés tangentes en chaque point aux cônes élémentaires de $\bar{V}_4$. Une variété caractéristique V_3^M c'est-à-dire une solution de (3.6) peut être engendrée au moyen des bandes caractéristiques qui sont des bandes de $\bar{V}_4$ constituées par l'ensemble d'une courbe L_0 et d'une famille à un paramètre de 3-plans élémentaires tangents à ces courbes Les courbes L_0 sont les bicaractéristiquesdes équations de Maxwell.

Introduisons le vecteur $l_\alpha = \partial_\alpha f$ qui est isotrope d'après (3.6). Sa direction est la direction commune au cône élémentaire $\bar{C}_x$ et au 3-plan tangent en x à la variété caractéristique V_3^M. Par suite le vecteur l_α est tangent à la bicaractéristique L_0 passant au point x considéré. Les bicaractéristiques L_0 sont les trajectoires du champ de vecteur l_α.

Or d'après sa définition, l_α est un gradient,

$$\bar{\nabla}_\alpha l_\beta - \bar{\nabla}_\beta l_\alpha = 0$$

Par multiplication contractée avec l^α, il vient

$$l^\alpha \bar{\nabla}_\alpha l_\beta = 0$$

propriété caractérisant les géodésiques. Nous énonçons le théorème

THÉORÈME. Les bicaractéristiques des équations de Maxwell sont les géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne $\bar{V}_4$ munie de la métrique associée

(3.9) $$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta .$$

Dans le language de la théorie de la propagation par ondes, les variétés caractéristiques V_3^M jouent le rôle de surfaces d'ondes électromagnétiques. Les bicaractéristiques L_0 sont les rayons électromagnétiques associés. Pour qu'elles aient une signification physique il faut supposer que les variétés caractériques V_3^M soient orientées dans le temps ou à la rigueur tangentes aux cônes élémentaires de V_4.

$$\Delta_1 f \equiv g^{\alpha\beta}\partial_\alpha f\, \partial_\beta f = (1 - \varepsilon\mu)(u^\alpha \partial_\alpha f)^2 \leq 0 .$$

On en déduit $\varepsilon\mu \geq 1$. La généralisation de l'hypothèse d'Hugoniot permet d'évaluer ce qui constitue ici la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques

$$V = \left[\frac{(u^{\alpha}\partial_{\alpha} f)^2}{-(g^{\alpha\beta}-u^{\alpha}u^{\beta})\partial_{\alpha} f \partial_{\beta} f}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

En introduisant l'indice de réfraction $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ du milieu, nous pouvons énoncer le résultat suivant

THÉORÈME. – Dans un milieu transparent isotrope d'indice de réfraction n variable, les rayons électromagnétiques sont les géodésiques de longueur nulle de l'espace riemannien $\overline{V}_4$ muni de la métrique associée

$$(3.10) \qquad d\overline{s}^2 = \overline{g}_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta} \equiv \left(g_{\alpha\beta} - \left(1-\frac{1}{n^2}\right)u_{\alpha}u_{\beta}\right)dx^{\alpha}dx^{\beta}$$

où $g_{\alpha\beta}$ est le tenseur métrique fondamental et u_{α} le vecteur vitesse unitaire d'univers définis en chaque point du milieu considéré.

II. LE PRINCIPE DE FERMAT.

4. Espace-temps stationnaire et mouvement permanent d'un fluide chargé.

L'étude des variétés caractéristiques des équations de Maxwell a permis d'établir la loi de propagation des ondes électromagnétiques. L'étude géométrique des rayons électromagnétiques dans l'espace à trois dimensions fournira l'énoncé du principe de Fermat dont l'existence est liée à celle d'univers stationnaire.

On dit que l'espace-temps V_4 est stationnaire dans un domaine D_4 si la variété riemannienne définie par D_4 muni de la métrique d'univers ds^2 admet un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales ne laissant invariant aucun point de D_4 et à trajectoires z orientées dans le temps. Les lignes z ou lignes de temps étant supposées homéomorphes à la droite réelle, on appelle l'espace la variété quotient D_3 définie par la relation d'équivalence du groupe.

Nous rapporterons dans la suite la variété D_4 à des systèmes de coordonnées adaptés au groupe d'isométries tels que les (x^i) soient un système de coordonnées locales arbitraire de D_3, la donnée des x^i détermine les lignes de temps. Les potentiels $g_{\alpha\beta}$ sont alors indépendants de x^0 et $g_{00} > 0$. L'espace D_3 sera toujours supposé muni de la métrique définie négative

$$d\hat{s}^2 = \hat{g}_{ij}\, dx^i\, dx^j = \left(g_{ij} - \frac{g_{0i}\, g_{0j}}{g_{00}}\right)dx^i\, dx^j$$

qui est intrinsèquement définie sur D_3, c'est-à-dire invariante par le changement

$$\left| \begin{array}{l} x^{i'} = x^i \\ x^{0'} = x^0 + \psi(x^i) \end{array} \right.$$

qui corresponde à ce qu'on appelle un changement du système des sections d'espace.

Si l'espace-temps est stationnaire dans D_4 et si le groupe d'isométries laisse invariants les $H_{\alpha\beta}$ on peut démontrer que le mouvement du fluide est permanent et que les quantités

$$\overline{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - (1 - \frac{1}{n^2}) u_\alpha u_\beta$$

restent constantes le long des lignes de temps. Il en résulte que la variété riemannienne $\overline{V}_4$ admet aussi un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales ne laissant invariant aucun point de $\overline{V}_4$, induit par celui de l'espace-temps et pour lequel les (x^0, x^i) constituent un système de coordonnées adapté.

5. Un problème du calcul des variations.

Considérons une variété différentiable V_{n+1} munie d'une structure de variété finslérienne c'est-à-dire sur laquelle est donnée une fonction $\mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^\beta)$ positivement homogène de degré 1 par rapport aux $\dot{x}^\beta$, à valeurs dans l'espace fibré des vecteurs tangents aux différents points de V_{n+1}. Supposons que V_{n+1} admette un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales de générateur $\vec{\xi}$, ne laissant invariant aucun point de V_{n+1} $(\vec{\xi} \neq 0)$. Supposons de plus que les trajectoires z du groupe sont homéomorphes à la droite réelle R et soit V_n la variété quotient de V_{n+1} par la relation d'équivalence définie par le groupe. Nous identifierons V_n à l'espace dont les points z sont les trajectoires d'isométrie.

Dans un système de coordonnées adapté (x^0, x^i) la fonction $\mathcal{L}$ est localement indépendante de la variable x^0, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x^i, \dot{x}^j, \dot{x}^0)$. Nous allons montrer qu'il est possible de douer la variété quotient V_n de structure de variété finslérienne au moyen de fonction $L(x^i, \dot{x}^j)$ de façon qu'aux géodésiques de V_{n+1} extrémales de l'intégrale

$$(5.1) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \mathcal{L}(x^i, \dot{x}^j, \dot{x}^0) du \qquad \dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du}$$

correspondent par projection sur V_n les extrémales de

$$(5.2) \qquad \int_{z_0}^{z_1} L(x^i, \dot{x}^j) du$$

Nous supposerons $\partial_{\dot{0}\dot{0}} \mathcal{L} \neq 0$ et nous posons $\partial_{\dot{\alpha}} = \dfrac{\partial x}{\partial \dot{x}^\alpha}$.

Donnons nous une extrêmale de (5.1) par une représentation paramétrique $x^{\alpha}(u)$, u désignant un paramètre arbitraire. Le système différentiel aux extrêmales de (5.1)

$$\frac{dx^{\alpha}}{du} = \dot{x}^{\alpha}$$

où $\dot{x}^{\alpha}$ satisfait à

$$\frac{d}{du}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\alpha}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\alpha}} = 0$$

est caractérisé par le fait d'admettre l'invariant intégral relatif

(5.3) $$\omega = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\alpha}} dx^{\alpha} = \partial_{\dot{k}} \mathcal{L}\, dx^k + \partial_{\dot{0}} \mathcal{L}\, dx^0 .$$

En vertu de l'hypothèse $\partial_0 \mathcal{L} = 0$, on a l'intégrale première

(5.4) $$\partial_{\dot{0}} \mathcal{L} = h .$$

Comme $\partial_{\dot{0}\dot{0}} \mathcal{L} \neq 0$, on peut résoudre (5.4) par rapport à $\dot{x}^0$

(5.5) $$\dot{x}^0 = \varphi(x^k , x^{\ell} , h)$$

φ étant une fonction homogène de degré 1 par rapport aux $\dot{x}^{\ell}$ dépendant effectivement de h.

Considérons la famille des extrêmales (E_h) correspondant à une valeur déterminée de la constante h. Pour cette famille, le dernier terme de ω a la valeur $h dx^0$ et définit un invariant intégral relatif. Il en résulte que cette famille admet l'invariant intégral relatif

(5.6) $$\partial_{\dot{k}} \mathcal{L}\, dx^k .$$

Or d'après l'homogénéité de $\mathcal{L}$, on a

$$\dot{x}^k \partial_{\dot{k}} \mathcal{L} + \dot{x}^0 \partial_{\dot{0}} \mathcal{L} = \mathcal{L} .$$

Par suite pour toute solution (5.4) ou (5.5), la quantité $\dot{x}^k \partial_{\dot{k}} \mathcal{L}$ peut s'exprimer par une fonction L des variables x^k, $\dot{x}^{\ell}$, h

$$L(x^k , \dot{x}^{\ell} , h) = \mathcal{L}[x^k , \dot{x}^{\ell} , \varphi(x^k , \dot{x}^{\ell} , h)] - h\, \varphi(x^k , \dot{x}^{\ell} , h)$$

et l'on a

$$\partial_{\dot{k}} L = \partial_{\dot{k}} \mathcal{L} + \partial_{\dot{0}} \mathcal{L}\, \partial_{\dot{k}} \varphi - h \partial_{\dot{k}} \varphi = \partial_{\dot{k}} \mathcal{L} .$$

Ainsi les projections des (E_h) sur V_n sont définies par un système différentiel qui admet l'invariant intégral relatif $\varpi = \partial_{\dot{k}} L\, dx^k$. Autrement dit elles sont extrémales de l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} L(x^k, \dot{x}^\ell, h)du \tag{5.7}$$

où h a la valeur choisie et où L s'obtient en éliminant $\dot{x}^0$ entre (5.5) et

$$L = \mathcal{L}(x^i, \dot{x}^j, \dot{x}^0) - h\dot{x}^0 .$$

Appliquons le procédé précédent à la projection des géodésiques de longueur nulle $\overline{L}_0$ de la variété $\overline{V}_4$ supposée satisfaire aux hypothèses générales

$$\mathcal{L} = \sqrt{\overline{g}_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}$$

Le calcul conduit au résultat suivant

LEMME. - Les géodésiques de longueur nulle de $\overline{V}_4$ se projettent sur $\overline{V}_3$ selon les extrémales de l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} \left(\varepsilon\varepsilon' \sqrt{-\frac{1}{\overline{g}_{00}} \hat{\overline{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\overline{g}_{0i} \dot{x}^i}{\overline{g}_{00}}\right) du \tag{5.8}$$

où ε est le signe de $\overline{g}_{00}$ et ε' le signe de $\overline{g}_{0\alpha}\dot{x}^\alpha$. Le long de ces extrémales on a

$$dx^0 = \left(\varepsilon\varepsilon' \sqrt{-\frac{1}{\overline{g}_{00}} \hat{\overline{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\overline{g}_{0i} \dot{x}^i}{\overline{g}_{00}}\right) du \tag{5.9}$$

Dans le cas où $\overline{g}_{00} = 0$, on obtient un énoncé analogue en remplaçant (5.8) et (5.9) par

$$\int_{z_0}^{z_1} - \frac{\overline{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}{2\,\overline{g}_{0i} \dot{x}^i} du \qquad\qquad dx^0 = - \frac{\overline{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}{2\,\overline{g}_{0i} \dot{x}^i} du .$$

6. Le principe de Fermat.

Nous avons établi que les rayons électromagnétiques sont géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne $\overline{V}_4$. Nous pouvons les interpréter géométriquement dans l'espace à trois dimensions si le milieu considéré est en mouvement permanent. En effet le lemme fournit une démonstration immédiate du théorème suivant

THÉORÈME. - Si le mouvement du milieu considéré est permanent et tel que $\overline{g}_{00} \neq 0$ les rayons électromagnétiques dans l'espace sont des lignes réalisant l'extremum de l'intégrale

$$(6.1)\qquad \int_{z_0}^{z_1}\left(\varepsilon\varepsilon'\sqrt{-\frac{1}{\overline{g}_{00}}\,\hat{g}_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j}-\frac{\overline{g}_{0i}\,\dot{x}^i}{\overline{g}_{00}}\right)du$$

pour des variations à extrémités fixes, où ε est le signe de $\overline{g}_{00}$ et ε' le signe de $\overline{g}_{0\alpha}\,\dot{x}^\alpha$. Le temps mis par un rayon pour aller du point z_0 au point z_1 est donné par

$$(6.2)\qquad \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1}\left(\varepsilon\varepsilon'\sqrt{-\frac{1}{\overline{g}_{00}}\,\hat{g}_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j}-\frac{\overline{g}_{0i}\,\dot{x}^i}{\overline{g}_{00}}\right)du$$

Ce temps est extremum.

Dans le cas où $\overline{g}_{00} = 0$, on remplacera (6.1), (6.2) respectivement par

$$\int_{z_0}^{z_1} -\frac{\overline{g}_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j}{2\,\overline{g}_{0i}\,\dot{x}^i}\,du \qquad \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1} -\frac{\overline{g}_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j}{2\,\overline{g}_{0i}\,\dot{x}^i}\,du$$

Par le théorème précédent se trouve démontrée l'équivalence du principe géodésique et du principe du moindre temps.

En particulier, si l'univers est statique au sens de Levi-Civita, c'est-à-dire si les lignes de courant coïncident avec les lignes de temps, l'espace-temps V_4 est orthogonal et a pour métrique d'univers

$$ds^2 = U(dx^0)^2 + g_{ij}\,dx^i\,dx^j$$

Les u^i étant nuls, la métrique associée est

$$d\overline{s}^2 = \frac{U}{n^2}(dx^0)^2 + g_{ij}\,dx^i\,dx^j$$

On peut mettre (6.2) sous la forme

$$\int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1} \frac{n}{\sqrt{U}}\,d\sigma$$

où $d\sigma = \sqrt{-\,g_{ij}\,dx^i\,dx^j}$. Dans le cas d'un espace-temps sans gravitation de Minkowski, $U = 1$, l'énoncé du théorème se traduit par

$$\delta\int dx^0 = \delta\int n\,d\sigma = 0$$

où $d\sigma$ est l'élément linéaire de l'espace euclidien ordinaire. Nous retrouvons l'énoncé du principe de Fermat en optique. Le théorème que nous avons établi en constitue donc l'énoncé généralisé en relativité. Il donne plus généralement la loi de propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu en mouvement, la vitesse du milieu intervenant en effet dans l'expression des $\overline{g}_{\alpha\beta}$.

REMARQUE. - Le signe ε' de $\overline{g}_{0\alpha}\dot{x}^{\alpha}$ peut être interprété. Sauf dans le cas statique, le temps mis par une onde électromagnétique pour aller du point d'espace (x^i) au point d'espace $(x^i + dx^i)$ n'est pas le même que le temps mis par une autre onde électromagnétique pour aller du point $(x^i + dx^i)$ au point (x^i) .

7. Application à l'interaction de la gravitation sur la lumière.

Dans le cas général, l'étude du principe de Fermat fait apparaître l'influence du champ de gravitation sur la propagation des ondes électromagnétiques sous deux aspects :

1° l'espace n'est pas euclidien, ce qui est un fait propre à la théorie de la relativité générale ;

2) le potentiel principal de gravitation $U = g_{00}$ intervient en modifiant l'indice du milieu.

C'est en ces effets que consiste l'interaction de la gravitation sur la lumière Elle donne une interprétation du phénomène de la déviation d'un rayon lumineux passant au voisinage d'une masse attirante, déviation au sens des écarts de la géométrie réelle de l'univers par rapport à une géométrie plus simple, géométrie de Minkowski par exemple.

Considérons comme exemple le champ créé par une masse sphérique. Dans le cas statique on a le ds^2 de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mu}{c^2 r}\right) c^2\, dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2\mu}{c^2 r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \cos\theta\, d\varphi^2 \tag{7.1}$$

(μ coefficient de Kepler figurant dans l'expression de l'attraction newtonienne) que l'on peut comparer au ds^2 de Minkowski

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2\, d\theta^2 - r^2 \cos^2\theta\, d\varphi^2 . \tag{7.2}$$

Le théorème de Fermat donne

$$\int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\mu}{c^2 r}}} \sqrt{\frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2\mu}{c^2 r}} - r^2\dot{\theta}^2 - r^2\cos^2\theta\ \dot{\varphi}^2}\ du$$

On peut interpréter les écarts du ds^2 de Schwartzschild par rapport au ds^2 de Minkowski de la manière suivante : le champ de gravitation modifierait l'état de l'espace en lui donnant un pouvoir diélectrique apparent défini dans le repère naturel, si l'on suppose la perméabilité magnétique μ égale à 1, par la matrice

$$(\varepsilon^i_j) = \begin{bmatrix} (1 - \frac{2\mu}{c^2 r})^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \frac{2\mu}{c^2 r})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \frac{2\mu}{c^2 r})^{-1} \end{bmatrix}$$

La vitesse de propagation de la lumière varierait suivant la direction de propagation. La vitesse radiale serait $c(1 - \frac{2\mu}{c^2 r})$ et la vitesse transversale $c(1 - \frac{2\mu}{c^2 r})^{\frac{1}{2}}$

On démontre que les extrémales de l'intégrale (7.3) passant par deux points donnés z_0, z_1 sont des courbes planes. La déviation est donnée par l'angle des tangentes aux points z_0 et z_1. Pour un rayon venant de l'infini, passant au voisinage de la masse et s'en allant à l'infini, la déviation δ est donnée par l'angle des directions des points à l'infini. Elle est donnée au premier ordre en $1/c^2$ par

$$\delta = \frac{4\mu}{c^2 r_m}$$

où r_m est la distance minima du centre attractif au rayon considéré. Le calcul donne pour un rayon passant au voisinage du Soleil en rasant sa surface, 1"7.

Dans le cas d'une masse sphérique tournante avec une vitesse uniforme, l'espace-temps est stationnaire mais non plus orthogonal $(g_{0i} \neq 0)$. Il serait intéressant d'étudier le comportement des rayons lumineux dans un tel univers.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DARMOIS (Georges). - Les équations de la gravitation einsteinienne. - Paris, Gauthier-Villars, 1927 (Mémorial des Sciences mathématiques n° 25).

[2] FERMAT. - Oeuvres de Fermat, 4 vol. - Paris, Gauthier-Villars, 1891-1912.

[3] LICHNEROWICZ (André). - Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme.-Paris, Masson, 1955.

[4] PHAM MAU QUAN. - Inductions électromagnétiques en relativité générale et principe de Fermat, Arch. rat. Mech. Analysis, t. 1, 1957, p. 54-80.