Jacques Lévy

Corrections de relativité dans le mouvement des planètes

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 1 (1957-1958), exp. nº 3, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1957-1958__1__A3_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de MÉCANIQUE ANALYTIQUE
et de MÉCANIQUE CÉLESTE
Année 1957/58
-:-:-:-

11 janvier 1958

CORRECTIONS DE RELATIVITÉ DANS LE MOUVEMENT DES PLANÈTES

par Jacques LÉVY

1. Corrections en usage.

La discussion des observations des planètes, de la lune et du soleil permet la détermination de leurs éléments (masses, éléments des orbites), et la construction de Tables fournissant leurs positions géocentriques.

Les Tables sont calculées par les formules de la mécanique newtonienne ; on ajoute aujourd'hui, aux éléments ainsi obtenus, les corrections qui résultent, pour chaque planète, de l'avance du périhélie à laquelle conduit la formule :

$$\delta \varpi = \frac{24 \pi^3 a^2}{c^2 T^3 (1 - e^2)}$$

($\delta \varpi$: avance pendant l'unité de temps, en radians ; e : excentricité de l'orbite de la planète : a , T , c : demi-grand axe, période, vitesse de la lumière, exprimés dans un même système d'unités).

C'est ainsi, par exemple, que l'on procède actuellement à l'Observatoire naval de Washington, où l'on a entrepris, depuis 1947 , une redétermination générale cohérente des Tables des planètes ; cette opération considérable est pratiquement achevé pour les planètes extérieures. Les corrections de relativité figurent uniquement, dans ces Tables, par l'incidence, sur les coordonnées, des valeurs suivantes du produit $e \delta \varpi$ ($\delta \varpi$ étant ici l'avance par siècle) :

Mercure	: 8",847	Jupiter	: 0",00301
Vénus	: 0",059	Saturne	: 077
Terre	: 064	Uranus	: 011
Mars	: 126	Neptune	: 001
		Pluton	: 010

Le problème inverse consiste à comparer l'avance séculaire observée des périhélies à l'avance calculée en mécanique newtonienne. Il est posé depuis longtemps pour Mercure, depuis peu pour la Terre. Les écarts issus des discussions récentes valent respectivement, à plus de 1" près d'ailleurs, 42",56 et 4",6 ;

les corrections de relativité calculées par la formule donnée plus haut, sont de $43''03$ et $3''84$.

Pour Vénus, le mouvement a été redéterminé, mais l'analyse définitive n'est pas achevée. Bien que que l'avance relativiste soit grande ($8''63$) , le produit $e\delta\varpi$, seul présent dans les coordonnées, est faible. D'autre part, et pour des raisons diverses, les éléments de l'orbite de Vénus sont spécialement sensibles à des modifications éventuelles de certaines constantes numériques (masse de Mercure, de la Terre, parallaxe solaire, obliquité de l'écliptique) ; de sorte que l'avance expérimentale du perihélie se trouve mal déterminée ([1]).

Enfin pour Mars, la théorie est seulement en cours d'achévement.

2. Espace-temps de Schwarzschild et mécanique newtonienne.

L'avance relativiste des périhélies est calculée d'après le ds^2 de Schwarzschild :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) .$$

Ce ds^2 traduit, en coordonnées polaires, la métrique d'un espace à symétrie sphérique, la masse M étant dépourvue de rotation, son centre étant l'origine des r , le tenseur d'énergie étant nul à l'extérieur de la masse.

La trajectoire d'une particule sans masse, définie comme géodésique de l'espace de Schwarzschild, est comparée à la trajectoire que suit dans un espace euclidien une particule soumise aux lois de la mécanique newtonienne, les mêmes symboles étant employés pour les variables des deux espaces.

Les équations différentielles diffèrent par des termes que l'on traite comme s'ils traduisaient une force perturbatrice agissant sur le mouvement newtonien. Les formules de Lagrange du mouvement perturbé donnent immédiatement les variations des éléments de l'orbite newtonienne dont l'introduction formelle fournit

---

([1]) On sait que NEWCOMB estimait, en 1895, à 10" par siècle le désaccord entre le mouvement observé du noeud de Vénus et le mouvement théorique (pour lequel d'ailleurs la théorie de la relativité générale n'apporte aucune correction). Les nouveaux éléments ne permettent pas de considérer que le désaccord a entièrement disparu, mais il est devenu possible de l'attribuer aux incertitudes des constantes (distances et masses des planètes inférieures).

Une détermination indépendante des masses de Mercure et de Vénus suffirait à lever toutes ces incertitudes ; le problème serait résolu si ces planètes étaient un jour dotées de satellites convenables.

la solution formelle du problème de Schwarzschild.

Ces variations se réduisent à deux :

1° l'avance du périhélie, que la formule donnée plus haut traduit suffisamment, les termes négligés étant, en valeur relative, de l'ordre de V^2/c^2 ;

2° une correction au moyen mouvement défini par la loi des aires, dont l'ordre de grandeur est celui de $e^2 \delta\varpi$; la modification qui s'en déduirait pour le grand axe n'atteindrait 10^{-9} (en valeur relative) pour aucune planète ; or les distances sont loin d'être définies avec cette précision.

3. Espace-temps de Schwarzschild et espace euclidien.

Les deux métriques (euclidienne, et de Schwarzschild) exprimées avec les mêmes variables, sont-elles assimilables ?

r , θ , φ , t étant les variables euclidiennes et le temps, il n'y a pas d'objection à prendre pour la métrique de Schwarzschild :

t comme variable indépendante

θ et φ comme variables de positions angulaires, l'espace de Schwarzschild étant isotrope (au sens vulgaire) ;

r comme variable de position sur un rayon vecteur.

Il convient alors de voir ce qu'il advient de l'élément linéaire d'espace, $\sqrt{-c^2\, ds^2}$.

1° élément tangentiel : $dt = dr = 0$; $-c^2\, ds^2$ est identique au carré de l'élément euclidien.

2° élément radial : $dt = d\theta = d\varphi = 0$.

$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{-c^2\, ds^2} = (r_2 - r_1)\left(1 + \frac{m}{r_2 - r_1} \log \frac{r_2}{r_1} + \ldots\right) .$$

L'écart (relatif) avec $r_2 - r_1$ est maximum pour r_1 minimum et $r_2 - r_1$ petit ; r_1 ne peut être inférieur au rayon R du Soleil, car l'expression de ds^2 n'est pas valable à l'intérieur de la masse, où le tenseur d'énergie n'est pas nul ; r_1 étant égal à R , l'écart relatif n'atteint pas 10^{-7} dès que r_2 dépasse $2{,}5\ R$. Les distances, dans le système solaire, ne sont pas définies individuellement avec une précision relative supérieure à celle de la parallaxe solaire, précision qui n'atteint pas 10^{-4} ; leurs rapports mutuels, d'autre part, ne sont pas définis à 10^{-7} près.

Ainsi, pour les planètes, les variables des deux espaces peuvent être identifiées, ce qui valide la démonstration de la relation $m = \frac{GM}{c^2}$, (G , M , c étant les constantes usuelles de la mécanique newtonienne).

4. Espace-temps de Schwarzschild et espace-temps réel.

La mise en équations de Schwarzschild n'est qu'une étape de la mise en équations du problème réel : les masses en présence sont en fait multiples, et animées de mouvements de rotation.

De SITTER a traduit les équations de la relativité générale dans un espace comprenant un nombre, fini ou non, de points matériels, par un ds^2 écrit en coordonnées quasi-galiléennes, (x , y , z , t) ; son analyse fait d'ailleurs état de certaines approximations, qui sont bien définies, et de certaines hypothèses qui le sont moins.

Pour le problème de Schwarzschild, le ds^2 de de Sitter s'écarte du ds^2 de Schwarzschild par des termes négligeables ; les résultats obtenus à partir du dernier demeurent donc valables.

Pour le problème général, l'espace-temps de de Sitter se prête à certains calculs, et conduit en particulier aux résultats suivants :

1° l'effet de la rotation du Soleil produit un retard des périhélies et une avance des noeuds, les termes correctifs correspondants étant d'ailleurs absolument négligeables ;

2° il est correct, en première approximation, de calculer indépendamment les perturbations mutuelles, les effets "relativistes", puis d'écrire que la somme exprime la correction totale à apporter aux éléments des mouvements kepleriens représentés dans l'espace euclidien.

Compte-tenu de ce qui précède, et de quelques précisions faciles à obtenir sur différents points (comme le prolongement des mesures de longueur à l'intérieur du Soleil), on peut considérer que, dans la mesure où l'espace de de Sitter traduit correctement les équations de la relativité générale, le procédé actuel de construction des Tables des planètes est justifié.

Il reste maintenant à évoquer le problème le plus délicat, celui de la liaison entre les éléments des Tables et les observations.

5. Observations géocentriques : temps.

Le temps d'une horloge terrestre n'est pas identifiable à la variable indépendante t , du fait de la rotation du Soleil, de la circulation de la Terre sur l'écliptique (mouvement d'ailleurs non circulaire), de la masse et de la rotation de la Terre, de la présence de la Lune,etc.

1° L'effet principal est dû au mouvement de la Terre en longitude. Ce mouvement entraîne un accroissement apparent de la vitesse des mouvements observés, (vitesse mesurée dans l'échelle de la variable t, donc non directement accessible) ; cet accroissement traduit le déplacement angulaire relativiste d'une direction d'arguments géocentriques fixés par rapport à un système fixe (système de coordonnées héliocentriques). Au temps dt réellement nécessaire pour un déplacement, nous faisons correspondre le temps propre $d\theta$ relatif à la durée, plus courte, du déplacement apparent :

$$d\theta = \left(1 - \frac{3}{2}\frac{GM}{c^2 a}\right)dt\ , \qquad \text{(a : rayon moyen de l'orbite terrestre)},$$

soit $\dfrac{d\theta}{dt} = 1 - 1{,}5\ 10^{-8}$.

Pour interpréter cet effet, il convient de rappeler la façon dont le temps propre nous est perçu ; les observations astronomiques sont toutes situées en dernière analyse, dans le temps comme dans l'espace, par l'intermédiaire des phénomènes suivants : passage du Soleil au point vernal ; position et mouvement du point vernal (par rapport à la sphère des fixes) ; rotation apparente du point vernal (par rapport à la Terre, au cours du mouvement diurne). L'accroissement apparent des vitesses du point vernal dans ces mouvements doit être pris en compte avant tout ; il se traduit simplement, sous la forme d'un déplacement angulaire apparent dont la valeur séculaire est $n.\frac{3}{2}\frac{GM}{c^2 a}$, (n étant le moyen mouvement terrestre séculaire), soit $1''\!,91$.

Il s'agit là d'un déplacement qui s'ajoute aux effets de précession d'ordre mécanique, et qui est dit "précession géodésique" ; il est inclus dans la précession observée (5026") . La précession géodésique n'intervient ainsi que si l'on fait de la précession un calcul théorique, calcul où s'introduisent des constantes mal définies relatives à la constitution interne de la Terre, et qui ne peut guère servir qu'à déterminer ces constantes.

Le sort du repère des coordonnées étant réglé, l'accroissement apparent des vitesses subsiste. Mais modifier l'échelle des temps en usage (jours solaires moyens) pour en tenir compte n'aurait aucun sens, l'unité de temps pouvant être librement choisie. D'autre part, il y a par définition cohérence entre le temps propre et la constante G de la mécanique newtonienne ; aucun effet différent de ceux qu'entraîne la mécanique newtonienne ne doit être attendu, dans les mouvements observés, par le fait de la non-identité mathématique entre le temps propre et la variable indépendante t . Aucun effet ne se produira en mécanique relativiste, la variable t étant comptée dans notre échelle de temps propre, la constante G étant celle de la mécanique newtonienne, si l'on étudie les mouvements en coordonnées héliocentriques, les positions géocentriques en étant déduites après. (Au contraire, si l'on étudie les mouvements géocentriques en mécanique relativiste, il convient de tenir compte de la différence des échelles de temps ; modifier la constante G paraît d'ailleurs conduire au même résultat).

2° Ce qui précède vaut seulement pour les écarts relatifs $\frac{d\Theta - dt}{dt}$ qui sont constants. Parmi les écarts périodiques, le terme principal provient de l'inégalité du rayon vecteur entraînée par l'excentricité de l'orbite terrestre. Ce terme, de période annuelle, a pour demi-amplitude $3{,}3.\ 10^{-10}$; l'écart maximum qui peut en résulter pour $t - \Theta$ correspond à un certain intervalle de six mois, et vaut alors $\frac{T}{\pi}.3{,}3.10^{-10}$, (T étant la durée de l'année), soit $0^{s}{,}002$.

C'est par l'observation des positions relatives du Soleil et des planètes, (et la comparaison avec les résultats théoriques de la mécanique newtonienne), qu'est défini notre temps propre ; le repérage pratique des temps se fait par l'intermédiaire d'un mouvement bien plus rapide, mais non uniforme, le mouvement de rotation terrestre, qui définit le temps terrestre.

La mesure directe, en temps propre, d'un intervalle de $0^{s}{,}002$, n'est pas concevable : la Lune, qui est le corps observable le plus rapide, se déplace au plus de $0''{,}001$ pendant cet intervalle ; il est peu probable qu'une direction soit physiquement définie à cette précision, du fait de l'hétérogénéité de l'atmosphère terrestre.

Le temps terrestre, d'autre part, présente, entre autres irrégularités, une variation saisonnière qui, pour six mois, peut atteindre $0^{s}{,}100$. Cette variation est partiellement d'origine météorologique ; son évaluation rigoureuse est donc impossible par la voie théorique. L'effet relativiste de $0^{s}{,}002$ ne peut être dissocié de l'effet terrestre dans l'écart que l'on mesure (2) par voie expérimentale.

---

(2) En se référant aux indications fournies par des garde-temps à quartz.

Ainsi, les différents écarts entre temps propre et temps cosmique ne semblent pas pouvoir être décelés par un observateur terrestre. Une conséquence importante découle de cette conclusion : le temps que diffusent les services astronomiques de l'heure, et le Bureau international de l'heure en particulier, est dépourvu d'inégalités d'origine relativiste.

6. Observations géocentriques : positions.

Les positions des planètes sont déterminées par des observations géocentriques, puis traduites en coordonnées héliocentriques. L'espace géocentrique n'est pas isotrope ; d'autre part $\sqrt{-c^2 ds^2}/dr$ est fonction de r ; la composition euclidienne des vecteurs n'est donc pas rigoureusement correcte.

L'erreur est difficile à estimer. S'il se trouvait qu'elle n'est pas absolument négligeable, son effet se traduirait sensiblement, (si l'on peut négliger les excentricités), par l'introduction parasite dans les éléments des mouvements observés d'une inégalité héliocentrique, fonction périodique de la différence des longitudes de la Terre et de la planète ; l'inégalité principale serait évidemment une inégalité de longitude.

Il s'agirait ainsi d'un terme se groupant avec les termes dûs à la perturbation du mouvement de la planète par le système Terre-Lune. Or cette perturbation est faible ; par rapport à sa valeur théorique (newtonienne), l'observation ne montre pas de résidus significatifs ; d'autre part la valeur observée n'a pas de rôle direct dans la détermination des constantes fondamentales.

Cependant, la conclusion est différente en ce qui concerne les astéroïdes. On sait en particulier qu'au voisinage de chaque opposition périhélique l'observation d'Eros s'effectue pendant plusieurs mois, et que les perturbations observées fournissent, entre autres éléments, la masse du système Terre-Lune, constante inséparable de la parallaxe solaire. Sans traiter le problème général de la validité de la composition euclidienne des vecteurs, il serait intéressant, pour le cas simple d'Eros à la quadrature suivant l'opposition périhélique, de s'assurer que l'anomalie calculée à partir de l'observation ne diffère pas de l'anomalie réelle par une quantité sensible (0",2 par exemple). Il va de soi qu'on doit s'attendre à un résultat négatif ; mais, dans le cas contraire, des problèmes nouveaux se poseraient.

Il n'a pas été question des satellites de Jupiter dans cet exposé. Leur système est sensible à différents effets relativistes ; mais leur théorie (newtonienne) est loin d'être assez avancée pour que les éléments des orbites soient bien déterminés.

BIBLIOGRAPHIE

Les résultats théoriques obtenus dès les premiers travaux (dû à SCHARZSCHILD et à de SITTER) n'ont pas reçu depuis lors de compléments utilisables. L'exposé le plus précis qui en existe est, encore actuellement, celui qu'en a fait CHAZY :

CHAZY (Jean). - La théorie de la relativité et la mécanique céleste, Tomes 1 et 2. - Paris, Gauthier-Villars, 1928-1930.

On retrouve l'essentiel de ces résultats dans les ouvrages récents, tel que :

McVITTIE (G.C.). - General relativity and cosmology. - London, Chapman and Hall 1956.

<u>Références particulières.</u>

Travaux du l' U. S. naval Observatory :

Astr. Pap. Ephem., t. 11, 1943, et suivants.

Avance observée des périhélies de Mercure et de la Terre, respectivement :

CLEMENCE (G.M.). - The motion of Mercury, 1765-1937, Astr. Pap. Amer. Ephem., t. 11, 1943, p. 1-222 ; en particulier, p. 58.

MORGAN (H.R.). - The earth's perihelion motion, Astr. J., t. 51, 1946, p. 127-129.

Utilisation de la précession géodésique :

de SITTER (W). - On the system of astronomical constants, Bull. astr. Inst. Netherlands, t. 8, 1938, p. 213-231.

Influence de l' excentricité de l'orbite terrestre sur le temps propre :

COSTA de BEAUREGARD (O.). - Relation entre le temps propre d'une horloge terrestre et le temps astronomique de Schwarzschild à l'approximation de 10^{-12} , J. Phys. et le Radium, t. 18, 1957, p. 17-21.

Irrégularités de la rotation terrestre :

STOYKO (N.). - La variation de la vitesse de rotation de la Terre, Bull. astr., t. 15, 1950, p. 229-242.