Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

Y. Fourès-Bruhat

La relativité générale

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 1 (1957-1958), exp. n° 1, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1957-1958__1__A1_0>

© Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste (Secrétariat mathématique, Paris), 1957-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

par Mme Y. FOURÈS-BRUHAT

Les prochaines conférences de ce séminaire seront consacrées aux équations du mouvement dans la théorie de la relativité. Une application de ces équations est la détermination des trajectoires de n corps sous l'action de la gravitation. Ces équations du mouvement seront établies à partir des équations du champ, de manière approchée, en supposant les masses des corps faibles par rapport à leurs distances et leurs vitesses faibles par rapport à celle de la lumière, ce qui est le cas dans les problèmes de mécanique céleste. On trouvera que, sous ces hypothèses, les équations de la relativité générale conduisent en première approximation aux lois newtoniennes du mouvement des masses gravitantes. Les effets relativistes apparaîtront en deuxième approximation comme correctifs des précédents ; il existe à l'heure actuelle, pour calculer ces effets, essentiellement deux méthodes : méthode du tenseur d'impulsion-énergie et méthode des singularités, qui seront exposées en détail par les auteurs de leurs plus récents achèvements : Mme HENNEQUIN et Mr PHAM TAN HOANG. Je vais simplement en donner le principe, après avoir rappelé les traits essentiels de la théorie de la gravitation d'EINSTEIN.

1. Les principes de la relativité générale.

Dans la théorie de la relativité générale, telle qu'elle a été précisée par Mr LICHNEROWICZ, et exposée dans son livre [7], le cadre d'un problème de mécanique est une variété à quatre dimensions V_4, l'espace-temps, de classe C_2, C_n par morceaux, munie d'une métrique riemannienne de classe C_1, C_3 par morceaux, ayant pour expression en coordonnées locales :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} \, dx^\alpha dx^\beta \qquad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$$

cette métrique est hyperbolique normale et admet en chaque point la décomposition

$$ds^2 = (\omega_0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (\omega_i)^2$$

où les ω_α sont des formes linéaires des différentielles des coordonnés.

L'équation $ds^2 = 0$ définit en chaque point x un cône réel C_x de directions tangentes à V_4 : c'est le cône des directions spatio-temporelles des rayons lumineux issus de x. Une direction dx, tangente en x à V_4, est dite orientée dans le temps si elle est intérieure à C_x $(g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta > 0)$, orientée dans l'espace dans le cas contraire. Un élément de plan à trois dimensions est orienté dans l'espace, si toutes les directions de ce plan sont orientéés dans l'espace. Une ligne de temps sera une ligne dont la tangente en chaque point est orientée dans le temps, une hypersurface d'espace sera une hypersurface dont le plan tangent est orienté dans l'espace.

Un système de coordonnées locales sera physiquement admissible si, en chaque point, une des variables, soit x^0, est temporelle et les trois autres spatialles : $x^0 = Cte$, sera orienté dans l'espace, et les lignes où x^0 varie seul seront des lignes de temps. Ces hypothèses se traduisent sur la métrique par $g_{00} > 0$, $g^{00} > 0$, forme quadratique $g_{ij} X^i X^j$ définie < 0 [1].

Remarquons que, si l'on prend, en un point x, des coordonnés tangentes à un repère orthonormé au sens de la métrique riemannienne, le ds^2 prendra en ce point la forme de la relativité restreinte :

$$ds^2 = (dx^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2 \qquad \text{au point } x \;;$$

Le ds^2 ne prendra cette forme dans un domaine que si l'espace-temps est dans ce domaine pseudo-euclidien (c'est-à-dire sans courbure). Dans le cas général, les $g_{\alpha\beta}$ sont, dans le domaine d'un système de coordonnées, des fonctions des variables x^α qu'on appelle potentiels de gravitation. Ces potentiels généralisent le potentiel de Newton, fonction scalaire solution de

$$\Delta u = 0 \qquad \text{en dehors des masses}$$
$$\Delta u = 4\pi \chi \rho \qquad \text{à l'intérieur des masses}$$

(Δ Laplacien, ρ densité, χ constante de gravitation).Les $g_{\alpha\beta}$ sont solutions d'équations tensorielles pour lesquelles Einstein a proposé :

$$S_{\alpha\beta} = \chi\, T_{\alpha\beta} \tag{1}$$

où $T_{\alpha\beta}$, dit tenseur d'impulsion-énergie, est nul à l'extérieur des masses, et prend, à l'intérieur,une forme qui dépend de l'état de la matière. Sa partie

---

[1] i , j étant indice latin prendront toujours les valeurs 1 , 2 , 3 ;les indices grecs prendront les valeurs 0 , 1 , 2 , 3 .

principale, provenant de l'énergie pondérable, sera toujours de la forme $\rho\, u_\alpha\, u_\beta$ (ρ densité, u_α vecteur vitesse unitaire à 4 composantes) ; il s'ajoutera des termes provenant des pressions, $p(u_\alpha\, u_\beta - g_{\alpha\beta})$, p sera d'ordre $\frac{1}{C^2}$ par rapport à ρ (C vitesse de la lumière). Dans le cas où il existe un champ électromagnétique son tenseur d'impulsion-énergie s'ajoute au précédent.

χ est un facteur constant. $S_{\alpha\beta}$ est un tenseur géométrique défini par la métrique ds^2 pour lequel EINSTEIN a proposé :

$$S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R$$

$R_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci de la métrique (tenseur contracté du tenseur de Riemann-Christoffel $R^{\lambda}_{\alpha\beta\mu}$ dont la nullité exprime le caractère localement euclidien de la métrique) : son expression en fonction des symboles de Christoffel et $\Gamma_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{\beta}$ est :

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\rho\, \Gamma_{\alpha}{}^{\rho}{}_{\beta} - \partial_\alpha\, \Gamma_{\beta}{}^{\rho}{}_{\rho} + \Gamma_{\alpha}{}^{\rho}{}_{\beta}\, \Gamma_{\rho}{}^{\sigma}{}_{\sigma} - \Gamma_{\alpha}{}^{\rho}{}_{\sigma}\, \Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\rho}$$

Les équations (1), les $T_{\alpha\beta}$ étant donnés, se présentent alors comme un système de 10 équations aux dérivées partielles du second ordre, linéaires par rapport aux dérivées secondes, pour les potentiels $g_{\alpha\beta}$. Ces dix équations ne sont pas indépendantes, puisque les $S_{\alpha\beta}$ vérifient quatre identités dites de Bianchi, quelle que soit la métrique,

$$\nabla_\alpha\, S^{\alpha\beta} \equiv 0 \quad .$$

Les égalités correspondantes $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta}$ que doit vérifier le tenseur d'impulsion-énergie sont appelées conditions de conservation.

Résoudre un problème de mécanique relativiste, ce sera chercher une solution globale des équations aux dérivées partielles (1) sur une variété V_4. Il est clair que cette solution ne pourra être déterminée et avoir une interprétation physique, que si les potentiels, ainsi que V_4, sont astreints à des conditions de régularité, et dans le cas où V_4 serait borné on admettrait un domaine à l'infini, à des conditions aux limites.

L'étude des équations et des conditions de raccordement entre ds^2 intérieurs et extérieurs, faite par G. DARMOIS et A. LICHNEROWICZ, ont conduit A. LICHNEROWICZ à définir un "modèle admissible", comme une variété C_2, C_4 par morceaux portant une métrique C_1, C_3 par morceaux hyperbolique normale. A la traversée d'une frontière intérieure-extérieure, les dérivées secondes des potentiels subissent un saut. Du point de vue de la topologie de V_4 , il n'y a pas de restriction a priori et, dans le cas des problèmes cosmologiques, on a déjà essayé un certain nombre de modèles.

Dans le cas du problème des n corps considéré ici, on prend V_4 homéomorphe au produit d'un segment de droite (intervalle fini de temps) par un espace euclidien à 3 dimensions : on supposera V_4 engendré par une famille de sections d'espace, $x^0 = Cte$, homéomorphes à l'espace euclidien, les lignes où x^0 varie seul étant des lignes de temps.

Voyons maintenant ce que l'on peut dire, localement, et globalement des solutions du système d'équations (1).

2. Etude des équations d'Einstein.

Problème de l'évolution. Cas extérieur. - $S_{\alpha\beta} = 0$, problème de Cauchy : donnons-nous sur une hypersurface S orientée dans l'espace, soit $x^0 = 0$, les potentiels et leurs dérivées premières, $g_{\alpha\beta}$ et $\partial g_{\alpha\beta}/\partial x^0$, et cherchons à les déterminer au voisinage de S : on constate que les données initiales ne peuvent pas être quelconques, mais doivent vérifier les quatre équations qui ne dépendent que de ces données

$$S_\alpha^{\ 0} = 0$$

Ces équations sont appelées "conditions initiales" ; si elles sont satisfaites par les données initiales, il existe une solution du problème de Cauchy posé pour les équations $S_{\alpha\beta} = 0$ dans un voisinage de S , physiquement unique (c'est-à-dire à un changement de coordonnées près). On peut le montrer, et même construire cette solution sans hypothèse d'analyticité en utilisant les coordonnées isothermes introduites par G. DARMOIS [1] , qui jouent ainsi un rôle essentiel pour montrer le caractère général de la propagation de la gravitation, nous verrons qu'elles jouent aussi un rôle essentiel dans la détermination des solutions approchées.

Une famille de surfaces $f = Cte$ est dite isotherme, par analogie avec la définition classique, si elle vérifie l'équation, qui a mêmes caractéristiques que le système $S_{\alpha\beta} = 0$. Ces surfaces coordonnées $x^\mu = Cte$ sont donc isothermes si on a $F^\mu \equiv \nabla_\lambda g^{\lambda(\mu)} = G\ 0$ c'est-à-dire $\frac{\partial}{\partial x^\lambda} G^{\lambda\mu} = 0$ où $G^{\lambda\mu} = \sqrt{-g}\, g^{\lambda\mu}$ est la densité tensorielle associée au tenseur $g^{\lambda\mu}$. Ces $G^{\lambda\mu}$ semblent être les bonnes inconnues à prendre dans la théorie.

On constate que le tenseur $S^{\alpha\beta}$ s'écrit

$$S^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta}_{(J)} + A^{\alpha\beta}$$

$$A^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g^{\alpha\rho}\ \partial_\rho F^\beta + g^{\beta\rho}\ \partial_\rho F^\alpha)$$

$$S^{\alpha\beta}_{(J)} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\ g^{\lambda\mu}\ \frac{\partial^2 G^{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + H^{\alpha\beta}$$

où $H^{\alpha\beta}$ ne dépend que des potentiels et de leurs dérivées premières. En coordonnées isothermes $F^\alpha = 0$, les seules dérivées secondes des potentiels qui apparaissent dans $G^{\lambda\beta}$ sont celles de $G^{\alpha\beta}$. Ce fait permet de résoudre les équations $S^{\alpha\beta}_{(J)} = 0$; à des données initiales suffisamment différentiables dans un domaine V de S correspond une solution dans un voisinage de V , dont la valeur en un point ne dépend que des valeurs des données à l'intérieur du conoïde caractéristique de sommet M engendré par les géodésiques de longueur nulle du ds^2 (rayons lumineux) : ce fait est en accord avec le principe du déterminisme : le champ en M ne dépend que de l'état du champ antérieur à M et montre la propagation, avec la vitesse de la lumière, de la gravitation dans le vide (2). On montre, en utilisant les identités de conservation que, si les données initiales satisfont aux conditions

$$S_\lambda^0 = 0 \qquad \text{pour} \quad x^0 = 0$$

$$F^\mu = 0 \qquad \text{pour} \quad x^0 = 0 \ ,$$

la solution trouvée vérifie partout $F^\mu = 0$, donc vérifie effectivement les équations tensorielles $S^{\alpha\beta} = 0$ (les équations de conservation $\nabla_\lambda S^{\lambda\mu} \equiv 0$ donnent un système hyperbolique pour les F^μ si les $G^{\alpha\beta}$ sont solutions de $S^{\alpha\beta}_{(J)} = 0$) .

Cas intérieur. - Le problème est un peu plus complexe : les équations du champ s'écrivent

(1) $$S^{\alpha\beta} = \chi\, T^{\alpha\beta} .$$

Le tenseur $T^{\alpha\beta}$ vérifie les équations de conservation (conséquences des identités de Bianchi) :

(2) $$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 .$$

Dans un shéma matière pure

---

(2) cf. DARMOIS [1] , LICHNEROWICZ [7] , Y. FOURÈS BRUHAT [2] .

$$T^{\alpha\beta} = \rho\, u^{\alpha}\, u^{\beta} \qquad \text{avec} \quad g_{\alpha\beta}\, u^{\alpha}\, u^{\beta} = 1 ,$$

les équations (2) s'écrivent :

$$\nabla_{\alpha}\, (\rho\, u^{\alpha}) = 0$$
$$u^{\alpha}\, \nabla_{\alpha}\, u^{\beta} = 0$$

la première est une équation de continuité, exprimant la conservation de la masse, les autres expriment que les lignes de courant, trajectoires des vecteurs u^{α} , sont des géodésiques de la métrique riemannienne.

Dans le cas fluide parfait :

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)u^{\alpha}\, u^{\beta} - p\, g^{\alpha\beta}$$

les équations (2) s'écrivent

$$\rho\, u^{\alpha}\, \frac{\partial_{\alpha} p}{\rho + p} = \nabla_{\alpha}\, (\rho + p)u^{\alpha}$$
$$u^{\alpha}\, \nabla_{\alpha}\, u^{\beta} = (g^{\alpha\beta} - u^{\alpha}\, u^{\beta})\, \frac{\partial_{\alpha} p}{\rho + p} \quad ;$$

on y joint une équation d'état (3) $\rho = \varphi\,(p)$.

De façon générale on dira que les équations $\nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta}$ sont les équations du mouvement relativiste : elles correspondent à l'équation de continuité et aux trois équations du mouvement de la mécanique classique. Elles sont conséquence des équations du champ (1). On déduit en particulier de ces équations, et des conditions de raccordement, la loi de mouvement d'une masse d'épreuve selon une géodésique du champ extérieur. Cette loi avait d'abord été admise comme postulat par EINSTEIN, en s'inspirant du principe d'équivalence il avait ainsi étendu au champ de gravitation la loi du mouvement de la relativité restreinte. Dans la relativité restreinte, qui représente un univers sans masses, une masse d'épreuve décrit une ligne droite de l'espace-temps, donc une géodésique. D'après le principe d'équivalence, on ne doit pas pouvoir distinguer localement les effets dûs à la gravitation de ceux dûs à l'inertie, d'où l'idée de prendre pour équation du mouvement d'une masse d'épreuve en relativité générale l'équation d'une géodésique. Cette loi résulte en fait des équations mêmes du champ.

Pour des masses de dimensions finies, on obtiendra les équations du mouvement en intégrant les relations $\nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0$ sur le volume à 3 dimensions occupé par

---

(3) Nous négligeons ici les échanges de chaleur, cf. dans le cas contraire PHAM MAU QUAN [8] .

une telle masse à un instant donné.

Mais revenons au problème de résolution des équations. Les considérations précédentes nous montrent en effet comment trouver le mouvement des masses connaissant les potentiels, mais comment trouver ces potentiels, ou plutôt, comment trouver simultanément les potentiels et les inconnues ρ , u^α , p ?

Le système des équations

$$S^{\alpha\beta} = \chi T^{\alpha\beta}$$
$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

est encore un système en involution au sens d'Elie CARTAN : si on prend sur S ($x^0 = 0$) des données initiales satisfaisant aux quatre conditions

(3) $$S_\alpha{}^0 = \chi T_\alpha{}^0 \qquad \text{pour} \quad x^0 = 0$$

Le problème de Cauchy a une solution au voisinage de S (pour des données suffisamment différentiables dans le cas matière pure [4], au moins dans le cas analytique dans le cas fluide parfait).

Problème des conditions initiales. - Ce principal problème à résoudre, pour une intégration rigoureuse et globale des équations d'Einstein, (au moins sur un intervalle fini de temps) est donc la construction de solutions globales des équations (3). Mr LICHNEROWICZ [5] a construit dès 1944 un exemple de solution globale rigoureuse de ces équations, compatible avec le problème des n corps, et montré que l'énergie potentielle due à l'interaction de deux masses gravitantes était en première approximation newtonienne.

Les solutions globales générales sont assez difficiles, d'une part à construire d'autre part à interpréter physiquement, en particulier en ce qui concerne les quantités que l'on peut choisir arbitrairement : il me semble que les bonnes inconnues du problème sont le potentiel G^{44} et les $\frac{\partial}{\partial x^4} G^{ij}$ qui conduisent pour les équations (3) à un système d'équations elliptiques.

Détermination de solutions globales particulières. - Correspondant à des problèmes de mécanique céleste, cette détermination est faite de manière approchée en se guidant, pour les approximations, sur les conditions physiques réalisées dans beaucoup de problèmes astronomiques : dimensions des corps faibles par rapport

---

(4) Y. FOURÈS-BRUHAT : Mémoire à paraître aux C. R. Acad. Sc. Paris.

(5) LICHNEROWICZ [6] , Y. FOURÈS-BRUHAT [3] et [3 bis].

à leurs distances ; le mouvement de chaque corps sera défini par le mouvement de son centre de gravité (on néglige les rotations propres des corps), vitesses des coprs faibles par rapport à la lumière, champ de gravitation faible : on prendra comme système de coordonnées un système voisin d'un système d'inertie (6), de sorte qu'en première approximation le ds^2 de l'espace-temps sera Minkowskien.

Ces hypothèses se traduisent par l'existence des développements limités suivants pour les potentiels :

$$
(4) \qquad
\begin{aligned}
g_{00} &= C^2 + \overset{(0)}{g}_{00} + \dots + \frac{\overset{(p-1)}{g}_{00}}{C^{2p-2}} + 0\left(\frac{1}{C^{2p}}\right) \\
g_{0i} &= \frac{\overset{(1)}{g}_{0i}}{C^2} + \dots \\
g_{ij} &= - \delta_{ij} + \frac{\overset{(1)}{g}_{ij}}{C^2} + \dots
\end{aligned}
$$

où C est un paramètre suffisamment grand. Sa valeur dans les applications sera 3.10^{10} C.G.S . On supposera que les dérivées des potentiels ont des développements de même forme.

On fait, dans le cas du problème des n corps, l'hypothèse physiquement raisonnable, du comportement asymptotique euclidien : à grande distance des masses, les potentiels s'écartent des valeurs minkowskiennes comme un potentiel de Newton :

$$
\begin{aligned}
|g_{ij} + \delta_{ij}| &< \frac{M}{r} \\
|g_{00} - C^2| &< \frac{M}{r} \\
|g_{0i}| &< \frac{M}{r}
\end{aligned}
$$

où M est un membre fini et où r désigne la distance à un point fixe.

Méthode du tenseur d'impulsion énergie (7). - On cherchera une première approximation d'une solution des équations

$$S^{\alpha\beta} = \chi T^{\alpha\beta}$$

en prenant le terme d'ordre le moins élévé en $\frac{1}{C}$ de $S^{\alpha\beta}$, et en l'égalant au terme de même ordre de $T^{\alpha\beta}$,

On fera le calcul en coordonnées isothermes. Du fait des ordres de grandeur différents de g_{00} et $g_{\alpha i}$ les dérivées par rapport aux temps n'apparaissent

(6) Le cas où le système n'est pas voisin d'un système d'inertie a été traité par TRAUTMAN [10] .

(7) cf. Mme HENNEQUIN [4] .

pas et on trouve pour les $\overset{(1)}{G}{}_{\alpha\beta}$ des équations elliptiques (en fait des laplaciens) égales à des seconds membres contenant la densité de masse m_a des corps A , ... (on est conduit à poser $m_a = \rho_a u^0 \sqrt{-g}$) et les composantes $v^i \equiv \frac{u^i}{u^0}$ de la vitesse matérielle à 3 ~~dimensions,~~ supposée constante sur le corps A . On peut résoudre globalement ces équations, moyennant les hypothèses à l'infini. On trouve pour g^{00} un potentiel de Newton. Le temps n'intervient dans ces solutions que par l'intermédiaire des coordonnées des corps.

Les équations du mouvement sont :

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

On montre qu'on peut les écrire par intégration sur un corps A , sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\int_A \mathcal{T}_i{}^0 \, dV = \frac{1}{2}\int_A \partial_i g_{\alpha\beta} \, \mathcal{T}^{\alpha\beta} dV \qquad (\mathcal{T}^{\alpha\beta} = \sqrt{-g}\, T^{\alpha\beta})$$

et que, en première approximation

$$M_a \frac{d}{dt}\dot{a}^i = \int_A m_a \, \partial_i U^{00} dV + O(\frac{1}{c^2})$$

(M_a masse de A , $U^{00} = -\overset{(0)}{g}_{00}/2$) .

Ces équations se réduisent aux équations newtoniennes du mouvement quand les corps ont la symétrie sphérique.

On montre (cf. Thèse de Mme HENNEQUIN) que les équations du mouvement (approchées à l'ordre $\frac{1}{c}$) entraînent la vérification des conditions d'isothermie à une approximation telle que les solutions approchées précédemment construites sont effectivement des solutions approchées pour les équations tensorielles.

Pour calculer l'approximation suivante on se servira des valeurs trouvées des potentiels et des équations en coordonnées isothermes.

Méthode des singularités (8). - Une autre méthode pour établir les équations du mouvement est la méthode dite des singularités. Elle n'utilise en principe que les équations du cas extérieur $R_{\alpha\beta} = 0$ résolues par approximations à l'aide de développements en série de la forme (4). EINSTEIN-INFELD-HOFFMANN prennent pour

(8) PHAM TAN HOANG [9] .

solutions des équations de la première approximation $G^{44} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\overset{k}{\mu}}{\overset{k}{r}}$,
$G^{4i} = \sum_{k=1}^{n} \dot{\overset{k}{a}}{}^{i} \frac{\overset{k}{\mu}}{\overset{k}{r}}$, où les $\overset{k}{r}$ sont les distances spatialles d'un point courant x^i à n points $\overset{k}{A}$ dont les coordonnées $\overset{k}{a}{}^{i}$ sont des fonctions du temps t, ces points $\overset{k}{A}$ seront interprétés comme centres de n corps sphériques. Ils remarquent alors que les fonctions $\overset{k}{a}(t)$ ne peuvent pas être quelconques si l'on veut pouvoir continuer les approximations. Par exemple l'existence d'une deuxième approximation impose à la première les conditions :

$$\text{flux}_{\overset{k}{\Sigma}} S_{(\alpha)} = 0 \tag{5}$$

où $\overset{k}{\Sigma}$ est une surface à 2 dimensions entourant le k-ième corps, $S_{(\alpha)}$ un vecteur d'espace dont les composantes $S^{i}_{(\alpha)}$ sont les quantités S^{i}_{α} correspondant à la deuxième approximation : les équations (5) ne dépendent en fait que des potentiels de la première approximation, donc imposent aux fonctions $\overset{k}{a}(t)$ des conditions qu'on appelle équations du mouvement (on trouve en première approximation les équations newtoniennes).

Les calculs de cette méthode sont, en fait, plus compliqués que ceux de la précédente. EINSTEIN la préférait cependant parce qu'il souhaitait représenter toutes les propriétés de la matière par un champ géométrique, aussi unifié que possible, qu'il espérait trouver guidé par des démarches simples de la pensée logique : il n'aimait pas le tenseur d'impulsion-énergie, descriptif et d'origine phénoménologique. Mais dans une telle théorie de champ pur il ne faudrait pas admettre de singularités du champ dont la présence ne peut s'expliquer, et la nature se préciser qu'avec des hypothèses étrangères à la théorie.

Dans la nouvelle théorie unitaire d'Einstein on peut peut-être espérer trouver un champ non vide et partout régulier, on n'en sait rien jusqu'à présent. En fait les derniers travaux de Mme TONNELAT et de PHAM TAN HOANG utilisent des solutions singulières et pour les interpréter cherchent à faire apparaître un tenseur d'impulsion-énergie. Dans la relativité générale, Mr LICHNEROWICZ a démontré, sous des hypothèses d'interprétation physique simple qu'un champ régulier partout était nécessairement euclidien, c'est-à-dire dépourvu de gravitation ; un champ solution des équations du cas extérieur, ne sera dû à la gravitation de n masses disjointes que s'il possède des singularités à l'intérieur des domaines d'espace-temps balayés par ces masses. EINSTEIN et ses collaborateurs, dans la méthode des singularités, ont pris des potentiels ayant, au voisinage des masses, une singularité de l'ordre de $\frac{1}{r}$ (r distance à la masse) en s'inspirant du potentiel de Newton : en fait cette hypothèse sur la singularité revient à une hypothèse sur un tenseur d'impulsion-énergie apparaissant automatiquement au second membre : écrire $S^{\alpha\beta}$ pour un $g^{\alpha\beta}$ singulier conduit $S^{\alpha\beta} = \chi T^{\alpha\beta}$ de même que, pour $u = \frac{1}{r}$, $\Delta u = 4\pi\delta$ (δ mesure de Dirac).

Prenons par exemple $g^{\alpha\beta}$ singulier sur une ligne d'univers (9) définie par $a^i = a^i(x^0)$, et tel que

(6) $$T^{\alpha\beta} = \tau^{\alpha\beta}\delta(x - a)$$

où $\tau^{\alpha\beta}$ est un tenseur régulier et $\delta(x - a)$ la mesure de Dirac au point $x^i = a^i$. Appliquons les identités de Bianchi à la distribution $T^{\alpha\beta}$

(7) $$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} \equiv \nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} \cdot \delta(x - a) + \tau^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\delta(x - a) = 0$$

or

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\delta(x - a) = - \dot{a}^i \frac{\partial}{\partial x^i}\delta(x - a), \quad \dot{a}^i = \frac{da^i}{dx^0}$$

le premier membre de (7), somme d'une distribution d'ordre zéro et d'une distribution d'ordre 1 ne peut être nul que si ces deux distributions sont nulles, d'où :

(8) $$\nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} = 0$$
$$\tau^{i\beta} - \dot{a}^i \tau^{\alpha\beta} = 0$$

c'est-à-dire

$$\tau^{ij} = \tau^{00}\dot{a}^i\dot{a}^j ,$$

ce qui est le tenseur d'impulsion-énergie d'un shéma matière pure, qui vérifie les conditions de conservation usuelles (8).

Il semble donc que, dans leurs applications actuelles les deux méthodes soient équivalentes. Dans l'avenir l'une ou l'autre permettra peut-être de résoudre des problèmes sur lesquels nous n'avons encore que peu de clarté : ceux où les conditions des approximations que je viens d'exposer ne sont pas réalisées : grandes vitesses (par exemple mouvement d'un photon dans un champ de gravitation) ou masses fortes et faibles distances ce qui serait le problème de la gravitation à l'échelle nucléaire.

---

(9) Résultat annoncé par TULCZYVEW, avec un principe de démonstration apparemment plus compliqué.

RÉFÉRENCES bibliographiques des articles cités dans le texte :

[1] DARMOIS (Georges). - Les équations de la gravitation einsteinienne. - Paris, Gauthier-Villars, 1927 (Mémorial des Sciences mathématiques n° 25).

[2] FOURÈS-BRUHAT (Mme). - Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires, Acta Math., t. 88, 1952, p. 141-225.

[3] FOURÈS-BRUHAT (Mme). - Sur l'intégration des équations de la relativité générale, J. rat. Mech. and Analysis, t. 5, 1956, p. 951-966.

[3 bis] FOURÈS-BRUHAT (Mme). - Problème des conditions initiales, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 245, 1957, p. 1384-1386.

[4] HENNEQUIN (Mme). Etude mathématique des approximations en relativité générale et en théorie unitaire de Jordan-Thiry, Bull. scient. Com. hist. et scient., t. 1, 1956, 2e partie : Mathématiques, p. 73-154. - Paris, Gauthier-Villars, 1957 (Thèse Sc. math. Paris. 1956).

[5] LICHNEROWICZ (André). - Problèmes globaux en mécanique relativiste. - Paris, Hermann, 1939 (Act. scient. et ind. n° 833).

[6] LICHNEROWICZ (André). - L'intégrale des équations de la gravitation relative et le problème des n corps, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 23, 1944, p. 37-63.

[7] LICHNEROWICZ (André). - Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. - Paris, Masson, 1955.

[8] PHAM MAU QUAN. - Sur une théorie relativiste des fluides thermodynamiques, Annali di Mat. pura ed appl., 4e série, t. 38, 1955, p. 121-204.

[9] PHAM TAN HOANG. - La méthode des singularités pour les équations du mouvement en relativité générale et en théorie du champ unifié (multigraphié) (Thèse Sc. math. Paris. 1957).

[10] TRAUTMAN (A.). - On a generalisation of the Einstein-Infeld approximation method, Bull. Acad. Polon. Sc., Cl. 3, t. 4, 1956, p. 439-442 ; Solution of one-body problem by the Einstein-Infeld approximation method, Bull. Acad. Polon. Sc., Cl. 3, t. 4, 1956, p. 443-446.