SÉMINAIRE JANET.
MÉCANIQUE ANALYTIQUE
ET MÉCANIQUE CÉLESTE

PHAM TAN HOANG

Étude des équations du mouvement en relativité générale par la méthode des singularités

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 1 (1957-1958), exp. n° 4, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1957-1958__1__A4_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de MÉCANIQUE ANALYTIQUE
et de MÉCANIQUE CÉLESTE
Année 1957/58
-:-:-:-

25 janvier 1958

ÉTUDE DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE PAR LA MÉTHODE DES SINGULARITÉS

par PHAM TAN HOANG

Dans la méthode du tenseur d'énergie, que Mme HENNEQUIN a exposée, la matière est représentée explicitement par un tenseur d'impulsion-énergie $T^{\alpha\beta}$. L'approximation porte sur les équations du cas intérieur, et on obtient les équations du mouvement d'un corps en intégrant les conditions de conservation du tenseur d'énergie sur le volume à trois dimensions occupé par ce corps.

Dans la méthode des singularités, étudiée par EINSTEIN, INFELD et HOFFMANN, on ne considère au contraire que les équations du cas extérieur. La matière est alors représentée par les singularités du champ.

EINSTEIN en effet n'a admis la présence du tenseur d'énergie qu'avec réticence. Il a toujours pensé que le développement le plus souhaitable de la relativité générale devrait éliminer des équations du champ le tenseur $T^{\alpha\beta}$ relatif aux sources, tenseur dont l'origine phénoménologique lui semble inconciliable avec le principe d'une théorie du champ pur.

Cet exposé est destiné à l'étude des équations du mouvement par la méthode des singularités. Mais auparavant je voudrais faire une remarque sur le choix des variables de champ.

Soit $g_{\alpha\beta}$ le tenseur métrique fondamental. Posons

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} ,$$

où $\delta_{\alpha\beta}$ désigne les coefficients du ds^2 de Minkowski rapporté aux variables galiléennes réduites $(x^0 = ct)$. Comme EINSTEIN j'avais pris, dans ma thèse, non pas le tenseur $g_{\alpha\beta}$ lui-même comme inconnue, mais une combinaison linéaire des $h_{\alpha\beta}$, dont l'introduction a pour but de simplifier l'écriture des équations. Cette combinaison linéaire a pour expression

$$\gamma_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \delta^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma}$$

Or, nous pouvons observer qu'elle ne représente autre chose que l'expression linéarisée de $g_{\alpha\beta} / \sqrt{-g}$ en fonction des $h_{\alpha\beta}$, donc aussi (au signe près) l'expression linéarisée de $\mathfrak{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}$ qui est la quantité conjuguée de $g_{\alpha\beta}/\sqrt{-g}$. Les simplifications résultant de l'emploi des $\gamma_{\alpha\beta}$ s'expliquent par les propriétés du tenseur d'Einstein en ce qui concerne les dérivées secondes : dans un système de coordonnées isothermes, chaque composante $S_{\alpha\beta}$ (ou $S^{\alpha\beta}$) ne contient comme dérivées secondes que le dalembertien de $g_{\alpha\beta}/\sqrt{-g}$ (ou de $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$).

La densité tensorielle $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ est bien adaptée à l'étude mathématique du système des équations d'Einstein. D'autre part, elle intervient de façon naturelle dans les conditions d'isothermie qui s'écrivent en effet :

$$F^{\lambda} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\rho} \mathfrak{g}^{\rho\lambda} = 0$$

Par conséquent, il est plus satisfaisant, et aussi plus avantageux de prendre $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ comme inconnue.

Nous avons vu que dans la méthode du tenseur d'énergie il est avantageux d'utiliser aussi la densité tensorielle $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$. L'introduction de cette densité dans la méthode des singularités permettra de faire une comparaison plus naturelle entre les deux procédés.

1. Principe de la méthode.

Considérons une variété différentiable V_n à n dimensions, de classe de différentiabilité (C^2, C^4 par morceaux) comme la variété espace-temps qui intervient en relativité générale. Sur la variété V_n est définie une métrique riemannienne du type hyperbolique normal. L'expression locale de cette métrique est

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^{\lambda})\, dx^{\alpha}\, dx^{\beta}$$

Les indices grecs α, β ... prennent les valeurs $0, 1, \dots, n-1$ et, dans la suite les indices latins $i, j, \dots$ prendront les valeurs $1, \dots, n-1$.

Soient $R_{\alpha\beta}$ le tenseur de Ricci de V_n, et $S_{\alpha\beta}$ le tenseur d'Einstein

$$S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta}$$

La structure géométrique de V_n est déterminée par les équations généralisées d'Einstein. Le tenseur $g_{\alpha\beta}$ est astreint à vérifier le système des équations d'Einstein du cas extérieur :

$$S^{\alpha\beta} = 0$$

excepté à l'intérieur des domaines de V_n, que nous appelons pour abréger "tubes d'univers".

Supposons que la variété V_n ait été rapportée à un système de coordonnées dans lequel x^0 joue le rôle de variable temporelle $(g_{00} > 0)$ et les x^i celui de variables spatiales $(g^{00} > 0)$. Sur les sections d'espace W_{n-1}, choisissons la métrique ds^{*2} intrinsèquement définie :

$$ds^{*2} = (g_{ij} - \frac{g_{0i}\, g_{0j}}{g_{00}})\, dx^i\, dx^j$$

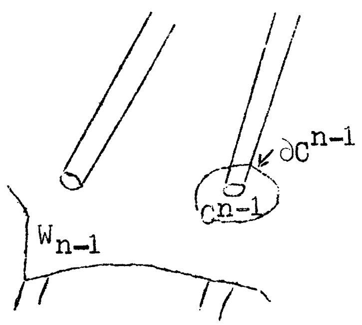
Nous faisons les hypothèses suivantes sur la métrique et sur les tubes d'univers de V_n.

a. La métrique est quasi-euclidienne, à comportement asymptotique euclidien. Les potentiels admettent des développements limités en fonction de $1/c^2$, c = vitesse de la lumière dans le vide. Pour des raisons d'interprétation physique, nous verrons que ces développements limités contiennent seulement soit des puissances paires, soit des puissances impaires de $1/c$. C'est pourquoi il est préférable de les écrire sous la forme générale

$$g^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} + \sum_{h=1}^{p} \lambda^h \underset{h}{g}^{\alpha\beta} + O(\lambda^{p+1}) \qquad (\lambda = \frac{1}{c})$$

étant entendu que certains des coefficients $\underset{h}{g}^{\alpha\beta}$ peuvent être nuls.

b. Les tubes d'univers, c'est-à-dire les domaines intérieurs de V_n sont en nombre fini N. Dans une section d'espace, chacun d'eux est représenté par un domaine connexe et borné à $(n - 1)$ dimensions, que nous appelons un corps pour simplifier le langage.



c. Nous supposons qu'on peut définir pour chaque corps une vitesse moyenne de translation, et cette vitesse moyenne est petite devant c. La dérivée partielle ∂_0 est alors d'ordre $1/c$:

$$\partial_0 = O(1/c)$$

C'est l'hypothèse quasi-statique.

Nous allons maintenant considérer sans W_{n-1} un champ d'intégration à $(n - 1)$ dimensions contenant dans son intérieur un corps déterminé. Soit C^{n-1}, ce champ d'intégration et ∂C^{n-1} sa frontière. Nous allons étudier les propriétés de l'intégrale sur ∂C^{n-1} d'une forme différentielle extérieure d'ordre $(n - 2)$ définie à partir du tenseur d'Einstein de la façon suivante :

Sur W_{n-1} le tenseur $S^{\alpha\beta}$ induit un vecteur $\vec{S}^{(\alpha)}$ de composantes contravariantes $S^{(\alpha)i}$, l'indice α ayant une valeur fixée quelconque. Au vecteur $\vec{S}^{(\alpha)}$ correspond la $(n-2)$-forme :

$$\Omega^{(\alpha)} = \frac{1}{(n-2)!}\, \eta^*_{i_1 \dots i_{n-1}}\, S^{(\alpha) i_{n-1}}\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-2}}$$

où $\eta^*_{i_1 \dots i_{n-1}}$ est le tenseur complétement antisymétrique attaché à la forme élément de volume de W_{n-1}. Les notations étoilées sont relatives à la section d'espace W_{n-1}. L'intégrale que nous voulons étudier est :

$$\sigma^\alpha = \int_{\partial C^{n-1}} \Omega^{(\alpha)}$$

Elle représente par définition le flux du vecteur $\vec{S}^{(\alpha)}$ à travers le $(n-2)$-champ ∂C^{n-1}.

$$\sigma^\alpha = \int_{\partial C^{n-1}} \Omega^{(\alpha)} = \mathrm{flux}^*_{\partial C^{n-1}}\, \vec{S}^{(\alpha)}$$

Relativement à l'intégrale σ^α nous allons établir les deux propriétés suivantes :

1° Cette intégrale a une valeur indépendante du choix du champ d'intégration C^{n-1}.

2° Elle n'est pas identiquement nulle lorsqu'on substitue dans $\Omega^{(\alpha)}$ un système $g^{\alpha\beta}$ solution des équations du champ extérieur.

Ces deux propriétés sont en effet indispensables pour que l'étude de l'intégrale σ conduise à un résultat utilisable. Leur démonstation fait intervenir d'une manière essentielle l'hypothèse c.

La première propriété résulte des identités de conservation

$$\nabla_\beta S^{\alpha\beta} = \partial_\beta S^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\lambda\beta} S^{\lambda\beta} + \Gamma^\beta_{\lambda\beta} S^{\alpha\lambda} = 0$$

Désignons en effet la divergence d'espace de $\vec{S}^{(\alpha)}$ par

$$E^{(\alpha)} \equiv \nabla^*_i S^{(\alpha)i} = \partial_i S^{\alpha i} + \Gamma^{*i}_{hi} S^{\alpha h}$$

Nous avons à démontrer que la condition $E^{(\alpha)} = 0$ est satisfaite. Or les identités de conservation peuvent s'écrire :

$$E^{(\alpha)} + \partial_0 S^{\alpha 0} + \Gamma^\alpha_{\lambda\beta} S^{\lambda\beta} + \Gamma^\beta_{\lambda\beta} S^{\alpha\lambda} - \Gamma^{*i}_{hi} S^{\alpha h} = 0$$

Elles montrent que la condition $E^{(\alpha)} = 0$ ne peut pas être satisfaite identiquement. Mais cela n'a pas d'importance pour la méthode d'approximation.

La dérivée partielle ∂_0 étant d'ordre $1/c$ et les symboles de Christoffel d'ordre $1/c^2$, on voit que la divergence $E^{(\alpha)}$ d'ordre ℓ est nulle si les équations du champ d'ordre $(\ell - 1)$ sont vérifiées. Dans un calcul par approximation cette propriété exprime, d'après le théorème de Stokes, que le flux σ d'ordre quelconque est indépendant du choix de C^{n-1}. On peut en particulier évaluer ce flux en déterminant sa valeur sur la frontière du corps considéré.

La deuxième propriété se démontre en examinant de près la manière dont les potentiels des divers ordres interviennent dans l'intégrale σ.

Pour calculer cette intégrale nous utilisons un espace euclidien de représentation $\mathcal{E}_{n-1}$ à $(n-1)$ dimensions. Désignons par Δ le domaine représentatif de C^{n-1}, et par $\partial\Delta$ sa frontière que nous rapportons à des paramètres $(t^1, \ldots, t^{n-2})$. Sur ∂C^{n-1} la forme $\Omega^{(\alpha)}$ admet une forme induite $\overline{\Omega}^{(\alpha)}$ qui peut s'exprimer à l'aide des variables $(t^1, \ldots, t^{n-2})$ par la formule

$$\overline{\Omega}^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^{n-2}$$

où

$$f^{(\alpha)} = \frac{1}{(n-2)!}\, \eta^{*}_{i_1 \ldots i_{n-1}}\, S^{(\alpha) i_{n-1}}\, \frac{D(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{n-2}})}{D(t^1, \ldots, t^{n-2})}$$

L'intégrale de la forme $\Omega^{(\alpha)}$ sur le champ ∂C^{n-1} n'est autre que l'intégrale de la fonction $f^{(\alpha)}$ sur la champ $\partial\Delta$. On sait qu'elle peut se mettre sous la forme.

$$\sigma^{\alpha} = \int_{\partial\Delta} [S^{\alpha k}\, \nu_k \sqrt{|g'|}\,]\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^{n-2}$$

où : (ν_k) = normale unitaire à ∂C^{n-1}

g' = déterminant de la forme quadratique fondamentale de ∂C^{n-1} rapporté aux variables $(t^1, \ldots, t^{n-2})$

Explicitons maintenant l'expression $S^{\alpha k}$ qui figure sous le signe $\int$. Nous avons d'abord :

$$S^{\alpha\beta} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\left(g^{\lambda\mu}\, \partial_{\lambda\mu}\, \mathfrak{g}^{\alpha\beta} - \mathfrak{g}^{\alpha\rho}\partial_\rho F^{\beta} - \mathfrak{g}^{\beta\rho}\, \partial_\rho F^{\alpha} + \mathfrak{g}^{\alpha\beta}\, \partial_\rho F^{\rho}\right) + H^{\alpha\beta}$$

$H^{\alpha\beta}$ désignant une fonction des potentiels et de leurs dérivées premières.

D'où, en faisant $\beta = k$:

$$S^{\alpha k} = \Phi^{\alpha k} + \Lambda^{\alpha k}$$

où :

$$\Phi^{\alpha k} = \frac{1}{2}\,\partial_h(-\,\partial_h \mathfrak{g}^{\alpha k} + \partial_k \mathfrak{g}^{\alpha h} + \delta^\alpha_h\,\partial_m \mathfrak{g}^{mk} - \delta^\alpha_k\,\partial_m g^{mh})$$

est l'ensemble des termes linéaires qui ne comportent aucune dérivation partielle par rapport à x^0 et :

$$\Lambda^{\alpha k} = \psi^{\alpha k}(\partial_{0\lambda}\mathfrak{g}^{\mu\nu}) + S'^{\alpha k}$$

désigne les autres termes linéaires et les termes non linéaires $S'^{\alpha k}$ de $S^{\alpha k}$.

Nous avons séparé les termes de $S^{\alpha k}$ en deux groupes. La raison en est la suivante : si l'on considère l'expression $S^{\alpha k}$ d'ordre ℓ quelconque, seul $\Phi^{\alpha k}$ contient les potentiels d'ordre ℓ tandis que $\Lambda^{\alpha k}$ ne fait intervenir que les potentiels d'ordre au plus égal à $(\ell - 1)$. C'est une conséquence de l'hypothèse c.

On constate que $\Phi^{\alpha k}$ est de la forme $\partial_h F^{(\alpha)kh}$ où $F^{(\alpha)kh}$ est antisymétrique par rapport aux indices k, h. On peut alors montrer que dans l'espace euclidien de représentation rapportée à des coordonnées rectilignes, la partie de l'intégrale σ qui porte sur $\Phi^{\alpha k}$ peut se ramener à l'intégrale sur $\partial\Delta$ d'une $(n-2)$-forme homologue à zéro. Le champ d'intégration $\partial\Delta$ ayant une frontière nulle, une telle intégrale est donc toujours identiquement nulle. Ce résultat généralise simplement une formule classique de la géométrie élémentaire, formule selon laquelle l'intégrale d'un rotationnel sur une surface fermée est toujours égale à zéro.

Ainsi, seul $\Lambda^{\alpha k}$ contribue à l'intégrale σ, ce qui montre que l'intégrale σ d'ordre ℓ ne dépend effectivement que des potentiels d'ordre $(\ell - 1)$. Cette propriété importante signifie que si l'on substitue aux $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ une solution des équations $S^{\alpha\beta} = 0$, l'intégrale σ ne sera pas identiquement nulle [1].

Or les équations $S^{\alpha\beta} = 0$ impliquent nécessairement

$$\sigma^\alpha = 0$$

En raison des propriétés de σ^α, ces conditions ne sont pas vides. Elles constituent des relations que doit vérifier toute solution des équations du champ

---

[1] Les vitesses étant supposées faibles on peut penser que le domaine singulier contenu dans le champ d'intégration C^{n-1} peut être meublé par une masse, ce qui expliquerait la deuxième propriété du flux σ^α.

extérieur, relations qui ne dépendent que de la frontière du corps considéré. Nous pouvons donc les prendre comme définition des équations du mouvement. Sous forme développée, elles s'écrivent

$$\sigma^{\alpha} = \sum_{\ell=2}^{p+1} \lambda^{\ell} \sigma_{\ell}^{\alpha} + 0(\lambda^{p+2}) = 0$$

l'indice α variant de 0 à $(n - 1)$, nous aurons n équations pour chaque corps. La trajectoire d'univers du centre de gravité d'un corp est définie si l'on connait les $(n - 1)$ coordonnées d'espaces (ξ^{i}) du centre de gravité en fonction du temps. Les $(n - 1)$ fonctions $\xi^{i}(t)$ seront données par les $(n -1)$ équations

$$\sigma^{i} = 0$$

et il nous reste une équation supplémentaire, $\sigma^{0} = 0$:. Celle-ci jouera un rôle dans l'approximation des équations du champ. Elle servira, conjointement avec les conditions d'isothermie, pour préciser les fonctions harmoniques qui s'introduisent dans la solution des équations du champ extérieur.

*

* *

Revenons sur le choix de l'intégrale σ^{α}, c'est-à-dire du vecteur $\vec{S}^{(\alpha)}$.

Il est clair que nous devons considérer une intégrale qui présente un caractère intrinsèque, c'est-à-dire que sa valeur ne doit pas dépendre de la forme du champ d'intégration C^{n-1} mais uniquement du corps contenu à l'intérieur : ceci conduit à prendre un vecteur ayant une divergence d'espace nulle, c'est-à-dire à définir ce vecteur à partir d'un tenseur conservatif.

Ensuite, la solution des équations du champ extérieur n'est définie qu'à des fonctions harmoniques additives près, que les conditions de coordonnées à elles seules ne suffisent pas à déterminer. Il nous faut donc une équation supplémentaire en dehors des $(n - 1)$ conditions nécessaires pour le déduction des équations du mouvement.

Il semble alors que le plus simple est de procéder comme nous l'avons fait. Nous prenons un tenseur conservatif d'ordre 2, c'est-à-dire le tenseur d'Einstein. Ses composantes forment une matrice carrée d'ordre n , qui permet de définir exactement n vecteurs satisfaisant bien aux conditions requises.

Nous avons tenu jusqu'à présent à présenter le problème du mouvement par la méthode des singularités d'une manière aussi autonome que possible.Nous avons considéré un champ extérieur avec des domaines singuliers, sans nous préoccuper de la nature des singularités. Dans les applications cependant, nous identifierons les singularités du champ avec les masses, ce qui semble raisonnable parce que les vitesses sont supposées faibles. On peut penser aussi que cette interprétation des singularités est en accord avec la propriété du vecteur $\vec{S}^{(\alpha)}$ d'avoir un flux qui peut être non identiquement nul.

Indiquons maintenant le rapport entre l'exposé précédent et les travaux d'EINSTEIN INFELD et HOFFMANN.

En relativité générale, EINSTEIN considère des particules matérielles supposées représentées par des singularités ponctuelles du champ. EINSTEIN est parti des équations du cas extérieur prises sous la forme

$$R_{\alpha\beta} = 0$$

et il définit les équations du mouvement par les conditions

$$C_i = \frac{1}{4\pi} \int - 2(R_{ik} - \frac{1}{2} \delta_{ik} \delta^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}) \nu^k ds = 0$$

où l'intégrale est étendue à une surface fermée quelconque renfermant une seule singularité.

On montre facilement que l'on a à chaque ordre d'approximation

$$C_i = - \frac{1}{2\pi} \sigma^i$$

les équations du mouvement $C_i = 0$ et $\sigma^i = 0$ sont alors équivalentes.

Les résultats obtenus par EINSTEIN et ses collaborateurs apparaissent donc comme un cas particulier, celui d'une variété à 4 dimensions et des singularités ponctuelles.

2. Application à la relativité générale.

Appliquons la méthode précédente à la relativité générale. La déduction des équations du mouvement par la méthode des singularités exige des calculs compliqués. Nous nous limiterons, bien que la méthode ne l'impose pas, au cas où les singularités du champ sont ponctuelles et à symétrie sphérique.

Nous allons chercher une solution approchée des équations du champ extérieur, nous calculons l'intégrale σ^α correspondante et nous en déduisons les équations du mouvement en annulant cette intégrale.

Nous utilisons les coordonnées isothermes en raison de leur signification géométrique et des simplifications qu'elles apportent.

D'autre part, conformément à l'hypothèse du comportement asymptotique euclidien nous prendrons comme solution de l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ la solution élémentaire

$$u = \frac{1}{r}$$

à un coefficient de proportionnalité près [2]. La solution des équations du champ sera alors complètement déterminée.

Quels sont les développements limités que nous utiliserons ?

La condition d'isothermie $F^0 = 0$, c'est-à-dire :

$$\partial_i \mathfrak{g}^{i0} + \partial_0 \mathfrak{g}^{00} = 0$$

et l'hypothèse c. montre que $\partial_i \mathfrak{g}^{i0}$ est d'un ordre infinitésimal supérieur à $\mathfrak{g}^{00} - 1$. Si l'on convient que $\mathfrak{g}^{00} - 1$ est d'ordre $\frac{1}{c^2}$, et cette convention peut se justifier, on aura :

$$\partial_i \mathfrak{g}^{i0} = 0(\frac{1}{c^3})$$

Mais à la première approximation, l'expression $S^{\alpha\beta}$ se réduit au laplacien de la quantité $-\frac{1}{2} \mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ et les équations du champ sont des équations de Laplace. L'hypothèse faite sur la solution de $\Delta u = 0$, montre alors que la quantité $\mathfrak{g}^{i0}$ elle-même est d'ordre $\frac{1}{c^3}$.

Pour les mêmes raisons, la condition d'isothermie $F^i = 0$ implique :

$$\mathfrak{g}^{ij} + \delta^i_j = 0(\frac{1}{c^4})$$

Nous ferons donc les développements limités suivants :

$$\mathfrak{g}^{00} = 1 + \frac{1}{c^2} \underset{2}{\mathfrak{g}}^{00} + \frac{1}{c^4} \underset{4}{\mathfrak{g}}^{00} + 0(\frac{1}{c^4})$$

$$\mathfrak{g}^{i0} = \frac{1}{c^3} \underset{3}{\mathfrak{g}}^{i0} + \frac{1}{c^5} \underset{5}{\mathfrak{g}}^{i0} + 0(\frac{1}{c^7})$$

$$\mathfrak{g}^{ij} = -\delta^i_j + \frac{1}{c^4} \underset{4}{\mathfrak{g}}^{ij} + 0(\frac{1}{c^6})$$

Notons que ces développements ont été obtenus sans l'intervention du teneur d'énergie et on peut souligner l'autonomie que la méthode acquiert ainsi.

---

[2] Nous n'avons pas étudié les cas des dipôles et des pôles multiples qui doivent présenter beaucoup de difficultés.

A la première approximation les équations du champ s'écrivent simplement

$$\underset{\ell}{S}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\,\Delta\,\underset{\ell}{g}^{\alpha\beta} = 0 \qquad (\ell = 2 \text{ ou } 3 \text{ suivant les indices } \alpha, \beta)$$

Leur solution est donnée par :

$$\underset{\ell}{g}^{\alpha\beta} = \sum_{s=1}^{N} \frac{\overset{s}{a}{}^{\alpha\beta}}{\overset{s}{r}}$$

l'indice placé au-dessus d'une lettre sert à spécifier une singularité, $\overset{s}{r}$ désigne la distance de la s-ième singularité au point (x^i) où l'on considère le champ. Les coefficients $\overset{s}{a}{}^{\alpha\beta}$ peuvent dépendre du temps et des vitesses.

Nous avons d'abord, en posant $\overset{s}{a}{}^{00} = 4\,G\,\overset{s}{m}_0$, G = constante d'attraction universelle :

$$\underset{2}{g}^{00} = 4 \sum_{s=1}^{N} \frac{G\,\overset{s}{m}_0}{\overset{s}{r}}$$

L'interprétation du coefficient $\overset{s}{m}_0$ sera donnée par les conditions $\sigma^i = 0$ c'est-à-dire les équations du mouvement.

Compte tenu de la condition $\sigma^0 = 0$ qui s'écrit

$$\dot{\overset{s}{m}}_0 + 0\left(\frac{1}{c^2}\right) = 0 \qquad\qquad \left(\frac{1}{c}\,\dot{\overset{s}{m}}_0 = \partial_0\,\overset{s}{m}_0\right)$$

et de la condition d'isothermie

$$\partial_\zeta\, g^{\zeta 0} = 0$$

on obtient :

$$\underset{3}{g}^{i0} = 4 \sum_{s=1}^{N} \frac{G\,\overset{s}{m}_0}{\overset{s}{r}}\ \dot{\overset{s}{\xi}}{}^i$$

En portant la solution précédente dans la formule donnant le flux et en intégrant, nous obtenons les conditions $\sigma^i = 0$ sous la forme

$$\left[\ddot{\overset{k}{\xi}}{}^i - \sum_{s\neq k} \tilde{\partial}_i \left(\frac{G\,\overset{s}{m}_0}{\overset{s}{r}}\right)\right] + 0(1/c^2) = 0$$

où

$$\tilde{\partial}_i = (\partial_i)_{x^i = \overset{k}{\xi}{}^i}$$

Ainsi à la première approximation, on voit que $\sigma^i = 0$ donne les équations newtoniennes du mouvement. Ces équations montrent que $\underset{2}{\gamma}^{00}/4$ représente le potentiel newtonien. Ce qui nous conduit à interpréter les singularités ponctuelles du champ comme des particules matérielles dont la masse au repos serait précisément représentée par le coefficient $\overset{s}{m}_0$. L'équation $\sigma^0 = 0$ montre que $\overset{s}{m}_0$ ne dépend pas du temps en première approximation.

Le calcul peut se poursuivre à des ordres d'approximation supérieurs. On aura à intégrer chaque fois des équations du champ de la forme

$$\Delta \underset{\ell}{\gamma}^{\alpha\beta} + \underset{\ell}{\varphi}^{\alpha\beta} = 0$$

où $\underset{\ell}{\varphi}^{\alpha\beta}$ est une quantité connue en vertu des approximations antérieures.

On calcule les intégrales σ^i pour cette solution et on forme les équations du mouvement en écrivant les conditions $\sigma^i = 0$.

A la seconde approximation les calculs font apparaître des termes correctifs d'origine relativiste. Dans le cas simple de deux particules, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\overset{k}{\ddot{\xi}}{}^i - G\,\overset{\ell}{m}_0 \frac{\partial}{\partial \overset{k}{\xi}{}^i}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{c^2}\, G\,\overset{\ell}{m}_0 \Big[\Big(\overset{k}{\dot{\xi}}{}^s \overset{k}{\dot{\xi}}{}^s + \frac{3}{2} \overset{\ell}{\dot{\xi}}{}^s \overset{\ell}{\dot{\xi}}{}^s - 4 \overset{k}{\dot{\xi}}{}^s \overset{\ell}{\dot{\xi}}{}^s - 4 \frac{G\,\overset{\ell}{m}_0}{r} - 5 \frac{G\,\overset{k}{m}_0}{r} + \overset{\ell}{A} \Big) \frac{\partial}{\partial \overset{k}{\xi}{}^i}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$+ \Big\{ 4 \overset{k}{\dot{\xi}}{}^s \big(\overset{\ell}{\dot{\xi}}{}^i - \overset{k}{\xi}{}^i \big) + 3 \overset{k}{\dot{\xi}}{}^i \overset{\ell}{\dot{\xi}}{}^s - 4 \overset{\ell}{\dot{\xi}}{}^s \overset{\ell}{\dot{\xi}}{}^i \Big\} \frac{\partial}{\partial \overset{k}{\xi}{}^s}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 r}{\partial \overset{k}{\xi}{}^s\, \partial \overset{k}{\xi}{}^r\, \partial \overset{k}{\xi}{}^i} \overset{k}{\dot{\xi}}{}^s \overset{k}{\dot{\xi}}{}^r \Big] + 0\,(1/c^4)$$

$\overset{\ell}{A}$ = constante d'intégration

(k , ℓ) = permutation de $(1 , 2)$

r = distance des 2 particules.

Le terme $\overset{\ell}{A}$ est nouveau, les autres termes sont les même que ceux obtenus par EINSTEIN et ses collaborateurs.

Les équations du mouvement ont été établies en coordonnées isothermes. Au sujet de leur dépendance vis-à-vis des conditions de coordonnées, EINSTEIN et INFELD ont démontré le résultat suivant : les équations du mouvement à une approximation donnée ne sont pas influencées par les conditions de coordonnées à cette approximation, elles ne dependent que des conditions de coordonnées utilisées dans les approximation antérieures.

Il nous reste à faire le rapprochement entre la méthode du tenseur d'énergie et la méthode des singularités. En vertu du raccordement entre champ intérieur et champ extérieur dans un modèle d'univers, nous pouvons dire que les deux méthodes présentent certainement des relations, sans qu'elles puissent cependant se ramener complètement l'une à l'autre. On s'en rend compte d'après les propriétés bien connues du prolongement. Si le prolongement de l'intérieur vers l'extérieur existe et est unique, il n'en est pas de même du problème inverse : un champ extérieur étant donné, il peut ne correspondre à aucune distribution énergétique ou au contraire à une infinité. La donnée du champ extérieur n'est donc pas entièrement équivalente à celle du champ intérieur.

Une autre remarque doit être faite sur la manière différente dont les conditions d'isothermie interviennent dans les deux méthodes. Dans la méthode du tenseur d'énergie, Mme HENNEQUIN a montré qu'il y a équivalence entre conditions d'isothermie et équations du mouvement pour toute solution approchée des équations du champ. Dans la méthode des singularités, les conditions d'isothermie interviennent dans les équations du mouvement seulement par l'intermédiaire des fonctions harmoniques qu'elles déterminent.

Il serait très intéressant d'établir la liaison entre les deux points de vue du champ intérieur et du champ extérieur. Cela nous amènera, sans doute, à une meilleure compréhension de la méthode des singularités.

BIBLIOGRAPHIE

[1] EINSTEIN (A.), INFELD (L.) and HOFFMANN (B.) - The gravitational equations and the problem of motion, Annals of Math., t. 39, 1938, p. 65-100.

[2] EINSTEIN (A.) and INFELD (L.). - The gravitational equations and the problem of motion, II., Annals of Math., t. 41, 1940, p. 455-464.

[3] EINSTEIN (A.) and INFELD (L.). - On the motion of particles in general relativity theory, Canadian J. Math., t. 1, 1949, p. 209-241.

[4] HENNEQUIN (Mme). - Etude mathématique des approximations en relativité générale et en théorie unitaire de Jordan-Thiry (Thèse Sc. math. Paris. 1956) (multigraphiée).

[5] PHAM TAN HOANG. - La méthode des singularités pour les équations du mouvement en relativité générale et en théorie du champ unifié (Thèse Sc. math. Paris. 1957) (multigraphiée).