

SÉMINAIRE JANET. MÉCANIQUE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE CÉLESTE

F. HENNEQUIN

Équations approchées du mouvement en relativité générale. Méthode du tenseur impulsion-énergie

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 1 (1957-1958),
exp. n° 2, p. 1-15

http://www.numdam.org/item?id=SJ_1957-1958__1__A2_0

© Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste
(Secrétariat mathématique, Paris), 1957-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

-:-:-

Séminaire de MÉCANIQUE ANALYTIQUE
et de MÉCANIQUE CÉLESTE
Année 1957/58

14 décembre 1957
et 11 janvier 1958

-:-:-

ÉQUATIONS APPROCHÉES DU MOUVEMENT EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE
MÉTHODE DU TENSEUR IMPULSION-ÉNERGIE

par Mme F. HENNEQUIN

1. Identités de conservation.

Dans la variété espace-temps douée de la structure riemannienne hyperbolique normale à un carré positif et trois carrés négatifs définie par :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$$

les équations tensorielles du champ sont

$$S_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta} .$$

Les premiers membres de ces équations ne sont pas indépendants : des identités de Ricci relatives au tenseur de courbure de la variété riemannienne on déduit

$$\nabla_\alpha S^\alpha_\beta = 0 .$$

Comme κ est une constante, il en résulte

$$(1) \quad E_\beta = \nabla_\alpha T^\alpha_\beta = 0 .$$

Ces relations sont appelées identités de conservation du schéma considéré. Le tenseur $T^{\alpha\beta}$ s'exprime en fonction de données physiques représentant les énergies du champ (masses, pressions, vitesses, champ électromagnétique s'il y a lieu). Les identités de conservation nous fourniront donc quatre relations automatiquement vérifiées par ces données physiques. Examinons ces relations pour les tenseurs associés aux schémas usuels.

a. Schéma matière pure. - Le tenseur associé est de la forme

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta$$

ρ est une fonction scalaire destinée à représenter la masse, u^α désigne les composantes du vecteur unitaire d'espace-temps \vec{u}

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} \quad g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 1$$

Les identités de conservation s'écrivent

$$E_\beta \equiv \nabla_\alpha T_\beta^\alpha = \nabla_\alpha (\rho u^\alpha) \cdot u_\beta + \rho u^\alpha \cdot \nabla_\alpha u_\beta = 0.$$

Formons la combinaison linéaire $E = u^\beta E_\beta$. Il vient :

$$E \equiv \nabla_\alpha (\rho u^\alpha) u^\beta u_\beta + \rho u^\alpha (u^\beta \nabla_\alpha u_\beta) = 0$$

Comme le vecteur \vec{u} est unitaire $u^\beta u_\beta = 1$; en différentiant, on obtient :

$$u^\beta \nabla_\alpha u_\beta = 0$$

Par conséquent

$$(2) \quad E \equiv \nabla_\alpha (\rho u^\alpha) = 0$$

c'est une équation de continuité. Les équations $E_\beta = 0$ se réduisent alors à

$$(3) \quad u^\beta \nabla_\alpha u_\beta = 0.$$

Ces relations expriment que les trajectoires du vecteur \vec{u} ou lignes de courant, sont les géodésiques de la variété riemannienne. Evaluons la divergence covariante d'espace-temps à l'aide d'une divergence ordinaire ($\partial_\alpha f$ désigne la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$)

$$\nabla_\alpha (\rho u^\alpha) = \partial_\alpha (\rho u^\alpha) + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \rho u^\beta.$$

Or :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha = 1/2 g^{\alpha\gamma} \partial_\beta g_{\alpha\gamma} = \frac{\partial_\beta \sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}}$$

Par conséquent

$$\nabla_\alpha (\rho u^\alpha) = \frac{\partial_\alpha (\rho u^\alpha \sqrt{|g|})}{\sqrt{|g|}}$$

Introduisons la vitesse d'espace $v^i = \frac{dx^i}{dx^0}$ ($i = 1, 2, 3$) posons $v^0 = 1$, $u^\alpha = u^0 v^\alpha$; il vient :

$$\partial_\alpha (\rho u^0 \sqrt{|g|} v^\alpha) = 0$$

La comparaison avec l'écriture classique des conditions de continuité nous conduit à choisir comme densité de masse la quantité

$$(4) \quad m = \rho u^0 \sqrt{|g|}$$

alors

$$(5) \quad E \sqrt{|g|} \equiv \partial_\alpha (m v^\alpha) = 0$$

Dans les applications aux problèmes célestes, la métrique est voisine d'une métrique

de Minkowski

$$c^2(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

u^0 est alors voisin de $\frac{1}{c}$, m est alors voisin de ρ .

b. Schéma fluide parfait. - Le tenseur représentant un schéma fluide parfait fait intervenir en plus du facteur de masse ρ une pression partielle p . Les effets de pression sont faibles devant les effets de masse ; l'étude de la dynamique des milieux continus en relativité restreinte conduit à prendre comme tenseur impulsion-énergie ([4], p. 186-191)

$$T^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\alpha u^\beta - \frac{p}{c^2} g^{\alpha\beta}$$

Remarquons que la densité de masse ρ et $\frac{p}{c^2}$ ont pour équation de dimension ML^{-3} ; ces quantités sont donc homogènes.

Ecrivons les identités de conservation pour ce tenseur, il vient

$$E_\beta \equiv u_\beta \nabla_\alpha \left[\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\alpha \right] + \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta - \frac{\partial_\beta p}{c^2} = 0$$

Alors

$$E = u^\beta E_\beta \equiv \nabla_\alpha \left[\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\alpha \right] u^\beta u_\beta + \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\alpha u^\beta \nabla_\alpha u_\beta - u^\beta \frac{\partial_\beta p}{c^2} = 0$$

$$E \equiv \nabla_\alpha \left[\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\alpha \right] - u^\alpha \partial_\alpha \frac{p}{c^2}$$

qui se réduit à

$$E \equiv \nabla_\alpha (\rho u^\alpha) + \frac{p}{c^2} \nabla_\alpha u^\alpha = 0$$

comme $\nabla_\alpha t^\alpha = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha (t^\alpha \sqrt{|g|})$ il vient

$$(6) \quad E \sqrt{|g|} \equiv \partial_\alpha (mV^\alpha) + \frac{p}{c^2} \partial_\alpha (u^\alpha \sqrt{|g|}) = 0$$

Donc les conditions de conservation $E_\beta = 0$ s'écrivent

$$\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = \left(g_\beta^\alpha - u^\alpha u_\beta\right) \frac{\partial_\alpha p}{c^2}$$

on démontre ([5], p. 74) que ces équations définissent les géodésiques d'une métrique conforme à la métrique riemannienne $ds^2 = F^2 ds^2$ où la fonction F est

définie par $\frac{\partial_\alpha F}{F} = \frac{\partial_\alpha p}{\rho c^2 + p}$.

2. Equations spatio-temporelles du mouvement.

Nous venons de voir que les identités de conservation ont un contenu physique important, en particulier elles déterminent les lignes de courant.

Nous donnerons donc la définition suivante :

Les équations spatio-temporelles du mouvement d'une masse d'épreuve placée dans un champ sont fournies par les identités de conservation du tenseur impulsion-énergie représentant les distributions énergétiques du champ.

Il revient évidemment au même de considérer des combinaisons linéaires indépendants de ces relations. Les quatre identités de conservation correspondent à trois équations de mouvement au sens classique ($E_i = 0$) et à une équation de continuité $E = 0$.

a. Equations de mouvement au sens classique. - Gomme

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} T_i^{\alpha} &= \partial_{\alpha} T_i^{\alpha} + \Gamma_{\alpha \beta}^{\alpha} T_i^{\beta} - \Gamma_{\alpha i}^{\beta} T_{\beta}^{\alpha} = \\ &= \frac{\partial_{\alpha} (T_i^{\alpha} \sqrt{|g|})}{\sqrt{|g|}} - \frac{1}{2} T^{\alpha \beta} \partial_i g_{\alpha \beta} \end{aligned}$$

nous introduisons les densités tensorielles

$$\mathcal{G}^{\alpha \beta} = T^{\alpha \beta} \sqrt{|g|} \quad \mathcal{G}_{\beta}^{\alpha} = T^{\alpha}_{\beta} \sqrt{|g|}$$

et nous écrivons les trois équations spatio-temporelles, généralisant les équations classiques de mouvement, sous la forme

$$E_i \sqrt{|g|} \equiv \partial_{\alpha} \mathcal{G}_i^{\alpha} - \frac{1}{2} \mathcal{G}^{\alpha \beta} \partial_i g_{\alpha \beta} = 0$$

Les équations spatio-temporelles du mouvement d'un corps seront obtenues en intégrant les équations spatio-temporelles d'une masse d'épreuve sur le volume d'espace occupé par le corps.

Plaçons-nous maintenant dans le cas d'un schéma du type fluide parfait. On a

$$\mathcal{G}_i^j = v^j \mathcal{G}_i^0 - \delta_i^j \frac{\rho \sqrt{|g|}}{c^2} \quad \delta_i^j = \text{symbole de Kronecker.}$$

Les équations de mouvement d'un corps A sont

$$\int_A E_i \sqrt{|g|} dv = 0 \quad (dv = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)$$

soit

$$\int_A \left[\partial_{\alpha} (\mathcal{G}_i^0 v^{\alpha}) - \frac{1}{2} \mathcal{G}^{\alpha \beta} \partial_i g_{\alpha \beta} - \partial_i \frac{\rho \sqrt{|g|}}{c^2} \right] dv = 0$$

Or p et les potentiels sont des fonctions continues dans A et sur le bord de A ; leurs dérivées premières sont continues dans A . L'intégrale $\int_A \partial_i (p \sqrt{|g|}) dv$ est égale au flux de $p \sqrt{|g|}$ à travers le bord de A , ce flux est nul puisque p s'annule sur le bord de A . On a donc

$$(7) \quad \int_A \partial_\alpha (\mathcal{E}_i^0 v^\alpha) dv = \frac{1}{2} \int_A \mathcal{E}^{\alpha\beta} \partial_i g_{\alpha\beta} dv$$

b. Equation de continuité. - Intégrons l'équation (6) sur un domaine D_4 à quatre dimensions limité par un tube de courant T et deux sections d'espace \sum_3 ($x_0 = t$) et \sum_3' ($x_0 = t'$) . Il vient

$$\int_{D_4} [\partial_\alpha (mV^\alpha) + \frac{p}{c^2} \partial_\alpha (u^\alpha \sqrt{|g|})] dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 0$$

Or

$$\int_{D_4} \partial_\alpha (mV^\alpha) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \int_{\partial D_4} m\vec{V} d\sigma$$

Le flux de $m\vec{V}$ à travers le bord de D_4 comprend :

a. Le flux à travers le bord du tube T engendré par \vec{u} ; comme $u^\alpha = V^\alpha \frac{dx^0}{ds}$ ce flux est nul ;

b. le flux à travers les sections d'espace \sum_3 et \sum_3' soit

$$\int_{\sum_3 + \sum_3'} m dv .$$

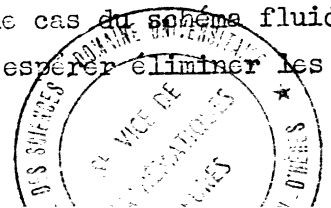
Appelons $M(t)$ la masse du corps A à l'instant t ; l'intégrale précédente vaut $M(t') - M(t)$.

On a donc :

$$M(t') - M(t) + \int_{D_4} \frac{p}{c^2} \partial_\alpha (u^\alpha \sqrt{|g|}) dx^0 \wedge dv = 0$$

La variation de la masse M au cours du temps est uniquement liée aux termes de pression p . Dans le cas d'un schéma matière pure $p \equiv 0$, la masse est constante au cours du temps. Le choix de m nous donne dans le cas du schéma fluide parfait la masse la plus conservatrice, on ne peut en effet espérer éliminer les termes contenant p .

Si on fait tendre t' vers t , il vient



$$(8) \quad \frac{dM}{dt} + \int_{\Sigma_3} \frac{p}{c^2} \partial_\alpha (u^\alpha \sqrt{|g|}) dv = 0$$

3. Recherche d'une solution approchée des équations de champ.

Une solution sera un ensemble de dix potentiels satisfaisant aux équations de champ c_1, c_3 par morceaux pour lesquelles les hypersurfaces de discontinuité sont les frontières des régions contenant de l'énergie, ces discontinuités étant du type de Schwarzschild. Pour avoir des résultats qui puissent être interprétables physiquement, il nous faut choisir parmi l'ensemble des systèmes de coordonnées un système qui soit adapté le mieux possible à la réalité physique. A ce point de vue, les coordonnées qui s'imposent sont les coordonnées isothermes (G. DARMOIS). Rappelons que dans un système isotherme

$$F^\rho = - \int_\alpha^\rho g^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha (g^{\alpha\rho} \sqrt{|g|}) = 0.$$

Introduisons les densités tensorielles

$$G^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} \sqrt{|g|}$$

On peut montrer [1] que $S^{\alpha\beta}$ peut être écrit sous la forme suivante

$$S^{\alpha\beta} = S_{(i)}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} A^{\alpha\beta}$$

avec

$$(9) \quad \sqrt{|g|} S_{(i)}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} \partial_{\lambda\mu} G^{\alpha\beta} - g^{\lambda\mu} \int_{\lambda}^{\nu} \partial_{\mu} G^{\alpha\beta} - g^{\lambda\mu} g^{\rho\sigma} \int_{\lambda}^{\alpha} \int_{\mu}^{\beta} \sqrt{|g|} \\ + G^{\alpha\beta} \left[g^{\lambda\mu} \int_{\rho}^{\lambda} \int_{\sigma}^{\mu} + \frac{1}{4} \int_{\mu}^{\rho} \partial_{\rho} g^{\mu\nu} \right]$$

$$(10) \quad A^{\alpha\beta} = g^{\alpha\rho} \partial_{\rho} F^{\beta} + g^{\beta\rho} \partial_{\rho} F^{\alpha} - F^{\rho} \partial_{\rho} g^{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta} (\partial_{\rho} F^{\rho} + \int_{\rho}^{\rho} F^{\rho})$$

Dans un système isotherme, $A^{\alpha\beta} = 0$, $S^{\alpha\beta}$ se réduit à $S_{(i)}^{\alpha\beta}$. Dans chaque équation $S_{(i)}^{\alpha\beta} = \kappa T^{\alpha\beta}$ ne figurent que les dérivées secondes de $G^{\alpha\beta}$;

c'est cette propriété qui va nous permettre de faire usage d'une méthode en cascade d'approximations. Quand nous aurons à notre disposition une solution approchée, nous appellerons équations approchées du mouvement, ce qu'on obtient en substituant la solution approchée dans les équations de mouvement. Nous montrerons plus loin qu'alors les conditions d'isothermie approchées sont automatiquement vérifiées.

Nous allons maintenant exposer en détail les différentes hypothèses faites pour construire une solution approchée des équations de champ correspondant à un schéma fluide parfait ; le modèle d'univers étant composé d'un nombre fini de masses

gravitantes situées à distance finie. (Ce modèle pourra représenter n corps célestes soumis à la gravitation).

4. Hypothèses concernant les potentiels.

a. Comportement asymptotique euclidien du champ. - Nous supposons que les potentiels se comportent dans le domaine à l'infini des sections d'espace comme des potentiels de Newton.

Pour une définition précise du comportement asymptotique euclidien on pourra consulter [5].

Considérons la métrique $ds^{*2} = (g_{ij} - \frac{g_{0i} g_{0j}}{g_{00}}) dx^i dx^j$ qui est définie sur W_3 . Cette métrique permet de définir une distance sur les sections d'espace W_3 . Les potentiels relatifs à un système de coordonnées locales ont un comportement asymptotique euclidien si

$$|g_{ij} + \delta_{ij}|(x) < \frac{M}{r}$$

$$|g_{00} - c^2|(x) < \frac{M}{r}$$

$$|g_{0i}|(x) < \frac{M}{r}$$

$$|\partial_\alpha g_{\beta\gamma}|_x < \frac{M}{r^2}$$

dès que la distance r du point x à un point fixe est suffisamment grande. Si l'on a supposé que V_4 est homéomorphe au produit de R^3 par un segment, on peut montrer que les points du domaine à l'infini de W_3 sont les images par les cartes locales réciproques des points du domaine à l'infini de R_3 muni de la métrique euclidienne $-\sum (dx^i)^2$.

b. Champ faible. - Un espace-temps extérieur (sans masse) complet, à comportement asymptotique euclidien est localement euclidien [5]. Nous traduirons l'hypothèse de champ faible en considérant des potentiels voisins des potentiels de l'espace vide $(c^2, -1, -1, -1)$. Nous supposons que les potentiels admettent des développements limités suivant les puissances de $(\frac{1}{c^2})$ que nous considérons comme un paramètre.

Dans les applications, c représente la vitesse de la lumière.

Nous poserons donc

$$(11) \quad \begin{cases} g_{00} = c^2 + \alpha_{00} + \dots + \frac{\alpha_{00}^{(p)}}{c^{2p}} + o\left(\frac{1}{c^{2p}}\right) \\ g_{0i} = \frac{\alpha_{0i}}{c} + \dots + \frac{\alpha_{0i}^{(p+1)}}{c^{2p+2}} + o\left(\frac{1}{c^{2p+1}}\right) \\ g_{ij} = -\delta_{ij} + \frac{\alpha_{ij}}{c^2} + \dots + \frac{\alpha_{ij}^{(p+1)}}{c^{2p+2}} + o\left(\frac{1}{c^{2p+2}}\right) \end{cases}$$

Les coefficients α admettent alors des majorations du type $\frac{M}{r}$ à l'infini sur les sections d'espace ; leurs dérivées sont majorées par $\frac{M}{r^2}$.

c. Coordonnées isothermes. - Nous supposerons qu'il existe un système global de coordonnées isothermes tel que les potentiels correspondants satisfont aux hypothèses a. et b.

5. Hypothèses concernant les distributions énergétiques.

- Le schéma est fluide parfait : ρ et p sont différents de zéro, dans un nombre fini N de domaines d'espace bornés et connexes.
- Les distances mutuelles des corps sont supposées grandes devant leurs dimensions ; le mouvement de chaque corps sera défini par la vitesse de son centre de gravité, on néglige les rotations autour du centre de gravité.
- Les vitesses des corps sont faibles devant la vitesse de la lumière .

Ces hypothèses nous serviront lors des calculs effectifs des termes correctifs à l'action newtonienne. Nous nous sommes bornés à calculer les termes correctifs du 1er ordre. Pour des calculs plus poussés, je pense qu'il faudrait tenir compte des rotations des corps autour de leur centre de gravité. Avec ces hypothèses on a pour équations de mouvement

$$(12) \quad \frac{d}{dt} \int_A \mathcal{C}_i^\theta dv = \frac{1}{2} \int_A \mathcal{C}^{\alpha\beta} \partial_i g_{\alpha\beta} dv$$

6. Technique d'approximation.

Nous prendrons les équations de champ en coordonnées isothermes sous la forme

$$(13) \quad \sqrt{|g|} S_{(i)}^{\alpha\beta} = \kappa \mathcal{C}^{\alpha\beta} .$$

Nous avons supposé que les potentiels avaient des développements limités suivant les puissances de $\frac{1}{c}$; les densités tensorielles $G^{\alpha\beta}$ admettent alors des développements limités $\frac{1}{c}$ du type :

$$\begin{cases} G^{0\alpha} = \frac{\delta^{0\alpha}}{c} + \dots + \frac{G^{0\alpha(2p+1)}}{c^{2p+1}} + o\left(\frac{1}{c^{2p+1}}\right) \\ G^{ij} = -c \delta_{ij}^j + \dots + \frac{G^{ij(2p-1)}}{c^{2p-1}} + o\left(\frac{1}{c^{2p-1}}\right) \end{cases}$$

La notation $P^{(k)}$ désigne le coefficient du terme en $\frac{1}{c^k}$ dans le développement limité de la quantité P .

Il est donc possible de calculer en fonction des $\alpha_{\alpha\beta}^{(k)}$, ou des $G^{\alpha\beta(k)}$ des développements limités des premiers membres de (12).

Comme

$$g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 1 \quad u^{0^2} (g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta) = 1$$

on pourra obtenir un développement limité de u^0 dont les coefficients seront des fonctions des $\alpha_{\alpha\beta}^{(k)}$ ou $G^{\alpha\beta(k)}$, et des vitesses d'espace v^i ; le premier terme est $\frac{1}{c}$, $u^0 = \frac{1}{c} + o\left(\frac{1}{c}\right)$,

$$\mathfrak{T}^{\alpha\beta} = \mathfrak{m} u^0 v^\alpha v^\beta + \frac{\mathfrak{m} p \sqrt{|g|}}{c^2} (u^{0^2} v^\alpha v^\beta - g^{\alpha\beta})$$

Le développement limité du 2e membre pourra donc être calculé en fonction de \mathfrak{m} , p , v^i , $\alpha_{\alpha\beta}^{(k)}$ ou $G^{\alpha\beta(k)}$.

Portons ces développements limités dans l'équation (12).

Egalons les termes de degré minimum en $\left(\frac{1}{c}\right)$ dans les 10 équations; on obtient:

$$(14) \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} \Delta G^{0\alpha(3)} & = (\mathfrak{T}^{0\alpha})^{(3)} \\ -\frac{1}{2} \Delta G^{ij(1)} & = (\mathfrak{T}^{ij})^{(1)} \end{cases}$$

Δ désigne le Laplacien ordinaire dans l'espace euclidien à trois dimensions.

$\Delta = \partial_{11} + \partial_{22} + \partial_{33}$. On constate que les parties principales du second membre ne dépendent pas des $G^{0\alpha(3)}$, $G^{ij(1)}$. Ce système nous permet donc de résoudre en $G^{0\alpha(3)}$, $G^{ij(1)}$ puisque nous connaissons le comportement de ces quantités à l'infini sur les sections d'espace. Egalons les coefficients des termes contenant $\frac{1}{c}$ à une puissance immédiatement supérieure

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \Delta G^{0\alpha(5)} + \Psi^{0\alpha(5)} & = (\mathfrak{T}^{0\alpha})^{(5)} \\ -\frac{1}{2} \Delta G^{ij(3)} + \Psi^{ij(3)} & = (\mathfrak{T}^{ij})^{(3)} \end{cases}$$

ce qui détermine $\Delta G^{0\alpha(5)}$ et $\Delta G^{ij(3)}$ en fonction de quantités connues.

En itérant on obtient le système :

$$(15) \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} \Delta G^{0\alpha(2p+1)} + \varphi^{0\alpha(2p+1)} = (\kappa \mathcal{G}^{0\alpha})_{(2p+1)} \\ -\frac{1}{2} \Delta G^{ij(2p+1)} + \varphi^{ij(2p-1)} = (\kappa \mathcal{G}^{ij})_{(2p-1)} \end{cases}$$

Comme les termes de $S_{(i)}^{\alpha\beta} \sqrt{|g|}$ autres que $\frac{1}{2} g^{\lambda\mu} \partial_{\lambda\mu} G^{\alpha\beta}$ contiennent tous des produits de dérivées premières par d'autres dérivées premières, $\varphi^{\alpha\beta(2k+1)}$ ne dépend que des $G^{\alpha\beta(2k'+1)}$ avec $k' < k$ et de leurs dérivées premières. Par conséquent la résolution des systèmes tels que (15) avec $p' < p$ permet de déterminer explicitement $\varphi^{ij(2p-1)}$, $(\kappa \mathcal{G}^{ij})^{2p-1}$ ne dépend que des potentiels précédemment calculés. Nous pouvons donc déterminer $G^{ij(2p-1)}$. Ensuite on raisonne de façon analogue pour $G^{0\alpha(2p+1)}$.

On peut donc, théoriquement, (car on sera vite arrêté par la complexité des calculs) calculer une solution approchée à tel ordre p que l'on voudra.

Equations approchées du mouvement : la substitution de la solution approchée d'ordre p dans les équations de mouvement nous fournira les équations approchées de mouvement d'ordre p .

7. Rôle de la condition d'isothermie.

Notre but initial était la résolution de

$$S^{\alpha\beta} = \kappa T^{\alpha\beta}$$

En choisissant un système de coordonnées isothermes, nous nous sommes ramenés au système plus simple

$$(16) \quad S_{(i)}^{\alpha\beta} = \kappa T^{\alpha\beta}$$

pour lequel nous avons écrit les équations de mouvement sous la forme habituelle $\nabla_{\alpha} T^{\alpha}_{\beta} = 0$; on peut se demander si les conditions d'isothermie sont vérifiées par la solution trouvée, c'est-à-dire si le problème premier a bien été traité dans sa généralité.

Montrons que les équations de mouvement d'ordre p entraînent la vérification des conditions d'isothermie approchées d'ordre p .

Pour une solution de (16), les identités de conservation entraînent $\nabla_{\alpha} S^{\alpha\beta}_{(i)} = 0$.
Or $\nabla_{\alpha} S^{\alpha\beta} = 0$ donc $\nabla_{\alpha} A^{\alpha\beta} = P^{\beta} = 0$.

Soit

$$P^\beta \equiv g^{\lambda\mu} \partial_\lambda F^\beta + 2g^{\lambda\mu} \partial_\mu F^\lambda \Gamma_\lambda^\beta - F^\lambda \partial_\lambda g^{\lambda\mu} \Gamma_\lambda^\beta = 0$$

Les équations du mouvement d'ordre p sont équivalentes à

$$\sum_{k=0}^p \frac{\nabla_\alpha T^{\alpha\beta(2k)}}{c^{2k}} = 0$$

Nous verrons dans le paragraphe suivant que κ est d'ordre $\frac{1}{c^2}$. On a donc

$$\sum_{k=1}^p \frac{P^\beta(2k+2)}{c^{2k}} = 0$$

Les équations de mouvement du premier ordre entraînent

$$P^\beta(2) = 0$$

qui se réduit à $\Delta F^\beta(2) = 0$. On a donc $F^\beta(2) = 0$. Les équations de mouvement d'ordre 2 entraînent $P^\beta(4) = 0$. Or $F^\beta(2)$ étant nul $P^\beta(4) = \Delta F^\beta(4) = 0$ donc $F^\beta(4) = 0$ et ainsi de suite : les équations approchées de mouvement d'ordre p entraînent $F^\beta(2p+2) = 0$.

Certains auteurs (FOCK, PETROVA) ont utilisé effectivement les conditions d'isothermie pour former les équations approchées de mouvement, PAPAPETROU a utilisé les conditions de conservation.

8. Première approximation.

Nous poserons

$$\begin{cases} g_{00} = c^2 - 2u^{00} + o\left(\frac{1}{c^2}\right) \\ g_{0i} = \frac{\alpha_i}{c^2} + o\left(\frac{1}{c^4}\right) \\ g_{ij} = -\delta_{ij} + \frac{\alpha_{ij}}{c^2} + o\left(\frac{1}{c^4}\right) \end{cases}$$

on en déduit

$$\begin{cases} G^{00} = \frac{1}{c} + \frac{u^{00}}{c^3} - \frac{1}{2c^3} \sum \alpha_{ii} + o\left(\frac{1}{c^5}\right) \\ G^{0i} = \frac{\alpha_i}{c^3} \\ G^{ij} = -c \delta_{ij} + \delta_{ij} \left(\frac{u^{00}}{c}\right) + \frac{\sum \alpha_{ii}}{2c} - \frac{\alpha_{ij}}{c} + o\left(\frac{1}{c^3}\right) \end{cases}$$

$$\sqrt{|g|} = c \left(1 - \frac{u^{00}}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{\sum \alpha_{ii}}{c^2} + o\left(\frac{1}{c^4}\right) \right)$$

$$u^0 = \frac{1}{c} + o\left(\frac{1}{c^3}\right)$$

$$\begin{cases} \alpha_{00} = \frac{m}{c} + o\left(\frac{1}{c^3}\right) \\ \alpha_{0i} = \frac{m}{c} v^i + o\left(\frac{1}{c^3}\right) \\ \alpha_{ij} = \frac{m}{c} \frac{v^i v^j}{c} + \frac{p}{c} \delta_{ij} \end{cases}$$

Les équations de la première approximation sont de la forme (14) x est donc d'ordre $\frac{1}{c^3}$ et

$$\begin{cases} \Delta(u^{00} - \sum \frac{\alpha_{ii}}{2}) = -2\pi c^2 m \\ \Delta \alpha_{ij} = -2\pi c^2 m v^i \\ \Delta [\delta_{ij}^j (u^{00} + \sum \frac{\alpha_{ii}}{2}) - \alpha_{ij}] = 0 \end{cases}$$

Appelons u_a la solution nulle à l'infini de

$$\Delta u_a = -\frac{4\pi c^2}{2} m_a \quad (m_a = \text{masse sur le corps } A).$$

On a $U^{00} = \sum u_a$ la sommation est étendue à tous les corps situés dans le champ A, \dots, N .

$$\alpha_{ij} = 4 \sum u_a \dot{a}^i$$

où \dot{a}^i désigne la i -ième composante de la vitesse du centre de gravité du corps A .

a. Equations de mouvement du corps A :

$$(\alpha_{ij}^0)_A = -\frac{m_a \dot{a}^i}{c} + o\left(\frac{1}{c^3}\right)$$

Il vient

$$\frac{d}{dt} \int_A m_a \dot{a}^i dv = \int_A m_a \partial_i U^{00} dv + o\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

Comme nous avons supposé que les distances sont grandes devant les dimensions des corps la fonction $u_b(x)$ varie très peu quand x décrit A . D'autre part (17) entraîne $\frac{dm}{dt} = o\left(\frac{1}{c^4}\right)$ donc

$$M_a \frac{d \dot{a}^i}{dt} = M_a \sum' \partial_i u_b(a) + \int_A m_a \partial_i u_a dv + o\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

La notation \sum' indique que la sommation est étendue à tous les corps excepté A. Dans le cas où le corps A possède la symétrie sphérique, $\int m_a \partial_i u_a dv = 0$ et l'on a exactement l'écriture classique; u_a est donc exactement le potentiel newtonien créé par le corps A et par conséquent $\frac{\kappa \cdot c^2}{2} = 4\pi G$ où G est la constante d'attraction universelle.

Dans ces conditions

$$m = \rho u^0 \sqrt{-g} = \rho \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{2U^{00}}{c^2} + o\left(\frac{1}{c^4}\right)\right)$$

cette formule évoque la formule de relativité restreinte écrite avec les notations usuelles

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots \left(\frac{1}{c^4}\right)\right)$$

la masse ~~en varie~~ donc avec la vitesse de la particule on première approximation comme la masse de la relativité restreinte. On a en plus un facteur contenant les potentiels, la masse m apparait donc comme une masse dynamique, ρ caractérise l'état physique du corps au repos.

9. Deuxième approximation.

La manière de procéder est la même, nous donnerons simplement les équations de mouvement correspondantes. Dans le cas général les équations sont

$$\begin{aligned} M_a \frac{d}{dt} \left[\dot{a}^i \left(1 + \frac{v_a^2}{2c^2} + \frac{3}{c^2} \sum' u_b(a) + \int_A p dv \right) - \frac{4}{c^2} \sum' b^i u_b(a) \right] = \\ \int_A m_a \partial_i u_a dv + \sum' \partial_i u_b(a) \left[M_a + \frac{3}{2c^2} M_a v_a^2 - \frac{M_a}{c^2} \sum' u_b(a) + \frac{3}{c^2} \int_A p dv \right] \\ + \frac{3M_a}{2c^2} \sum' v_b^2 \partial_i u_b(a) - \frac{4M_a}{c^2} \dot{a}^k \sum' b^k \partial_i u_b(a) + \int_A \frac{m_a}{c^2} \partial_i (f - g + \ell) dv \\ - \frac{1}{c^2} \left[v_a^2 + \sum' u_b(a) \right] \int_A m_a \partial_i u_a dv - \frac{1}{c^2} \int_A m_a u_a \partial_i u_a dv - \int_A \frac{3p}{c^2} \partial_i u_a dv + o\left(\frac{1}{c^4}\right) \end{aligned}$$

f, g, ℓ étant définies par

$$\begin{cases} \Delta f = \partial_{00} U^{00} \\ \Delta g = U^{00} \Delta U^{00} \\ \Delta \ell = -12\pi G p \end{cases}$$

b. Cas de corps sphériques. - Dans le cas particulier d'un schéma purement matériel ($p=0$) associé à deux corps A et B présentant la symétrie sphérique, ces équations se simplifient. Soit r_{ab} la distance des deux corps et g^* la solution régulière à l'infini de $\Delta g^* = u_b \Delta u_b$. On obtient :

$$\begin{aligned} \ddot{a}^i - \partial_i u_b(a) &= \frac{\partial_i u_b(a)}{c^2} \left[v_a^2 + \frac{3}{2} v_b^2 - 4u_b(a) - 5u_a(b) - 4\dot{a}^k \dot{b}^k \right] - \\ &- \frac{\partial_k u_b(a)}{c^2} \left[\dot{a}^i \dot{b}^k + 4(\dot{a}^i - \dot{b}^i)(\dot{a}^k - \dot{b}^k) \right] - \\ &- \frac{G M_b}{2c^2} \dot{b}^j \dot{b}^k \frac{\partial^3 r_{ab}}{\partial a_j \partial a_k \partial a_i} - \frac{\partial_i g^*(a)}{c^2} - \frac{\ddot{a}^i}{3M_a c^2} \left\{ m_a u_a d_v + O\left(\frac{1}{c^4}\right) \right\} \end{aligned}$$

Les deux derniers termes ne sont pas obtenus par A. PAPAPETROU et EINSTEIN-INFELD-HOFFMANN. La comparaison avec Einstein-Infeld-Hoffmann est malaisée en raison de la dissemblance des méthodes, nous pensons que la différence provient d'une relation

$$\frac{dp}{dt} = m_a \frac{du_a}{dt}$$

utilisée par PAPAPETROU. Si l'on admet cette relation, on ne peut pas faire brutalement $p=0$ dans les équations du schéma fluide parfait.

APPENDICE

Rappelons ici brièvement comment PAPAPETROU obtient la relation entre p et ρ dont il vient d'être parlé.

PAPAPETROU utilise les identités de conservation non intégrées sous la forme

$$\partial_\alpha \mathcal{T}^{\alpha i} = \frac{1}{2} \mathcal{T}^{\alpha\beta} \partial_i g_{\alpha\beta}$$

soit

$$\frac{d}{dt} \mathcal{T}^0_i - \frac{\partial_i (p \sqrt{|g|})}{c^2} = \frac{1}{2} \mathcal{T}^{\alpha\beta} \partial_i g_{\alpha\beta}$$

En appliquant les résultats de la première approximation il vient :

$$\frac{d}{dt} (m_a \ddot{a}^i) + \partial_i p = m_a \partial_i U^{00}$$

soit

$$m_a \ddot{a}^i + \partial_i p = m_a \partial_i u_a + m_a \sum' \partial_i u_b$$

A. PAPAPETROU postulant qu'en mécanique newtonienne on a

$$\ddot{a}^i = \sum_b \partial_i u_b,$$

en déduit qu'en mécanique relativiste on a :

$$\partial_i p = m_a \partial_i u_a.$$

On peut remarquer à ce sujet que $\int_A \partial_i p \, dv = 0$, mais rien ne prouve que $\int_A m_a \partial_i u_a \, dv = 0$ si l'on ne suppose pas la symétrie sphérique des corps.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHAZY (Jean). - La théorie de la relativité et la mécanique céleste. - Paris, Gauthier-Villars, 1928.
- [2] FOCK (V. A.). - Sur le mouvement des masses finies d'après la théorie de la gravitation einsteinienne, J. Phys., Acad. Sc. URSS, t. 1, 1939, p. 81-116.
- [3] HENNEQUIN (Françoise). - Etude mathématique des approximations en relativité générale et en théorie unitaire de Jordan-Thiry, Bull. scient. Com. Trav. hist. et scient., t. 1, 1956, 2e partie : Mathématiques. - Paris, Gauthier-Villars, 1957 ; p. 73-154 (Thèse Sc. math. Paris. 1956).
- [4] LICHNEROWICZ (André). - Elements de calcul tensoriel. - Paris, Armand Colin, 1950.
- [5] LICHNEROWICZ (André). - Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. - Paris, Masson, 1955.
- [6] PAPAPETROU (A.). - Equations of motion in general relativity, I., Proc. Phys. Soc., Sect. A, t. 64, 1951, p. 57-75 ; II : The coordinate condition, Proc. Phys. Soc., Sect. A, t. 64, 1951, p. 302-310.
- [7] PETROVA (N. M.). - Sur les équations de mouvement et le tenseur matériel pour des systèmes de masses finies en relativité générale, Akad. Nauk SSSR. Žurnal eksper teoret. Fiz., t. 19, 1949, p. 989-999 (en russe).