Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Jean Leray

Analyse lagrangienne et mécanique quantique

Séminaire Jean Leray, nº 1 (1976-1977), exp. nº 1, p. 1-313
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1976-1977___1_A1_0>

SEMINAIRE

SUR LES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

I

ANALYSE LAGRANGIENNE ET MÉCANIQUE QUANTIQUE

par Jean LERAY

Collège de France
1976-1977
Professeur Jean LERAY

UNIVERSITÉ

INSTITUT FOURIER

Séminaire subventionné par le C.N.R.S. (R.C.P. 126)

TABLE DES MATIERES

CHAP. II . - FONCTIONS LAGRANGIENNES ; OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS LAGRANGIENS.

CHAP. IV . - EQUATION DE DIRAC AVEC EFFET ZEEMAN .

E R R A T A

Chapitres	lignes	au lieu de	lire
Chapitre I,	§ 1, p. 8, l. 1	$< p', x' >$	$< p', dx' >$
	p. 12, l. 1	x	c
	p. 16, l. 7	n° 10	n° 8
	p. 19, l. 7	S_B^{-1}, S_A^{-1}	$S_{B'}^{-1}, S_{A'}^{-1}$
	§ 2, p. 2, l. -5	X	$Z(\ell)$
	p. 4, l. -4	U	U
	p. 7, (2.7)	s_1	s_1^{-1}
	......, l. 12	localement	ponctuellement
	p. 16, l. 3	§ 2, n° 1	§ 1, n° 2
	......, l. -1	non transverses	transverses
	p. 17, l. 1	....	....
	p. 18, l. 11	(x, y)	$(x \mid y)$
	......, l. 5	(4.16)	(4.13)
	p. 21, l. -8	(5.2)	(5.3)
	p. 24, l. 1	$\wedge^2(\ell)$	$\wedge_q^2(\ell)$
	......, l. -1	Im	Inert
	p. 25, l. 11	théorème 7	théorème 6
	p. 27, l. 6	$\psi(\theta)$	$\exp(i\,\psi(\theta))$
	......,	(1)	1
	......, l. -8	$\wedge^2(\ell)$	$\wedge(\ell)$
	......, l. -1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{i}$
	p. 33, l. 10	Z_{2q}	$\mathbf{Z}_{2q}$
	......, l. -5	1°)	2°)
	......, l. -3	(8.2)	(8.1)

Chapitre	lignes	au lieu de	lire
	p. 36 , l. -1	$\to \lambda\ (z) \in \lambda\ (\ell)$	$z \to \lambda\ (z) \in \Lambda\ (\ell)$
	p. 37 , l. 7	et une	d'une
	p. 38 , l. 7	$\Delta^2\ (a)$	$\Delta^2\ (A)$
§ 3,	p. 1 , l. -4	sur	est
	p. 2 , l. 2	$\lambda + \lambda' + \lambda''$	$z + z' + z''$
	p. 3 , l. -2	définir	de définir
	p. 4 , l. 12	X^*_2	$\Lambda_2\ (\ell)$
Chapitre II, § 1	p. 1 , l. -2	$S(a_R\ U_R)$	$a_R\ U_R = S\,(a_R, U_{R'})$
	p. 4 , l. 11	R	R_+
	..... , (1.4)	.....	......
	p. 6 , (1.8)	$a^{\frac{1}{2\nu}}$	$e^{\frac{1}{2\nu}}$
	p. 8 , l. 10	$\mathbb{N}$	N
	p. 9 , l. -9		(2.6)
	p. 10 , l. 11		(2.7)
	l. 14		(2.8) si aucune période de φ_R n'est nulle.
	l. -6	R_X	$\check{R}_X$
	p. 13 , l. 6	vérifiant	vérifient
	p. 18 , l. -1	$\int^{\infty}$	$\int_{-\infty}^{\infty}$
	p. 22 , (3.15)	$\nu\ \Theta$	$\theta\ \Theta$
§ 2	p. 7 , l. -1	§ 3	§ 3, théor. 4.2.
	l. -2, - 1	A placer p. 8 après la l. 3	
	p. 9 l. 7	1.3) 1.1)	1.4) 1.2)
	p. 10 , l. 6	V et V'	$\check{V}$ et $\check{V}'$
	p. 11 (2.13)	$\lvert\check{U}$	$\lvert\check{U}'$
	(2.14)	$\psi\,(\check{z}')$	$\psi'(\check{z}')$
	p. 13 (3.2)	$\check{\Sigma}_{R'}$	$\check{\Sigma}_R$
	l. -6		(3.3)

Chapitre	lignes	au lieu de	lire
p.16 ,	l. 3	u	U
p.20 ,	(3.19)	πi	$\frac{\pi i}{2}$
	l.-7	$\check{R}^{-1}$	$\check{R}_{X}^{-1}$
§ 3 p. 4 ,	l.-2	(2.5)	(2.4)
p. 9 ,	(3.2)	crochet	parenthèse
p.18 ,	l. 1	$\sum_{r}$	$\sum_{r} \frac{1}{\nu^{r}}$
	$(5.1)_{o}$	$\alpha_{R,r}$	$\alpha_{R,o}$
p.19 ,	l. 8	$\mathbb{R}^{n}$	$\mathbb{R}^{\ell-1}$
p.20 ,	l.10	χ^{-1}	$\chi^{-1/2}$
	l.-5	fonction	solution
p.22 ,	l. 1	sera	se
	l. 4	Théor. 2	Théor. 2.2
	l.13	$\frac{1}{4\pi\hbar}$, $\frac{1}{2\pi\hbar}$ $\oint_{\gamma}$	$\frac{1}{2}$, $\oint_{\gamma}$
	l.14	1 , 1/2	$2\pi\hbar$, $\pi\hbar$
p.25 ,	l.-3	(7.3)	(7.4)
p.26 ,	l.13	$- \{$	$-2 \{$
p.27 ,	l.-3		$M_{o}^{j} = 0$
<u>**Chapitre III**</u>, § 1 p. 5 ,	l.-5	(1.5)	(1.6)
p. 5 ,	l.-11	dim $G = 1$	dim $\overline{G} = 1$
p. 6 ,	l. 0		Θ est l'angle de I_3 et J_3 ; $0<\Theta<\pi$;
	l. 3	$<I'_2 , I_3 \wedge J_3> = 0$	$I'_2 \sin \Theta = I_3 \wedge J_3$;
	l. 8	on peut faire en sorte que	
	l. 9	$0 < \Theta < \pi$	
	l.14	$)\ I_3$	$)\ I_2$

Chapitres	lignes	au lieu de	lire
p. 7 ,	l.-8	Σ	Σ_{R_o}
p.12 ,	l.-10	mod. $(dL, dM, d\Phi, d\Psi)$	mod. (dL, dM)
p.13 ,	l. 5	déf. 2.6	déf. 6.2
	(3.3)	m_R.	m_{R_o}
p.14 ,	l. 1	$\Psi\ \Psi$	$\Phi\ \Phi$
p.15 ,	l. 9	$M_o < L_o$	$\lvert M_o \rvert < L_o$
§ 3 p. 7 ,	l. 7	C_M	c_M
Chapitre IV, § 1 p. 4 ,	l. 3	L, M, Q, R sont en involution	M est en involution avec L, Q, R

E R R A T A (suite)

Chapitres	lignes	au lieu de	lire
III, § 1, p.11,	(2.15)	$dt\ d\Phi$	$dt \wedge d\Phi$
p.21,	(4.22)	$-\dfrac{E^2}{c^2}$	$+\mu^2 c^2 - \dfrac{E^2}{c^2}$
IV, § 1, p. 2,	(1.6)	$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & -x_3 \end{pmatrix}$
p. 6,	$(2.9)_3$	$c_{\pm 3} = e^{2\pi i m'}$	$c_{+-3} = -e^{2\pi i m'}$
§ 2, p. 1,	l. -7	$B : E^3 \to \mathbb{R}$	$B : E^3 \to E^3$

ANALYSE LAGRANGIENNE ET MECANIQUE QUANTIQUE ;

(Notions apparentées à celles développement asymptotique et d'indice de Maslov) ;

par Jean LERAY

PREFACE

Les physiciens n'emploient les solutions exactes, $u(x)$, des problèmes d'évolution que dans les cas les plus simples. Généralement ils recourent à des ≪ solutions asymptotiques ≫ du type

(1) $$u(\nu, x) = \alpha(\nu, x)\, e^{\nu\varphi(x)},$$

où la ≪ phase ≫ φ est une fonction de $x \in X = \mathbb{R}^\ell$ à valeurs réelles ; l'≪ amplitude ≫ α est une série formelle en $1/\nu$:

$$\alpha(\nu, x) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} \alpha_r(x),$$

dont les coefficients α_r sont des fonctions de x à valeurs complexes ; la ≪ fréquence ≫ ν est un paramètre imaginaire pur.

L'équation différentielle régissant l'évolution :

(2) $$a\left(x, \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x}\right) u(\nu, x) = 0$$

est vérifiée en ce sens que son premier membre est le produit par $e^{\nu\varphi}$ d'une série formelle en $1/\nu$, dont les premiers termes ou tous les termes sont nuls.

La construction de ces solutions asymptotiques est depuis longtemps classique et a été nommée méthode W.K.B. :

la phase φ vérifie une équation aux dérivées partielles du premier ordre, non linéaire si l'opérateur a n'est pas d'ordre 1 ;

l'amplitude α résulte d'une intégration le long de celles des caractéristiques de cette équation du premier ordre qui définissent φ.

En mécanique quantique, par exemple, on calcule d'abord comme si

$$\nu = \frac{i}{\hbar} \quad (2\pi\hbar : \text{constante de Planck})$$

était un infiniment grand tendant vers $i\infty$, puis on attribue finalement à ν sa valeur numérique ν_0.

Les physiciens construisent des solutions asymptotiques de problèmes d'équilibre et de problèmes périodiques, substituant ainsi, par exemple, aux problèmes de l'optique ondulatoire ceux de l'optique géométrique ; mais φ fait un saut et α présente des singularités sur l'enveloppe des caractéristiques définissant φ, par exemple, en optique géométrique, sur l'enveloppe des rayons lumineux, c'est-à-dire sur les caustiques, qui sont les images des sources de lumière ; cependant l'optique géométrique vaut au delà des caustiques.

En toute généralité, V.P. Maslov a introduit un indice (dont I.V. Arnold a explicité la définition) qui décrit ces sauts de la phase et, par un emploi approprié de la transformation de Fourier, il a montré que ces singularités de l'amplitude ne sont que des singularités apparentes ; mais il est obligé d'imposer certaines « conditions quantiques » ; leur énoncé suppose que ν est un nombre imaginaire pur donné ν_0 ; c'est contraire à l'hypothèse que ν est une variable tendant vers $i\infty$; cette dernière hypothèse est cependant nécessaire pour que la transformation de Fourier soit ponctuelle, ce que V.P. Maslov utilise de façon essentielle. Un emploi, qui évite cette contradiction et que guide une motivation mathématique, de la transformation de Fourier, des expressions du type (1), des conditions quantiques de Maslov et de la donnée d'un nombre ν_0 est possible, s'il ne tente plus de définir une fonction ou une classe de fonctions par son développement asymptotique : il conduit à de nouvelles notions, qui s'apparentent à la géométrie symplectique et dont l'intérêt ne pourra se révéler qu'a posteriori ; ce sera peut-être la mécanique quantique, si le calcul du spectre de l'hélium par ces méthodes donne des résultats numériques satisfaisants.

Cet article expose ces notions et leurs relations avec les équations de Schrödinger, de Klein-Gordon, de Dirac.

Historique. - I.V. Arnold m'a demandé à Moscou, en 1967, comment je comprendrais le traité de V.P. Maslov cité [10],[11]. L'exposé qui suit est donc une réponse, peut-être inachevée, à cette question.

Il a largement bénéficié de la très précieuse érudition de J. Lascoux.

CHAPITRE I
TRANSFORMATION DE FOURIER ET GROUPE SYMPLECTIQUE.

Ce chapitre I explicite le lien existant entre ces deux notions très classiques. Il permettra au chapitre II d'étudier les solutions asymptotiques d'équations aux dérivées partielles.

§ 1. Opérateurs différentiels, groupes métaplectique et symplectique.

0. INTRODUCTION. -

Historique. - Le groupe métaplectique fut défini par I. SEGAL [13] ; son étude fut reprise par D. SHALE [14] ; V.C. BOUSLAEV [3] [11] signala qu'il rendait la théorie de Maslov indépendante du choix des coordonnées. A. WEIL [17] l'étudia sur un corps quelconque, pour approfondir les travaux de théorie des nombres de C. SIEGEL.

Sommaire. - Nous reprenons l'étude de ce groupe pour préciser comment il opère sur $\mathcal{S}(R^{\ell})$, $\mathcal{H}(R^{\ell})$, $\mathcal{S}'(R^{\ell})$, (cf. Théorème 2) et comment il transforme les opérateurs différentiels (cf. Théorème 3.1).

1. LE GROUPE METAPLECTIQUE $Mp(\ell)$. - Notons : X l'espace R^{ℓ} $(\ell > 1)$, muni de la mesure $d^{\ell}x$; X^* le dual de X ; $<p,x>$ la valeur de $p \in X^*$ en $x \in X$;

$$Z(\ell) = X \oplus X^* ;$$

$\mathcal{S}(X)$ l'espace des fonctions $X \to C$, dont toutes les dérivées sont à décroissance rapide (L. Schwartz) :

$\mathcal{S}'(X)$ son dual, espace des distributions tempérées sur X (L.Schwartz) ;

$\mathcal{H}(X)$ l'espace des fonctions $X \to \mathbb{C}$ de carré sommable ;

ν un nombre imaginaire pur d'argument $\frac{\pi}{2}$: $\frac{\nu}{i} > 0$.

Soit une fonction linéaire $a^\circ : Z(\ell) \to \mathbb{R}$: soit $a^\circ(z) = a^\circ(x, p)$ sa valeur en $z = x + p$ $(z \in Z(\ell)$, $x \in X$, $p \in X^*)$: l'opérateur

$$a = a^\circ\left(x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

est un endomorphisme <u>self-adjoint</u> de $\mathcal{S}'(X)$: l'adjoint de a, qui est un endomorphisme de $\mathcal{S}(X)$, est la restriction de a à $\mathcal{S}(X)$. Ces opérateurs a et ces fonctions a° sont les éléments respectifs de deux espaces vectoriels $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}^\circ$, de dimension 2ℓ, naturellement isomorphes :

$$\mathfrak{A}^\circ \ni a^\circ \mapsto a \in \mathfrak{A}.$$

Le commutateur de a et $b \in \mathfrak{A}$ est

$$[a, b] = a\,b - b\,a \in \mathbb{C},$$

$c \in \mathbb{C}$ désignant l'endomorphisme de $\mathcal{S}'(X)$:

$$(\forall f \in \mathcal{S}'(X))\quad c : f \mapsto c\,f .$$

Pour étudier ce commutateur, munissons $Z(\ell)$ de la <u>structure symplectique</u>

$$[z, z'] = \langle p, x'\rangle - \langle p', x\rangle,$$

où

$$z = x + p,\ z' = x' + p',\ x \text{ et } x' \in X, p \text{ et } p' \in X^* .$$

Toute fonction $a^\circ \in \mathfrak{A}^\circ$ est définie par un élément unique a^1 de $Z(\ell)$ tel que

(1.1) $$a^\circ(z) = [a^1, z] ;$$

d'où un isomorphisme naturel

(1.2) $$Z(\ell) \ni a^1 \mapsto a^\circ \in \mathfrak{A}^\circ .$$

Le commutateur de a et $b \in \mathfrak{A}$ est évidemment

(1.3) $$[a, b] = \frac{1}{\nu}[a^1, b^1] ,$$

le second membre étant défini par la structure symplectique.

Un automorphisme S de $\mathcal{S}'(X)$ transforme tout $a \in \mathfrak{a}$ en un opérateur $b = S\,a\,S^{-1}$, défini par la condition

$$(\forall f \in \mathcal{S}'(X))\quad b\,S\,f = S\,a\,f\ ;$$

$b \neq 0$ si $a \neq 0$; en général $b \notin \mathfrak{a}$

Définition 1.1. - $G(\ell)$ est le groupe des automorphismes continus S de $\mathcal{S}'(X)$ qui transforment $\mathfrak{a}$ en lui-même, c'est-à-dire tels que

$$(1.4)\qquad (\forall a \in \mathfrak{a})\quad S\,a\,S^{-1} \in \mathfrak{a}.$$

$G(\ell)$ est évidemment un semi-groupe ; si $S \in G(\ell)$,

$$(1.5)\qquad a \to S\,a\,S^{-1}$$

est évidemment un automorphisme de $\mathfrak{a}$; donc $S^{-1} \in G(\ell)$ et $G(\ell)$ est un groupe.

L'automorphisme (1.5) de $\mathfrak{a}$ a pour transformé, par l'isomorphisme naturel $Z(\ell) \to \mathfrak{a}$, un automorphisme de l'espace vectoriel $Z(\ell)$:

$$(1.6)\qquad s : a^1 \mapsto s\,a^1 .$$

Puisque S commute avec les automorphisme $c \in \mathbb{C}$ de $\mathcal{S}'(X)$ et que $[a,b] \in \mathbb{C}$, nous avons

$$[\,S\,a\,S^{-1}, S\,b\,S^{-1}] = [a,b] .$$

c'est-à-dire, vu (1.3) et l'équivalence de (1.5) et (1.6) .

$$[\,s\,a^1, s\,b^1] = [\,a^1, b^1]\ ;$$

s est donc un automorphisme de l'espace symplectique $Z(\ell)$.

Le groupe des automorphismes de cet espace symplectique $Z(\ell)$ est nommé groupe symplectique est noté $Sp(\ell)$:

$$s \in Sp(\ell) .$$

Vu (1.1)

$$[s\, a^1, z] = [a^1, s^{-1} z] = (a^\circ \circ s^{-1})(z).$$

En résumé :

LEMME 1.1. - Pour tout $S \in G(\ell)$, l'automorphisme

$$a \mapsto S\, a\, S^{-1}$$

de $\mathfrak{a}$ a pour transformés, par les isomorphismes naturels de $\mathfrak{a}$, $Z(\ell)$ et $\mathfrak{a}^\circ$:

- un automorphisme $s : a^1 \mapsto s\, a^1$ de $Z(\ell)$; $s \in Sp(\ell)$;
- un automorphisme : $a^\circ \mapsto a^\circ \circ s^{-1}$ de $\mathfrak{a}^\circ$

L'application $S \to s$ est un morphisme naturel

$$G(\ell) \mapsto Sp(\ell)\,. \tag{1.7}$$

LEMME 1.2. - Le noyau de ce morphisme (1.7) est le sous-groupe de $G(\ell)$ ayant pour éléments les automorphismes de $\mathcal{S}'(X)$ du type :

$$(\forall\, f \in \mathcal{S}'(X))\, f \to c\, f\,, \text{ où } c \in \dot{\mathbb{C}} \text{ (plan complexe pointé).}$$

<u>Note</u>. - Ce sous-groupe sera noté $\dot{\mathbb{C}}$.

<u>Preuve</u>. - Tout $c \in \dot{\mathbb{C}}$ commute à tout $a \in \mathfrak{a}(\ell)$ et appartient donc à ce noyau.

Réciproquement, soit S un élément de ce noyau : S est donc un automorphisme de $\mathcal{S}'(X)$ commutant à tout $a \in \mathfrak{a}(\ell)$. Soit $p \in X^*$; nous avons :

$$\left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x} + p\right) e^{-\nu<p\,,\,x>} = 0\,;$$

donc, puisque S et $\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x} + p$ commutent :

$$\left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x} + p\right) S\, e^{-\nu<p\,,\,x>} = 0\,;$$

donc, par intégration de ce système différentiel :

$$S\, e^{-\nu<p\,,\,x>} = c(p)\, e^{-\nu<p\,,\,x>} \quad \text{où } c : X^* \mapsto \mathbb{C}\,;$$

en dérivant par rapport à p, on constate que c a un gradient c_p vérifiant

$$-\nu S[x\, e^{-\nu <p,x>}] = -\nu x S e^{-\nu <p,x>} + c_p\, e^{-\nu <p,x>} ;$$

c'est-à-dire, puisque S et le produit par x commutent :

$$c_p = 0 .$$

$c(p)$ est indépendant de p et sera noté c. Notons F la transformation de Fourier ; soit $f \in \mathcal{S}(X)$; notons $g = F^{-1} f$; on a par définition de F :

$$f(x) = \left(\frac{\nu}{2\pi i}\right)^{\ell/2} \int_X e^{-\nu <p,x>} g(p)\, d^\ell p ;$$

puisque $S e^{-\nu <p,x>} = c e^{-\nu <p,x>}$, on a donc

$$(\forall f \in \mathcal{S}(X))\ Sf = cf .$$

Or $\mathcal{S}(X)$ est dense dans $\mathcal{S}'(X)$; donc $S = c \in \dot{\mathbb{C}}$. Le lemme est prouvé :

<u>D'autres sous-groupes</u> de $G(\ell)$ serviront à prouver que $G(\ell) \to Sp(\ell)$ est un épimorphisme. Ce sont .

(i) le groupe fini qu'engendrent les transformations de <u>Fourier</u> portant sur l'une des coordonées ;

(ii) le groupe que constituent les automorphismes de $\mathcal{S}'(X)$

$$f \mapsto e^{\nu Q} f .$$

où Q est une <u>forme quadratique réelle</u> : $X \to \mathbb{R}$;

(iii) le groupe que constituent les automorphismes de $\mathcal{S}'(X)$:

$$f' \mapsto f \quad \text{où} \quad f(x) = \sqrt{\det T}\; f'(Tx) \quad \text{et } T \text{ est un automorphisme de } X.$$

Chacun de ces groupes a une restriction à $\mathcal{S}(X)$, qui est un groupe d'automorphismes de $\mathcal{S}(X)$, et une restriction à $\mathcal{H}(X)$, qui est un groupe unitaire (c-à-d- isométrique) de $\mathcal{H}(X)$. La définition que voici emploie ces propriétés

<u>Définition</u> 1.2. - Soit $\mathbb{A}$ l'ensemble des éléments A constitués chacun par :

1) une forme quadratique $X \oplus X \to \mathbb{R}$ valant en $(x, x') \in X \oplus X$:

$$(1.9) \qquad A(x, x') = \frac{1}{2} < Px, x > - < Lx, x' > + \frac{1}{2} < Qx', x' > ,$$

où, ${}^tP$ désignant le transposé de P :

$$P = {}^tP : X \to X^*, \; L : X \to X^*, \; Q = {}^tQ : X \to X^*,$$

$$\text{dét } L \neq 0 \; ;$$

2) un choix de $\arg L = \pi\, m(A)$, $m(A) \in \mathbb{Z}$ qui permet en particulier de définir

$$\Delta(A) = \sqrt{\text{dét } L} \quad \text{par} \quad \arg \Delta(A) = \frac{\pi}{2} m(A) .$$

<u>Note</u>. — dét L est calculé au moyen de coordonnées de X^* duales de celles de X et est indépendant du choix des coordonnés, si $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^\ell = d^\ell x$.

<u>Note</u>. — $m(A)$ sera identifié à l'indice de Maslov par (2.15) et §2 (8.6)

A chaque A associons l'endomorphisme S_A de $\mathcal{S}(X)$ défini par

$$(1.10) \qquad (S_A f')(x) = \left[\frac{|\nu|}{2\pi i}\right]^{\ell/2} \Delta(A) \int_X e^{\nu A(x, x')} f'(x')\, d^\ell x' ,$$

$$\text{où } f' \in \mathcal{S}(X), \quad \arg [i]^{\ell/2} = \frac{\pi \ell}{4} ;$$

S_A est évidemment le produit d'éléments des groupes (i), (ii) et (iii) ;

S_A est donc <u>un automorphisme</u> de $\mathcal{S}(X)$, qui se prolonge par continuité en <u>un automorphisme unitaire</u> de $\mathcal{H}(X)$ et en <u>un automorphisme de</u> $\mathcal{S}'(X)$; ces trois automorphismes seront notés S_A ; $S_A \in G(\ell)$.

L'<u>image</u> s_A <u>de</u> S_A dans $Sp(\ell)$ est définie comme suit : (A_x : gradient en x)

$$(1.11) \qquad (x, p) = s_A(x', p') \quad \text{équivaut à :} \quad p = A_x(x, x'),\; p' = -A_{x'}(x, x') .$$

<u>Preuve de</u> (1.11). — Soit $f' \in \mathcal{S}(X)$; $\frac{\partial}{\partial x}(S_A f')$ et $S_A(\frac{\partial}{\partial x} f')$ se calculent par dérivation de (1.10) et par intégration par partie ; le résultat de ce calcul prouve les relations suivantes entre opérateurs différentiels éléments de $\mathfrak{a}$:

$$\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x} - Px = - S_A\,({}^tL\acute{x})\,S_A^{-1}\,;\; S_A\,(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x} + Qx)\,S_A^{-1} = Lx\,;$$

ces relations signifient, qu'en notant

$$(x, p) = s_A\,(x', p')$$

on a

$$\forall\,(x' \in X, p' \in X^*)\quad p - Px = - {}^tLx'\,,\; p' + Qx' = Lx\,.$$

C'est la proposition (1.11).

<u>Définition</u> 1.3 . - Nous noterons Σ_{Sp} l'ensemble des $s \in Sp(\ell)$ tels que, sur le 2ℓ - plan de $Z(\ell) \oplus Z(\ell)$ d'équation

$$(x, p) = s\,(x', p')\,;$$

x et x' ne sont pas indépendants .

Il est bien connu que <u>l'ensemble des</u> s_A <u>définis par</u> (1.11) <u>est</u> $Sp(\ell) \setminus \Sigma_{Sp}$.

<u>Preuve</u> . - Evidemment $s_A \notin \Sigma_{Sp}$. Réciproquement, soit $s \in Sp(\ell)$; sur le 2ℓ - plan de $Z(\ell) \oplus Z(\ell)$ d'équation

$$(x, p) = s\,(x', p')\,.$$

on a , puisque s est symplectique :

$$<p, dx> - <dp, x> = <p', dx'> - <dp', x'>.$$

donc

$$\frac{1}{2}\,d\,[\,<p, x> - <p', x'>\,] = <p, dx> - <p', dx'>;$$

supposons $s \notin \Sigma_{Sp}$: x et x' sont indépendants sur ce 2ℓ - plan ; définissons sur ce 2ℓ - plan :

$$(1.12)\qquad A\,(x, x') = \frac{1}{2}<p, x> - \frac{1}{2}<p', x'>\,;$$

nous avons donc

$dA = \langle p, dx \rangle - \langle p', dx' \rangle$, c'est-à-dire $p = A_x$, $p' = -A_{x'}$;
x et A_x doivent être indépendants : $\det_{jk}(A_{x^j x'^k}) \neq 0$; donc $s = s_A$;
ce qui achève la preuve.

Les s_A engendrent évidemment $Sp(\ell)$: donc

LEMME 1.3. - Le morphisme naturel

$$G(\ell) \to Sp(\ell) \quad \text{est un } \underline{\text{épimorphisme}}.$$

Vu le lemme 1.2. $G(\ell)$ est un <u>groupe de Lie</u> et

$$G(\ell) / \dot{C} = Sp(\ell) \; ; \tag{1.13}$$

($\dot{C}$ est le centre de $G(\ell)$ car le centre de $Sp(\ell)$ se réduit à son élément unité) .

<u>Définition</u> 1.4. - Le <u>groupe métaplectique</u> $Mp(\ell)$ est le sous-groupe de $G(\ell)$ que constituent ceux de ses éléments dont la restriction à $\mathcal{H}(X)$ est un automorphisme unitaire de $\mathcal{H}(X)$.

$(\forall A)$ $S_A \in Mp(\ell)$; or les s_A engendrent $Sp(\ell)$; le morphisme naturel

$$Mp(\ell) \to Sp(\ell)$$

est donc un épimorphisme ; vu (1.13) , tout élément de $G(\ell)$ se met donc, d'une façon unique, sous la forme

$$c\,S \quad \text{où} \quad S \in Mp(\ell) \; , \; c > 0 \; ;$$

notons R_+ le groupe multiplicatif des nombres réels > 0 ; on a donc

$$G(\ell) = R_+ \times Mp(\ell) \, . \tag{1.14}$$

L'étude de $G(\ell)$ se réduit donc à celle de $Mp(\ell)$, qui a les propriétés suivantes :

THEOREME 1. - $Mp(\ell)$ <u>est un groupe d'automorphismes de</u> $\mathcal{S}'(X)$, <u>dont les restrictions</u> à $\mathcal{H}(X)$ <u>sont des automorphismes unitaires</u>.

1) <u>Soit</u> S^1 <u>le groupe multiplicatif des nombres complexes de module</u> 1 ;

(1.15) $$Mp(\ell) / S^1 = Sp(\ell) .$$

2) Soit Σ_{Mp} l'hypersurface de $Mp(\ell)$ se projetant sur Σ_{Sp} ; tout élément de $Mp(\ell) \setminus \Sigma_{Mp}$ a l'expression $c\, S_A$ où $c \in S^1$ et S_A est du type (1.10).

3) La restriction à $\mathcal{S}'(X)$ de tout $S \in Mp(\ell)$ est un automorphisme de $\mathcal{S}(X)$.

Preuve de 1). - (1.13) et (1.14) ; S^1 est identifié à un sous-groupe de $Mp(\ell)$.

Preuve de 2). - Soit $S \in Mp(\ell) \setminus \Sigma_{Mp}$; l'image de S dans $Sp(\ell)$ est donc du type s_A ; $S\, S_A^{-1} \in S^1$, vu (1.15).

Preuve de 3). - Vu 2) , $S = c\, S_A\, S_{A'}$; or les restrictions à $\mathcal{S}(X)$ de c , S_A et $S_{A'}$ sont des automorphismes de $\mathcal{S}(X)$.

2. LE SOUS-GROUPE $Sp_2(\ell)$ de $Mp(\ell)$.-

Définition 2.1. - Nous notons $Sp_2(\ell)$ le sous-groupe de $Mp(\ell)$ qu'engendrent les S_A .

L'objet de ce n° est de prouver ceci : $Sp_2(\ell)$ est un revêtement d'ordre 2 de $Sp(\ell)$.

Pour le prouver, calculons les inverses des S_A et leurs composés.

Définition 2.2. - Etant donné $A \in \mathbb{A}$, définissons $A^* \in \mathbb{A}$ comme suit :

$$A^*(x, x') = - A(x', x) \; ; \; \Delta(A^*) = i^\ell\, \overline{\Delta(A)} ; \; m(A^*) = \ell - m(A) .$$

LEMME 2.1. - On a $S_A^{-1} = S_{A^*}$, donc $s_A^{-1} = s_{A^*}$.

Preuve . - Il s'agit de prouver, pour f et $f' \in \mathcal{S}(X)$, l'équivalence des deux conditions.

$$f(x) = \left(\frac{|\nu|}{2\pi i}\right)^{\ell/2} \Delta(A) \int_X e^{\nu A(x,x')} f'(x') \, d^\ell x' ,$$

$$f'(x') = \left(\frac{|\nu| i}{2\pi}\right)^{\ell/2} \overline{\Delta(A)} \int_X e^{-\nu A(x,x')} f(x) \, d^\ell x ;$$

c'est-à-dire, vu l'expression (1.9) de A, l'équivalence des deux conditions :

$$f(x) = \int_X e^{-\nu < Lx, x' >} f'(x') \, d^\ell x' ,$$

$$f'(x') = \left(\frac{|\nu|}{2\pi}\right)^{\ell} |\text{dét} L| \int_X e^{\nu < Lx, x' >} f(x) \, d^\ell x ;$$

la formule d'inversion de Fourier prouve cette équivalence, donc le lemme .

Pour composer les S_A explicitons $S_A(e^{\nu\varphi'})$, φ' étant une forme quadratique ; la définition que voici le permettra.

Définition 2.3. - Choisissons dans X des coordonnées linéaires telles que $d^\ell x = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^\ell$ et dans X^* les coordonnées duales. Les notions que voici sont indépendantes de ce choix.

Soit une fonction réelle, deux fois dérivable :

$$\varphi : X \to \mathbb{R} .$$

$\text{Hess}_x(\varphi)$ désigne son hessien, c'est-à-dire le déterminant de ses dérivées secondes ; c'est-à-dire celui de la forme quadratique.

$$X \ni dx \mapsto < d\varphi_x , dx > \in \mathbb{R} ;$$

$\text{Inert}_x(\varphi)$ désigne l'indice d'inertie de cette forme ; il est défini (1) quand $\text{Hess}(\varphi) \neq 0$

(1) C'est le nombre de valeurs propres négatives de l'opérateur linéaire symétrique

$$dx \mapsto d\varphi_x$$

Evidemment :

$$\mathrm{Inert}\,(-\varphi) = \ell - \mathrm{Inert}\,(\varphi) :$$

$$\arg \mathrm{Hess}\,(\varphi) = \pi\, \mathrm{Inert}\,(\varphi) \mod 2\pi ,$$

Cette formule nous permet de <u>définir</u>

(2.1) $$\arg \mathrm{Hess}\,(\varphi) = \pi\, \mathrm{Inert}\,(\varphi) ;$$

d'où, par exemple

(2.2) $$[\,\mathrm{Hess}\,(\varphi)\,]^{\frac{1}{2}} = |\,\mathrm{Hess}\,(\varphi)\,|^{\frac{1}{2}}\, i^{\,\mathrm{Inert}\,(\varphi)}$$

Si φ est une forme quadratique réelle

$$\varphi : X \ni x \mapsto \tfrac{1}{2} < R\,x\,,x> \;, \quad \text{où} \quad R = {}^tR : X \to X^* ,$$

alors $\mathrm{Hess}\,(\varphi)$ et $\mathrm{Inert}\,(\varphi)$ seront notés $\mathrm{Hess}\,(R)$ et $\mathrm{Inert}\,(R)$. $\mathrm{Hess}\,(R)$ est le déterminant de la matrice symétrique R . $\mathrm{Inert}\,(R)$ est le nombre de ses valeurs propres < 0. Evidemment :

(2.3) $$\mathrm{Inert}\,(R) = \mathrm{Inert}\,(R^{-1}) \;; \quad [\mathrm{Hess}\,(R)]^{\frac{1}{2}}[\mathrm{Hess}\,(-R^{-1})]^{\frac{1}{2}} = i^{\ell}$$

LEMME 2.2. - Soit φ' un polynome réel du second degré; soit $A \in \mathbb{A}$ tel que $\mathrm{Hess}_{x'}\,(\varphi'(x') + A\,(x\,,x'))\neq 0$; notons $\varphi\,(x)$ la valeur critique du polynome.

$$X \ni x' \mapsto A\,(x\,,x') + \varphi'\,(x') ;$$

on a

(2.4) $$S_A\,(e^{\nu\varphi'}) = \Delta\,(A)\,[\,\mathrm{Hess}_{x'}\,(\varphi' + A)\,]^{-\frac{1}{2}}\, e^{\nu\varphi} .$$

<u>Note</u> 2.1. - Ce lemme suppose $\frac{\nu}{i} > 0$; jusqu'ici il suffisait de supposer $\frac{\nu}{i}$ réel non nul.

<u>Preuve</u>. - On sait que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi} ;$$

donc, si $x \in \mathbb{C}$ et $|\arg \mu| < \frac{\pi}{2}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\mu}{2}(x+c)^2}\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\mu}} \qquad (|\arg\sqrt{\mu}| < \frac{\pi}{4}).$$

on a donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu p x}\, e^{-\frac{\mu}{2}(x+c)^2}\, dx = e^{\nu\varphi} \int_X e^{-\frac{1}{2\mu}[\nu p - \mu(x+c)]^2}\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\mu}}\, e^{\nu\varphi}$$

φ étant la valeur critique de la fonction

$$x \mapsto px + \varphi'(x) \;, \quad \text{où} \quad \varphi' = -\frac{\mu}{2\nu}(x+c)^2 \;.$$

La transformation de Fourier F sera définie par

$$(2.5) \qquad (\forall f' \in \mathcal{S}'(X)) \;\; (Ff')(p) = \left(\frac{|\nu|}{2\pi i}\right)^{\ell/2} \int_X e^{-\nu<p,x'>} f'(x')\, d^\ell x' \;;$$

nous avons donc, pour $\ell = 1$, $|\arg \mu| < \frac{\pi}{2}$:

$$F\, e^{\nu\varphi'} = \frac{\sqrt{|\nu|}}{\sqrt{\mu}\sqrt{i}}\, e^{\nu\varphi} ; \; \sqrt{i} = e^{\frac{\pi i}{4}} \;;$$

puisque F est un automorphisme continu de $\mathcal{S}'(X)$, la formule précédente vaut encore pour $\mu = -\epsilon\nu$, $\epsilon \in \dot{\mathbb{R}}$; alors

$$\frac{\sqrt{\mu}\sqrt{i}}{\sqrt{|\nu|}} = \sqrt{\epsilon} \quad \text{si} \quad \epsilon > 0 \;, = i\sqrt{|\epsilon|} \quad \text{si} \quad \epsilon < 0 \;.$$

Autrement dit, quand $\ell = 1$, le résultat suivant vaut: Soit un polynome réel du second degré $\varphi' : X \to \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{Hess}\varphi' \neq 0$; soit $\varphi(p)$ la valeur critique du polynome :

$$x \mapsto \varphi'(x) - <p, x> ;$$

on a

(2.6) $$F\, e^{\nu\varphi'} = [\mathrm{Hess}\ \varphi']^{-\frac{1}{2}}\, e^{\nu\varphi}$$

Il suffit de choisir des coordonnées x^j de X telles que

$$\varphi'(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \varphi'_j(x^j) ,$$

les φ'_j étant des polynomes du second degré de la seule variable x^j, pour constater que , puisque la relation (2.6)vaut, pour $\ell = 1$, elle vaut pour tout $\ell \geqq 1$.

Or, vu la définition (1.9) de A, (1.10) de S_A et (2.5) de F, dans le cas $P = Q = 0$:

on a,

$$(S_A f')(x) = \Delta(A)(F f')(Lx) ;$$

(2.6) prouve donc (2.4) dans ce cas, auquel le cas général équivaut évidemment, vu ces définitions de A et S_A

Avant de composer les S_A , composons les s_A

LEMME 2.3. - 1) Soient A et $A' \in \mathbb{A}$; la condition

(2.7) $$s_A\, s_{A'} \notin \Sigma_{Sp}$$

équivaut à la condition

(2.8) $$\mathrm{Hess}_{x'}[A(x,x') + A'(x',x'')] \neq 0 \quad \text{(ce Hess. est constant)}.$$

2) Cette condition équivaut, vu le lemme 2.1, à l'existence de $A'' \in \mathbb{A}$ tel que

(2.9) $$s_A\, s_{A'}\, s_{A''} = e \quad [\text{élément neutre de } Sp(\ell)] ;$$

A'' est défini par la condition que voici : la valeur critique du polynome

$$x' \longmapsto A(x,x') + A'(x',x'') + A''(x'',x)$$

est nulle.

3) De même que (1.9) définit A par P, Q, L, définissons A' et A'' par P', Q', L' et P'', Q'', L'' ; la condition (2.8) d'existence de A'' s'énonce :

$$P' + Q \text{ est inversible} ;$$

A'' peut être défini par les formules :

$$(2.10)\qquad \begin{cases} P'' + Q' = L'\,(P' + Q)^{-1}\,{}^tL' \;,\; P + Q'' = {}^tL\,(P' + Q)^{-1}L \\ L'' = -\,{}^tL\,(P' + Q)^{-1}\,{}^tL' \;. \end{cases}$$

Note 2.2. - On a, en écrivant $A + A' + A''$ pour $A(x, x') + A'(x', x'') + A''(x'', x)$

$$(2.11)\qquad \mathrm{Inert}_x\,(A + A' + A'') = \mathrm{Inert}_{x'}\,(A + A' + A'') = \mathrm{Inert}_{x''}\,(A + A' + A'')\;;$$

$$(2.12)\qquad \mathrm{Hess}_{x'}\,(A + A' + A'') = \frac{\Delta^2(A)\,\Delta^2(A')}{\Delta^2(A''*)}\;.$$

Preuve de 1). - Vu (1.11), les relations

$$(x, p) = s_A(x', p')\;,\;(x', p') = s_{A'}(x'', p'')$$

s'écrivent

$$p = A_x(x, x')\;,\; p' = -A_{x'}(x, x') = A'_{x'}(x', x'')\;,\; p'' = -A'_{x''}(x', x'')$$

l'élimination de p' et x' entre ces relations définit

$$(x,p) = s_A\, s_{A'}\,(x'', p'')\;.$$

La condition (2.7) $s_A\, s_{A'} \notin \sum_{sp}$ équivaut donc à chacune des suivantes :

cette élimination laisse x et x'' indépendantes ;

la relation

$$A_{x'}(x, x') + A'_{x'}(x', x'') = 0$$

laisse x et x'' indépendantes ;

il existe x' vérifiant cette relation, quels que soient x et x''.

Or, dans (1.9), dét $L \neq 0$; donc (2.7) équivaut à (2.8).

Preuve de 2). - L'hypothèse (2.9) signifie ceci : deux quelconques des trois relations suivantes impliquent le troisième :

$$(x, p) = s_A(x', p')\;,\;(x', p') = s_{A'}(x'', p'')\;,\;(x'', p'') = s_{A''}(x, p)\;.$$

Donc, vu (1.11), chacune des trois relations que voici implique les deux autres :

(2.13) $$(A+A'+A'')_x = 0 , (A+A'+A'')_{x'} = 0 \; (A+A'+A'')_{x''} = 0 ,$$

où $$A+A'+A'' = A(x,x') + A'(x',x'') + A''(x'',x) .$$

Or, vu la formule d'Euler, ces trois relations impliquent

$$A + A' + A'' = 0 .$$

Donc :

$$(A + A' + A'')_{x'} = 0, \quad \text{c'est-à-dire } (A+A')_{x'} = 0 \text{ implique } A+A'+A'' = 0.$$

<u>Preuve de</u> 3). - D'une part

$$\mathrm{Hess}_{x'} (A+A'+A'') = \mathrm{Hess}\,(P' + Q) .$$

D'autre part les trois relations, deux à deux équivalentes,(2.13) s'écrivent :

$$(P+Q'')\,x - {}^tLx' - L''x'' = 0$$

$$-Lx + (P' + Q)\,x' - {}^tL'\,x'' = 0$$

$$-{}^tL''x - L'x' + (P'' + Q')\,x'' = 0 ;$$

(2.10) exprime évidemment ces équivalences.

<u>Preuve de la Note</u> 2.2. - Vu $(2.10)_1$, les matrices symétriques

$$P'' + Q' \;,\; (P' + Q)^{-1} \text{ et } P + Q''$$

peuvent être transformées l'une en l'autre ; elles ont donc la même inertie ; c'est ce qu'énonce (2.11) .

Vu $(2.10)_2$,

$$\mathrm{Hess}\,(P'+Q) = (\text{dét } L)\,.\,(\text{dét } L') \,/\, (-1)^{\ell} \text{ dét } L'' ;$$

vu la définition 2.2, c'est ce qu'énonce (2.12).

<u>Définitions</u> 2.4. - Etant donnés

$$s_A \,,\, s_{A'} \,,\, s_{A''} \in Sp(\ell) - \Sigma_{Sp} \quad \text{tels que } \; s_A\, s_{A'}\, s_{A''} = e ,$$

définissons :

(2.14) $\quad \mathrm{Inert}\,(s_A, s_{A'}, s_{A''}) = \mathrm{Inert}_x\,(A+A'+A'')$ [voir (2.11)].

Définissons

$$\mathrm{Inert}\,(S_A, S_{A'}, S_{A''}) = \mathrm{Inert}\,(s_A, s_{A'}, s_{A''}) .$$

Définissons d'autre part <u>l'indice de Maslov</u> $m\,(S_A) \in \mathbb{Z}_4$ de S_A par :

(2.15) $$m\,(S_A) = m\,(A) \mod.4 ;$$

le § 2 n° 10 le rattachera à l'indice que V.I. Maslov a effectivement introduit.

Le lemme 2.1 et (2.15) ont pour conséquences évidentes ceci :

(2.16) $$\begin{cases} \mathrm{Inert}\,(s_{A''}^{-1}, s_{A'}^{-1}, s_A^{-1}) = \ell - \mathrm{Inert}\,(s_A, s_{A'}, s_{A''}) ; \\ m\,(S_A^{-1}) = \ell - m\,(S_A) ;\ m\,(-S_A) = m\,(S_A) + 2 \qquad \mod.4 \end{cases}$$

Nous pouvons enfin étudier la composition des S_A .

LEMME 2.4. - Soit un triplet A, A', A'' d'élements de $\mathbb{A}$, tel que

(2.17) $$s_A\, s_{A'}\, s_{A''} = e .$$

On a

(2.18) $S_A\, S_{A'}\, S_{A''} = \pm E$ [E : élément neutre de $Mp(\ell)$].

La condition pour qu'on ait

(2.19) $$S_A\, S_{A'}\, S_{A''} = E$$

est

(2.20) $$\mathrm{Inert}\,(S_A, S_{A'}, S_{A''}) = m\,(S_A) - m\,(S_{A'}^{-1}) + m\,(S_{A''}) \mod.4$$

<u>Note</u>. - La condition (2.17), qui équivaut donc à (2.18), implique (2.20) mod.2.

<u>Preuve</u>. - Soit $y \in X$; la formule (1.10) vaut quand on y remplace f' par la mesure de Dirac de support y :

$$\delta'\,(x) = \delta\,(x-y) ;$$

on obtient :

$$(S_{A'}\,\delta')\,(x) = \left(\frac{|\nu|}{2\pi i}\right)^{\ell/2} \Delta\,(A')\; e^{\nu A'(x\,,y)}\ ;$$

d'où, vu le lemme 2.2

$$(S_A S_{A'}\,\delta')\,(x) = \left(\frac{|\nu|}{2\pi i}\right)^{\ell/2} \Delta\,(A)\,\Delta\,(A')\,\{\mathrm{Hess}_{x'}[\,A(x\,,x') + A'(x'\,,y)]\}^{-\frac{1}{2}} e^{-\nu A''(y,x)}$$

d'où, en multipliant par $f'\,(y)\,d^{\ell}y$ où $f' \in \mathcal{S}(X)$ et en sommant :

$$S_A\,S_{A'}\,f' = \frac{\Delta\,(A)\,\Delta\,(A')}{\Delta\,(A''\,*)}\,[\,\mathrm{Hess}_{x'}\,(A+A'+A'')\,]^{-\frac{1}{2}}\quad S_{A''\,*}\,f'\ ;$$

d'où, vu le lemme 2.1 et la formule (2.12) :

$$S_A\,S_{A'}\,S_{A''} = \pm\,E\,,$$

Précisons ce signe : vu la définition 2.4

$$\arg[\,\mathrm{Hess}_{x'}\,(A+A'+A'')\,]^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}\ \mathrm{Inert}\,(S_A\,,S_{A'}\,,\,S_{A''})\ \mathrm{mod}\ 2\,\pi\,;$$

vu la définition 1.2 , (2.16) et le lemme 2.1

$$\arg\,\Delta\,(A) = \frac{\pi}{2}\,m\,(S_A)\,,\ \arg\,\Delta\,(A') = \frac{\pi}{2}\,m\,(S_{A'}) = \frac{\pi}{2}\,[\,\ell - m\,(S_{A'}^{-1}\,)\,]\ ,$$

$$\arg\Delta\,(A''*) = \frac{\pi}{2}\,m\,(S_{A''}^{-1}) = \frac{\pi}{2}\,[\,\ell - m\,(S_{A''}\,)\,]\quad \mathrm{mod}\ 2\pi\,;$$

donc

$$\arg(\pm 1) = \frac{\pi}{2}\,[\,\mathrm{Inert}\,(S_{A'}\,S_{A'}\,,\,S_{A''}) - m\,(S_A) + m\,(S_{A'}^{-1}) - m\,(S_{A''}\,)\,]\ \mathrm{mod}\ 2\pi$$

Rappelons que $Sp_2\,(\ell)$ désigne le groupe qu'engendrent les S_A.

LEMME 2.5. - Tout élément de $Sp_2\,(\ell)$ est produit de deux des S_A.

<u>Preuve</u>. - Vu le lemme 2.1, tout élément de $Sp_2\,(\ell)$ est produit de S_A. Il suffit donc de prouver ceci :

Etant donnés $U, V, W \in \mathbb{A}$, il existe B et $C \in \mathbb{A}$ tels que

(2.21) $$S_U\, S_V\, S_W = S_B\, S_C\,.$$

Or, vu les lemmes 2.3 1°) et 2.4, pour tout $W \in \mathbb{A}$ et tout T élément générique de $\{S_A\}$, $S_W\, S_T$ appartient à $\{S_A\}$ et est générique ; donc, pour T générique :

$$S_V\, S_T \in \{S_A\}\;,\; S_U\, S_V\, S_T \in \{\, S_A\}\;,\; S_T^{-1}\, S_W \in \{S_A\};$$

d'où (2.21) avec

$$S_B = S_U\, S_V\, S_T \in \{\, S_A\,\}\;,\; S_C = S_T^{-1}\, S_W \in \{\, S_A\}\,.$$

La restriction à $Sp_2(\ell)$ du morphisme naturel $Mp(\ell) \to Sp(\ell)$ est évidemment un morphisme naturel :

$$Sp_2(\ell) \to Sp(\ell)\,.$$

LEMME 2.6 . - Le noyau de ce morphisme est le sous-groupe

$$S^o = \{\, E\,, -E\}\;;$$

donc

$$Sp_2(\ell)\,/\,S^o = Sp(\ell)\,.$$

<u>Preuve</u> . - Vu le lemme précédent, le noyau de ce morphisme est l'ensemble des $S_A\, S_{A'}$ (A et $A' \in \mathbb{A}$) tels que $s_A\, s_{A'} = e$; d'où, vu le lemme 2.1 :

$$s_{A'} = s_{A^*}\;;$$

donc, vu la définition 2.2 :

$$(\forall\, x, x' \in X) \quad A'\,(x\,,x') = A^*\,(x\,,x')\;;$$

par suite

$$\Delta\,(A') = \pm\, \Delta\,(A^*)$$

et

$$S_{A'} = \pm\, S_{A^*}\;;\; \text{donc}\;\; S_A\, S_{A'} = \pm\, E\,.$$

LEMME 2.7. - Le groupe $Sp_2(\ell)$ est connexe.

<u>Preuve.</u> - Etant donné $k \in \mathbb{Z}_4$ (groupe additif des entiers mod. 4), notons D_k l'ensemble des S_A tels que

$$m\,(A) = k, \quad \text{c.à.d.} \quad i^{-k}\,\Delta\,(A) > 0\;;$$

vu la définition 1.2 de $\mathbb{A}$, chaque D_k est un domaine <u>connexe</u> de $Sp_2(\ell)$.

Etant donné $k \in \mathbb{Z}_4$, soient S_A et $S_{A'}$ tels que :

$$m(S_A) - m(S^{-1}_{A'}) = -k \bmod 4 ,$$

$P' + Q$ ait une valeur propre nulle et $\ell - 1$ valeurs propres > 0.

Soient B et $B' \in \mathbb{A}$, voisins de A et A', tel que

$$\mathrm{Hess}_{x'}(B + B') \neq 0 ;$$

définissons $B'' \in \mathbb{A}$ par $S_B\, S_{B'}\, S_{B''} = E$; $\mathrm{Inert}_{x'}(B + B')$ prend les valeurs 0 et 1 ; puisque m est localement constant :

$$m(S_B) = m(S_A) , m(S^{-1}_B) = m(S^{-1}_A);$$

vu (2.20) , $m(S_{B''})$ prend les valeurs k et $k+1$ dans tout voisinage de $(S_A\, S_{A'})^{-1}$ qui appartient donc à $\overline{D_k} \cap \overline{D_{k+1}}$:

$$\overline{D_k} \cap \overline{D_{k+1}} \neq \emptyset .$$

D'où le lemme.

Les lemmes ci-dessus prouvent le théorème suivant. Son 1° réduit l'étude de $Mp(\ell)$ à celle de $Sp_2(\ell)$; on trouve son équivalent chez D. Shale et A. Weil ; mais la preuve que nous en avons donnée a établi divers autres résultats qui nous seront indispensables. L'un d'eux est le 3°) de ce théorème : c'est le n° 8 du § 2 qui l'emploiera.

THEOREME 2 . - 1) Les éléments S_A de $Mp(\ell)$ que définit (1.10) engendrent un sous-groupe $Sp_2(\ell)$ de $Mp(\ell)$; $Sp_2(\ell)$ est un revêtement d'ordre 2 du groupe $Sp(\ell)$; c'est un groupe d'automorphismes de $\mathcal{S}(X)$ se prolongeant en automorphismes unitaires de $\mathcal{H}(X)$ et en automorphismes de $\mathcal{S}'(X)$.

2) Les formules (2.11) et (2.14) définissent l'inertie de tout triplet s, s', s'' d'éléments de $Sp(\ell) \setminus \Sigma_{Sp}$ tel que :

$$s\, s'\, s'' = e \quad [\text{élément neutre de } Sp(\ell)] ;$$

l'inertie est une fonction localement constante, (discontinue sur Σ_{Sp}) , à valeurs dans $\{0, 1, \dots, \ell\}$, vérifiant :

$$\mathrm{Inert}(s, s', s'') = \mathrm{Inert}(s'', s, s') = \dots = \ell - \mathrm{Inert}(s''^{-1}, s'^{-1}, s^{-1}) .$$

Notons Σ_{Sp_2} l'hypersurface de $Sp_2(\ell)$ dont la projection naturelle sur $Sp(\ell)$ est Σ_{Sp} ; les S_A , définis par (1.10), sont les éléments de $Sp_2(\ell) \setminus \Sigma_{Sp_2}$. Soit un triplet S , S' , S'' de tels éléments, vérifiant :

$$S\, S'\, S'' = E \quad [\text{élément neutre de } Sp_2(\ell)] ;$$

soient s, s', s'' sa projection naturelle sur $Sp(\ell)$: nous définissons

$$\mathrm{Inert}\,(S, S', S'') = \mathrm{Inert}\,(s, s', s'') .$$

3) La formule (2.15) définit sur $Sp_2(\ell) \setminus \Sigma_{Sp_2}$ l'indice de Maslov m ; c'est une fonction localement constante (discontinue sur Σ_{Sp_2}) , à valeurs dans $\mathbb{Z}_4$; elle vérifie

$$m\,(S^{-1}) = \ell - m\,(S)\,,\; m\,(-S) = m\,(S) + 2 \mod 4 ;$$

$$\mathrm{Inert}\,(S, S', S'') = m\,(S) - m\,(S'^{-1}) + m\,(S'') \mod 4 .$$

Note 2.3. - Nous verrons ultérieurement que cette dernière formule et la propriété d'être localement constante caractérisent m .

Note 2.4. - $Sp_2(\ell)$ contient les trois sous-groupes de $G(\ell)$ qu'a définis le n° 1 :

(i), par Fourier ; (ii) par des formes quadratiques ; (iii) par des automorphismes de X

Preuve. - Soit S un de leurs éléments ; on trouve aisément $A \in \mathbb{A}$ tel que

$$S\, S_A = S_{A'} \,, \text{ où } A' \in \mathbb{A} .$$

Note 2.5. - On peut prouver que tout $S \in Sp_2(\ell)$ est du type :

$$S = S_1\, S_2\, S_3\, S_4 ,$$

où : $S_3 \in$ (i) , c.à.d. est une transformée de Fourier portant sur au plus ℓ coordonnées ;

S_1 et $S_4 \in$ (ii) , c.à.d. sont du type : $f' \mapsto e^{\nu Q} f'$, Q : forme quadratique réelle ;

$S_2 \in$ (iii), c.à.d. est du type : $f'(.) \mapsto \sqrt{\text{dét}\, T}\; f'(T.)$, où T est un automorphisme de X

3. OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS A COEFFICIENTS POLYNOMIAUX . -

Vu la définition 1.1, les éléments de $Sp_2(\ell)$ transforment des opérateurs de ce type en opérateurs du même type ; ce n° 3 explicite cette transformation.

Soient a^+ et a^- deux polynomes de $\frac{1}{\nu}$, x, p :

$$a^+(\nu, x, p) = \sum_\alpha a^+_\alpha(\nu, x)\, p^\alpha ; \quad a^-(\nu, p, x) = \sum_\alpha p^\alpha a^-_\alpha(\nu, x) ;$$
(α : multi-indice)

Considérons les deux opérateurs différentiels :

$$(3.1) \qquad a^+\left(\nu, x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right) : f \mapsto \sum_\alpha a^+_\alpha(\nu, .) \left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(.) ;$$

$$(3.2) \qquad a^-\left(\nu, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}, x\right) : f \mapsto \sum_\alpha \left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha [\, a^-_\alpha(\nu, .)\, f(.)\,].$$

LEMME 3.1. - L'identité de ces deux opérateurs

$$(3.3) \qquad a^+\left(\nu, x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right) = a^-\left(\nu, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}, x\right)$$

équivaut à l'existence d'un polynome a° en $\frac{1}{\nu}$, x, p, tel que :

$$(3.4) \qquad \begin{cases} a^+(\nu, x, p) = e^{\frac{1}{2\nu}\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}\right\rangle} a^\circ(\nu, x, p) \\[2ex] a^-(\nu, p, x) = e^{-\frac{1}{2\nu}\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}\right\rangle} a^\circ(\nu, x, p) . \end{cases}$$

Les notations sont les suivantes :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}\right\rangle = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial p_j} \quad (x^j, p_j \text{ : coordonnés duales de } X \text{ et } X$$

$$e^{\lambda\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}\right\rangle} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}\right\rangle^k .$$

Preuve. - La relation (3.3) définit une bijection $a^- \mapsto a^+$ telle que, pour tout $p \in X^*$:

$$a^+(\nu, x, p) = e^{-\nu<p,x>} a^+(\nu, x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})\ e^{\nu<p,x>} =$$

$$= e^{-\nu<p,x>}\ a^-(\nu, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}, x)\, e^{\nu<p,x>} = \sum_\alpha (p+\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})^\alpha\ a^-_\alpha(\nu, x) =$$

$$= e^{\frac{1}{\nu}<\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}>}\ a^-(\nu, p, x)\ ,$$

car d'aprés la formule de Taylor, pour tout polynome $P : X^* \to \mathbb{C}$ et toute fonction $f : X \to \mathbb{C}$:

$$P\,(p+\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})\ f\,(x) = \sum_\beta \frac{1}{\beta\,!}\,(\frac{\partial}{\partial p})^\beta P(p)\ (\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})^\beta f\,(x)$$

$$= e^{\frac{1}{\nu}<\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}>}\,[\,P(p)\ f\,(x)\,]\,.$$

La bijection $a^- \to a^+$ peut donc être définie par la relation

$$a^+(\nu, x, p) = e^{\frac{1}{\nu}<\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}>}\ a^-(\nu, p, x)\ ;$$

c'est ce qu'affirme le lemme.

Définition 3.1. - Soit un opérateur différentiel a , d'expressions (3.1) et (3.2) ; il est défini par le polynome a° en $(\frac{1}{\nu}, x, p)$ qui vérifie (3.4) . Nous dirons que a est l'opérateur différentiel associé au polynome a°

Le théorème 3.1 explicitera le transformé $S\,a\,S^{-1}$ de a par $S \in Sp_2(\ell)$; le lemme 1.1 l'a déjà fait quand a° est linéaire en (x, p). La preuve de ce théorème emploiera les propriétés suivantes .

LEMME 3.2. - Si a et b sont les opérateurs associés aux polynomes a° et b°, alors l'opérateur

$$c = a\,b$$

est associé au polynome c° valant :

$$(3.5) \qquad c^{\circ}(\nu,x,p) = \{ e^{\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial p}> - \frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial q}>} [a^{\circ}(\nu,x,p)b^{\circ}(\nu,y,q)] \}_{\substack{y=x \\ q=p}} .$$

Preuve . - Si $b^{\circ}(\nu,x,p)$ ne dépend que de p, alors le polynome c° associé à $c = ab$ est :

$$c^{\circ}(\nu,x,p) = e^{-\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial p}>} [a^{+}(\nu,x,p)\, b^{\circ}(p)]$$

$$= \{ e^{-\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial p}+\frac{\partial}{\partial q}>} [a^{+}(\nu,x,p)\, b^{\circ}(q)] \}_{q=p}$$

$$= \{ e^{-\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial q}>} [a^{\circ}(\nu,x,p)\, b^{\circ}(q)] \}_{q=p} .$$

De même, si $b^{\circ}(\nu,x,p)$ ne dépend que de x, alors le polynome associé à $c = ab$ est :

$$c^{\circ}(\nu,x,p) = \{ e^{\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial p}>} [a^{\circ}(\nu,x,p)\, b(y)] \}_{y=x}$$

Donc, si $b^{+}(x,p) = b'(x)\, b''(p)$, alors le polynome associé à $c = ab$ est :

$$c^{\circ}(\nu,x,p) = e^{-\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial q}>} \{ e^{\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial p}>} [a^{\circ}(\nu,x,p)\, b'(y)] \}_{y=x}\, b''(q) \Big|_{q=}$$

$$= \{ e^{-\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial q}> - \frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial q}> + \frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial p}>} [a^{\circ}(\nu,x,p) b'(y) b''(q)] \}_{\substack{y=x \\ q=p}}$$

c'est-à-dire (3.5) , puisque, vu (3.4) :

$$e^{-\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial q}>} [b'(y)\, b''(q)] = b^{\circ}(y,q) .$$

D'où le lemme 3.2 , dont voici une conséquence évidente :

LEMME 3.3. - L'opérateur

$$c = \frac{1}{2}\,(ab + ba)$$

est associé au polynome :

$$c^{\circ}(\nu, x, p) = \{ch\, [\frac{1}{2\nu} < \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial p} > - \frac{1}{2\nu} < \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial q} >]\, [a^{\circ}(\nu, x, p) b^{\circ}(\nu, y, q)]\}_{\substack{y=x \\ q=p}} .$$

Si b est linéaire en (y, q), alors

$$[< \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial p} > - < \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial q} >]^2 [a^{\circ}(\nu, x, p)\, b^{\circ}(\nu, y, q)] = 0$$

d'où

$$ch\, [....]\, a^{\circ} b^{\circ} = a^{\circ} b^{\circ} ;$$

donc :

LEMME 3.4. - Si b est linéaire en (x, p), alors l'opérateur associé à $a^{\circ} b^{\circ}$ est $\frac{1}{2}(ab + ba)$.

Ce lemme permet de prouver le

THEOREME 3.1. - Le transformé $S a S^{-1}$ de a par S est l'opérateur différentiel associé au polynome $a^{\circ} \circ s^{-1}$ [$S \in Sp_2(\ell)$; s est l'image de S dans $Sp(\ell)$].

Preuve. - Soit b un opérateur différentiel associé à un polynome b° linéaire ou affine en (x, p) ; le lemme 1.1 signifie que le théorème 3 s'applique à b. Pour le prouver par une récurrence relative au degré de a° en (x, p), il suffit donc de prouver ceci : si le théorème s'applique à a°, alors il s'applique à $a^{\circ} b^{\circ}$.

Puisque le théorème s'applique à a° et b°, les opérateurs associés aux polynomes

$$a^{\circ} b^{\circ} \quad \text{et} \quad (a^{\circ} b^{\circ}) \circ s^{-1} = (a^{\circ} \circ s^{-1})\, (b^{\circ} \circ s^{-1})$$

sont respectivement, vu le lemme 3.4 :

$$\frac{1}{2}(ab + ba) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(S a S^{-1} S b S^{-1} + S b S^{-1} S a S^{-1}) = \frac{1}{2} S (ab + ba) S^{-1} .$$

Le théorème s'applique donc à $a^{\circ} b^{\circ}$; il est donc prouvé.

Complétons-le par un théorème concernant les opérateurs adjoints.

Définition 3.2. - Rappelons que $\mathcal{H}(X)$ est muni du produit scalaire :

$$(\forall\, f\, , g \in \mathcal{H}(X))\quad (f\,|\,g) = \int_X f(x)\, \overline{g(x)}\, d^{\ell} x$$

($\overline{g(x)}$: imaginaire conjugué de $g(x)$) .

Deux opérateurs différentiels a et b sont dits adjoints si

$$(3.6)\qquad (\forall\, f\, , g \in \mathcal{H}(X))\quad (a f\,|\,g) = (f\,|\,b g)\, .$$

THEOREME 3.2. - Pour que les deux opérateurs différentiels a et b associés aux deux polynomes a° et b° soient adjoints, il faut et suffit que

$$(3.7)\qquad (\forall\, \nu \in i\mathbb{R}\, , x \in X\, , p \in X^{*})\quad b^{\circ}(\nu\, , x\, , p) = \overline{a^{\circ}(\nu\, , x\, , p)}\, .$$

Preuve . _ Il est évident que (3.6) équivaut à :

$$b^{-}(\nu\, , p\, , x) = \overline{a^{+}(\nu\, , x\, , p)}\, ,$$

c'est-à-dire, puisque ν est imaginaire pur, à :

$$e^{-\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}>}\, b^{\circ}(\nu\, , x\, , p) = e^{-\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}>}\, \overline{a^{\circ}(\nu\, , x\, , p)}\, .$$

donc à (3.7).

Les théorèmes 3.1 et 3.2 ont évidemment le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.1. - Si a^{*} est l'adjoint de a , alors $(\forall\, S \in Sp_2(\ell))$ $S\, a^{*}\, S^{-1}$ est l'adjoint de $S\, a\, S^{-1}$.

Le théorème 3.2 a évidemment le corollaire suivant, qui sera important :

COROLLAIRE 3.2. - Pour que l'opérateur a associé au polynome a° soit auto-adjoint il faut et suffit que ce polynome soit à valeurs réelles $(\forall\, \nu \in i\mathbb{R}\, , x \in X\, , p \in X^{*})$.

§ 2. Indices de Maslov ; indices d'inertie ; les variétés lagrangiennes et leurs orientations.

0. INTRODUCTION. - Historique. - Suivant une indication de V.C. BOUSLAEV [ ], le § 1 vient de définir sur $Sp_2(\ell)$, par (2.15), un indice de Maslov mod. 4 et de le rattacher par (2.20), à un indice d'inertie, fonction de deux éléments de $Sp(\ell)$.

Par ailleurs V.I. ARNOLD [ ] a défini sur le revêtement de la grasmannienne lagrangienne $\Lambda(\ell)$ de $Z(\ell)$ un autre indice de Maslov, qui se rattache au précédent et à un second indice d'inertie, fonction d'un triplet de points de $\Lambda(\ell)$. J.M. SOURIAU [ ] a donné une variante à la définition de l'indice de Maslov qu'expose ce § 2.

Sommaire. - Le § 3 du chap. I et le chap. II emploieront ces deux indices de Maslov et un troisième indice d'inertie, fonction d'un élément de $Sp(\ell)$ et d'un point de $\Lambda(\ell)$.

Nous reprenons en les adaptant, les diverses définitions de ces divers indices (Arnold, n° 5 ; Maslov, n° 6 ; Bouslaev, n° 7) pour expliciter leurs propriétés (n° 4, 5, 6, 7, 8), dont le § 3 énoncera celles qu'emploiera le chap. II.

Il nous faut d'abord préciser les propriétés topologiques de $Sp(\ell)$ et $\Lambda(\ell)$; (théorème 3) . Pour étudier ces propriétés nous employons comme Arnold une structure hermitienne de $Z(\ell)$; (n° 1 et 2) .

1. - CHOIX D'UNE STRUCTURE HERMITIENNES DE $Z(\ell)$. - Notons $(z \mid z')$ le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{C}^\ell$ muni d'une structure hermitienne ; évidemment

$$\mathrm{Im}(z \mid z') = - \mathrm{Im}(z' \mid z)$$

est une structure symplectique de $\mathbb{C}^\ell$.

De façon plus précise :

Lemme 1.1. - La restriction à X définit un homéomorphisme entre :

- L'ensemble des structures hermitiennes $(.|.)$ de $Z(\ell)$ telles que

$$(1.1) \qquad \mathrm{Im}(z\,|\,z') = [z\,,z'] \;\;,\; iX = X^* \;;$$

- l'ensemble des structures euclidiennes de X.

Preuve . - i) La restriction à X d'une structure hermitienne de $Z(\ell)$ vérifiant (1.1) est euclidienne, puisque :

$$(\forall x\,,x' \in X) \quad [x\,,x'] = 0\;.$$

Notons que, vu (1.1) :

$$(1.2) \qquad (z\,|\,z') = [iz\,,z'] + i[z\,,z']\;;$$

en particulier :

$$(1.3) \qquad (\forall x\,,x' \in X) \quad (x\,|\,x') = [ix\,,x']\;;$$

donc .

$$(1.4) \qquad ix = \tfrac{1}{2}\,\frac{\partial\,|x|^2}{\partial x} \in X^*\;.$$

ii) La donnée de $(.|.)$ sur X, définit :

- par (1.4), la restriction de i à X :

$$i_1 : X \to X^*\;;$$

- la restriction de i à X^* :

$$i_2 : X^* \to X\,,\ \text{car}\ \ i_2 = -\,i_1^{-1}\ \ \text{puisque}\ \ i^2 = -1\;;$$

- donc l'automorphisme i de X :

$$(1.5) \qquad i\,(x\,,p) = (i_2 p\,,\,i_1 x)$$

- enfin, par (1.2), la structure hermitienne de $Z(\ell)$.

La restriction à X des structures hermitiennes de $Z(\ell)$ vérifiant (1.1) est donc une application injective de l'ensemble de ces structures dans celui des structures euclidiennes de X.

iii) Elle est bijective ; en effet : l'automorphisme i de $Z(\ell)$ défini par la donnée de $(.|.)$ sur X, c est-à-dire par (1.5), vérifie :

$$i^2 = -1, [iz, z'] = [iz', z], \text{car } {}^t i_1 = i_1, {}^t i_2 = i_2 ;$$

$(.|.)$, que (1.2) définit sur $Z(\ell)$, est évidemment linéaire en $z \in \mathbb{C}^\ell$

- vérifie $(z', z) = \overline{(z', z)}$;
- est donc sesquilinéaire ;
- vérifie $$|x+iy|^2 = |x|^2 + |y|^2 ;$$
- est donc bien une structure hermitienne.

Le lemme 1.1 a pour corollaire le

LEMME 1.2. - L'ensemble des structures hermitiennes de $Z(\ell)$ vérifiant (1.1) est un cône convexe ouvert ; il est donc connexe.

Note 1. - Nous choisissons arbitrairement l'une de ces structures hermitiennes de $Z(\ell)$; nous l'emploierons à définir des notions topologiques (les indices de Maslov) ; ces notions ne dépendront pas de ce choix, vu le lemme précédent.

2. LA GRASSMANNIENNE LAGRANGIENNE $\Lambda(\ell)$ DE $Z(\ell)$. -

Un sous-espace de $Z(\ell)$ est dit lagrangien quand la restriction de $[.,.]$ à ce sous-espace est identiquement nulle, c'est-à-dire, vu (1.1), quand la restriction de la structure hermitienne de $Z(\ell)$ est une structure euclidienne de ce sous-espace.

Tout repère orthonormé d'un sous-espace lagrangien de dimension k est donc constitué par des vecteurs orthogonaux dans $Z(\ell)$; donc $k \leq \ell$.

Notons $\Lambda(\ell)$ l'ensemble des sous-espaces lagrangiens de dimension ℓ ; $\Lambda(\ell)$ est nommée grassmannienne lagrangienne.

$$X \text{ et } X^* \in \Lambda(\ell).$$

Soient : $\lambda \in \Lambda(\ell)$; r un repère orthonormé de λ ; c'est un repère de $Z(\ell)$: $Z(\ell)$ (resp. λ) a pour éléments les combinaisons linéaires à coefficients complexes (resp. réels) des vecteurs constituant r.

Notons $U(\ell)$ le groupe des automorphismes unitaires u de $Z(\ell)$; (c'est-à-dire : $u\,u^* = e$, où : $u^* = {}^t\bar{u}$; ${}^t\bullet$: transposé ; e : identité) ; vu (1.1) :

$$U(\ell) \subset Sp(\ell) .$$

Soient, de même : $\lambda' \in \Lambda(\ell)$; r' un repère orthonormé de λ'. $U(\ell)$ contient un élément unique u tel que :

$$r = u\,r' ;$$

d'où :

$$\lambda = u\,\lambda' .$$

Le groupe $U(\ell)$ opère donc <u>transitivement</u> sur $\Lambda(\ell)$: il en est de même, a fortiori, pour $Sp(\ell)$; d'où le 1°) du lemme ci-dessous, où $St(\ell)$ [et $O(\ell)$] désigne le <u>stabilisateur</u> de X^* dans $Sp(\ell)$ [et $U(\ell)$], c. à . d. le sous-groupe des s tels que $s\,X^* = X^*$.

$O(\ell)$ est évidemment <u>le groupe orthogonal</u>. Le lemme 2.3 explicitera $St(\ell)$; son 2°) montre pourquoi le stabilisateur de X^* nous intéresse plus que celui de X.

LEMME 2.1. - 1) On a

$$\Lambda(\ell) = Sp(\ell) / St(\ell) = U(\ell) / O(\ell) . \tag{2.1}$$

2°) Notons $W(\ell)$ <u>l'ensemble</u> des éléments symétriques w de $U(\ell)$; (c'est-à-dire : ${}^t w = w$. Donc $w \in W(\ell)$ signifie : $w = {}^t w = \bar{w}^{-1}$).

Le diagramme :

$$\begin{array}{c} U(\ell) \ni u \mapsto u\,{}^t u = w \in W(\ell) \\ \downarrow \\ U(\ell) / O(\ell) = \Lambda(\ell) \ni \lambda = u\,X^* \end{array} \tag{2.2}$$

définit un <u>homéomorphisme</u> naturel :

$$\Lambda(\ell) \ni \lambda \mapsto w(\lambda) \in W(\ell) . \tag{2.3}$$

La condition :

(2.4) $z \in \lambda$ équivaut à $z + w(\lambda)\bar{z} = 0$.

Notons :

$$z = x + iy \quad , \text{ où } x \text{ et } y \in X ;$$

supposons :

$$1 \notin sp(w(\lambda)) \quad [sp(w) : \text{spectre de } w ; 0\text{-chaîne de } S^1] ;$$

(2.5) $z \in \lambda$ équivaut à $y = i \dfrac{e + w(\lambda)}{e - w(\lambda)} x$,

où $i \dfrac{e+w(\lambda)}{e-w(\lambda)}$ est une matrice réelle, symétrique ; (c'est-à-dire : identique à sa transposée) .

3°) $\dim(\lambda \cap \lambda')$ est l'ordre de multiplicité de 1 dans $sp(w(\lambda)\, w^{-1}(\lambda'))$.

Note 2. - Ce 3°) prépare la définition topologique de l'indice de Maslov (n°5).

La preuve du lemme 2.1 repose sur le lemme suivant, qui est une conséquence évidente de l'expression de $u \in U(\ell)$ au moyen de ses valeurs et vecteurs propres :

LEMME 2.2. - 1°) Soit $u \in U(\ell)$; pour que $u \in W(\ell)$, il faut et suffit qu'on puisse choisir réels tous ses vecteurs propres .
2) Toute application surjective :

$$F : S^1 \to S^1 \quad (S^1 \text{ cercle trigonométrique de } \mathbb{C})$$

définit une application surjective :

$$W(\ell) \ni w \mapsto F(w) \in W(\ell) .$$

Preuve du lemme 2.1 2°) . - Le diagramme (2.2) définit une application (2.3), car si u et $uv \in U(\ell)$ ont la même image dans $\Lambda(\ell) = U(\ell)/O(\ell)$, alors $v \in O(\ell)$, donc :

$$uv\, {}^t(uv) = uv\, {}^tv\, {}^tu = u\, {}^tu .$$

Etant donné $w \in W(\ell)$, vu le lemme 2.2 2°), il existe $u \in W(\ell)$ tel que

$w = u^2$; donc $w = u\,{}^t u$; l'application (2.3) est donc surjective.

Puisque $\lambda = u X^*$, la condition $z \in \lambda$ s'énonce

$u^{-1} z \in X^*$, ou $\mathrm{Re}(u^{-1} z) = 0$ ou $u^{-1} z + \bar{u}^{-1} \bar{z} = 0$ ou $z + w \bar{z} = 0$.

L'application (2.3) est donc injective.

Preuve du lemme 2.1 3°). – Notons $w = w(\lambda)$, $w' = w(\lambda')$; $\lambda \cap \lambda'$ a pour équations :

$$z + w \bar{z} = 0 \quad , \quad z + w' \bar{z} = 0 \; ;$$

c'est-à-dire :

$$\lambda \cap \lambda' : w^{-1} z = w'^{-1} z \; ; \; z = - w \bar{z} .$$

Notons T le sous-espace analytique de $Z(\ell)$ d'équation :

$$T : w^{-1} z = w'^{-1} z \; ; \text{ on a } \dim_c T = k ,$$

k étant l'ordre de multiplicité de 1 dans $\mathrm{sp}(w\, w'^{-1})$. L'équation de $\lambda \cap \lambda'$ dans T est :

$$z + w \bar{z} = 0 .$$

Vu le lemme 2.2 2°), il existe $u \in W(\ell)$ tel que :

$$- w = \bar{u}^2 = u^{-1} \bar{u} .$$

l'équation de $\lambda \cap \lambda'$ dans T s'écrit donc :

$$u z = \bar{u} \bar{z} .$$

L'isomorphisme

$$T \ni z \mapsto u z \in \mathbb{C}^k$$

applique donc $\lambda \cap \lambda'$ sur la partie réelle $\mathbb{R}^k$ de $\mathbb{C}^k$; donc :

$$\dim_r \lambda \cap \lambda' = k.$$

LEMME 2.3. – Le stabilisateur $St(\ell)$ de X^* dans $Sp(\ell)$ a les propriétés suivantes :

1°) Les éléments s de $St(\ell)$ se définissent comme suit :

$$s\,(x',p') = (x,p)$$

équivaut à :

(2.6) $$x = s_1 x' \ , \ p = {}^t s_1^{-1}\,(p' + s_2 x')\ ,$$

où : s_1 est un automorphisme arbitraire de X ;

$s_2 = {}^t s_2$ un morphisme symétrique arbitraire : $X \to X^*$.

2°) Cet élément s de $St(\ell)$ est la projection des deux éléments S de $Sp_2(\ell)$ définis par :

(2.7) $$(Sf)(x) = \sqrt{\text{dét}\, s_1}\ \left[e^{\frac{\nu}{2} < x' , s_2 x' >} f\ (x') \right]_{x' = s_1^{-1} x}$$

<u>Note</u> 2.1. - Nommons $St_2(\ell)$ le sous-groupe de $Sp_2(\ell)$ dont la projection sur $Sp(\ell)$ est $St(\ell)$.

Vu la Note 2.5 du § 1, $St_2(\ell)$ est l'ensemble des $S \in Sp_2(\ell)$ qui opèrent localement sur $\mathcal{S}$ (X) : la valeur de Sf' en un point x de X ne dépend que de l'allure de f' en un point x' de X (en fait de la valeur de f' en x').

<u>Preuve de</u> 1°) . - Les éléments du stabilisateur de X^* dans le groupe des automorphismes de l'espace vectoriel $Z(\ell)$ sont les applications (x', p') $(x', p') \mapsto (x, p)$ définis par :

$$x = s_1 x' \ , \ p = s_* (p' + s_2 x')\ ,$$

où s_1 et s_* sont des automorphismes de X et X^* , s_2 est un morphisme $X \to X^*$. Ces éléments appartiennent à $Sp(\ell)$ quand :

$$s_* = {}^t s_1^{-1}\ ,\ \ s_2 = {}^t s_2\ .$$

<u>Preuve de</u> 2°) . - La formule (2.7) définit un automorphisme S de $\mathcal{S}'(X)$, qui appartient à $Sp_2(\ell)$ vu la Note 2.4 du § 1 . On a évidemment :

$$x.(Sf) = S[\,f.\,s_1 x'] \ ,\ \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}(Sf) = S\left[\,{}^t s_1^{-1}\left(\frac{1}{\nu}\ \frac{\partial}{\partial x'} + s_2 x'\right) f\ \right] ;$$

donc, pour tout a de $\mathfrak{a}$ (§ 1, n° 1) :

$$a^{\circ}\left(x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)(Sf) = S\, a^{\circ}\left(s_1 x', {}^t s_1^{-1}\left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x'} + s_2 x'\right)\right) f ;$$

c'est-à-dire, vu (2.6) :

$$S^{-1} a S \text{ est associé à } a^{\circ} \circ s ;$$

s est donc l'image naturelle dans $Sp(\ell)$ de $\pm S \in Sp_2(\ell)$.

3. LES REVÊTEMENTS DE $Sp(\ell)$ ET $\Lambda(\ell)$. - Les propriétés de ces revêtements résultent de celles de $\pi_1[Sp(\ell)]$ et $\pi_1[\Lambda(\ell)]$, qui s'obtiennent en étudiant $\pi_1[U(\ell)]$.

π_k désigne le $k^{\text{ième}}$ groupe d'homotopie ; cf. N. Steenrod [ ]; précisons que N. Steenrod donne à l'expression "groupes symplectiques" un sens autre que le nôtre.

LEMME 3.1. - 1°) L'inclusion $O(\ell) \subset St(\ell)$ induit un isomorphisme :

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad \pi_k[O(\ell)] \simeq \pi_k[St(\ell)].$$

2°) L'inclusion $U(\ell) \subset Sp(\ell)$ induit un isomorphisme :

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad \pi_k[U(\ell)] \simeq \pi_k[Sp(\ell)].$$

3°) Le morphisme

$$\pi_1[U(\ell)] \ni \gamma \mapsto \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{d(\det u)}{\det u} \in \mathbf{Z} \tag{3.1}$$

est un isomorphisme naturel :

$$\pi_1[U(\ell)] \simeq \mathbb{Z}.$$

<u>Preuve de</u> 1°). - Les éléments s de $St(\ell)$ sont du type (2.6) ; ceux d'entre eux pour lesquels $s_2 = 0$ constituent un sous-groupe $GL(\ell)$ de $St(\ell)$; les inclusions

$$O(\ell) \subset GL(\ell) \subset St(\ell)$$

induisent des morphismes naturels

$$\pi_k[O(\ell)] \xrightarrow{i} \pi_k[GL(\ell)] \to \pi_k[St(\ell)] ,$$

dont le second est un isomorphisme, car

$$St(\ell) = GL(\ell) \times \mathbb{R}^n \text{ où } n = \frac{\ell(\ell+1)}{2} .$$

Il s'agit de prouver que i est un isomorphisme : or $GL(\ell)$ opère transitivement sur l'ensemble Q_+ des formes quadratiques définies positives sur X ; $O(\ell)$ est le stabilisateur de l'une telles ; donc

$$GL(\ell) / O(\ell) = Q_+ , \text{ où } Q_+ \text{ est convexe ;}$$

l'exactitude de la suite d'homotopie de cette fibration (cf. Steenrod [ ] , 17.3 , 17.4) prouve que i est bien un isomorphisme.

<u>Preuve de</u> 2°) . - Les inclusions

$$U(\ell) \subset Sp(\ell) \; ; \; St(\ell) \cap U(\ell) = O(\ell) \subset St(\ell)$$

définissent une application (cf Steenrod [ ] , 17.5) de la fibration

$$U(\ell) / O(\ell) = \Lambda(\ell) \text{ dans } Sp(\ell) / St(\ell) = \Lambda(\ell) ;$$

sa restriction à $\Lambda(\ell)$ est l'identité . Cette application induit un morphisme des suites d'homotopie de ces deux fibrations (cf. Steenrod [ ] , 17.3 , 17.11 , 17.5)

$$\begin{array}{ccccccccc}
\pi_{k+1}[\Lambda(\ell)] & \xrightarrow{\Delta'} & \pi_k[O(\ell)] & \xrightarrow{i'} & \pi_k[U(\ell)] & \xrightarrow{p'} & \pi_k[\Lambda(\ell)] & \ldots & \pi_0[O(\ell)] \\
\downarrow i_0 & & \downarrow i_0 & & \downarrow i_1 & & \downarrow i_0 & & \downarrow i_0 \\
\pi_{k+1}[\Lambda(\ell)] & \xrightarrow{\Delta} & \pi_k[St(\ell)] & \xrightarrow{i} & \pi_k[Sp(\ell)] & \xrightarrow{p} & \pi_k[\Lambda(\ell)] & \ldots & \pi_0[St(\ell)]
\end{array}$$

Ce diagramme, dont les lignes sont exactes, est donc commutatif ; les i_0 sont des isomorphismes ; il en résulte que les i_1 sont nécessairement des isomorphismes

<u>Preuve de</u> 3°) . - (Steenrod [ ] 25.2 prouve, par une autre voie, une partie de 3°))

Notons dét (c-à-d. déterminant) l'épimorphisme :

$$(3.2) \qquad U(\ell) \ni u \mapsto \text{dét}\, u \in S^1 \subset \dot{C};$$

notons $SU(\ell)$ son noyau : $u \in SU(\ell)$ quand dét $u = 1$; on a donc :

$$U(\ell)\,/\,SU(\ell) = S^1;$$

(3.2) est la projection naturelle de $U(\ell)$ sur S^1 ; la suite d'homotopie de cette fibration contient la suivante, qui est donc exacte :

$$(3.3) \qquad \pi_1[SU(\ell)] \xrightarrow{i} \pi_1[U(\ell)] \xrightarrow{p} \pi_1[S^1] \xrightarrow{\Delta} \pi_0[SU(\ell)];$$

p est induit par le morphisme (3.2) ; $SU(\ell)$ est connexe, donc $\pi_0[SU(\ell)]$ est trivial ; déterminons $\pi_1[SU(\ell)]$.

$SU(\ell)$ opère transitivement sur la sphère :

$$S^{2\ell-1} : |z| = 1 ;$$

le stabilisateur du vecteur $(1,0,\dots,0)$ de C^ℓ est $SU(\ell-1)$; donc

$$SU(\ell)\,/\,SU(\ell-1) = S^{2\ell-1};$$

la suite d'homotopie de cette fibration contient la suivante, qui est donc exacte :

$$\pi_2[S^{2\ell-1}] \xrightarrow{\Delta'} \pi_1[SU(\ell-1)] \xrightarrow{i'} \pi_1[SU(\ell)] \xrightarrow{p'} \pi_1[S^{2\ell-1}],$$

où (cf. Steenrod [ ] , 21.2) $\pi_1[S^{2\ell-1}]$ et $\pi_2[S^{2\ell-1}]$ sont triviaux pour $\ell \geqq 2$; donc i' est un isomorphisme ; or $\pi_1[SU(1)]$ est trivial, car $SU(1)$ est trivial ; donc :

$$(3.4) \qquad \pi_1[SU(\ell)] \text{ est trivial.}$$

Puisque, dans la suite exacte (3.3) , $\pi_1[SU(\ell)]$ et $\pi_0[SU(\ell)]$ sont triviaux, p est un isomorphisme.

Or

$$\pi_1[S^1] \ni \Gamma \to \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z} \in \mathbf{Z}$$

est un isomorphisme .

La composition de p, qui est induit par (3.2), et de cet isomorphisme est un isomorphisme $\pi_1[U(\ell)] \to \mathbf{Z}$, qui est évidemment défini par (3.1) .

LEMME 3.2 1°) Le composé de l'isomorphisme naturel [cf. (2.3)]

$\pi_1[\Lambda(\ell)] \simeq \pi_1[W(\ell)]$ et du morphisme

(3.5) $$\pi_1[W(\ell)] \ni \gamma \to \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d(\text{dét}\, w)}{\text{dét}\, w} \in \mathbf{Z}$$

est un isomorphisme naturel (<u>Arnold</u>)

$$\pi_1[\Lambda(\ell)] \simeq \mathbf{Z} .$$

2°) La fibration $Sp(\ell) / St(\ell) = \Lambda(\ell)$ définit un monomorphisme

(3.6) $$p : \mathbf{Z} \simeq \pi_1[Sp(\ell)] \to \pi_1[\Lambda(\ell)] \simeq \mathbf{Z}$$

qui est le produit par 2 des élements de $\mathbf{Z}$.

<u>Preuve de</u> 1°). - L'homéomorphisme naturel (2.3) permet de définir

(3.7) $$\text{dét}\, \lambda = \text{dét}\, w \in S^1 ;$$

l'application

(3.8) $$\Lambda(\ell) \ni \lambda \mapsto \text{dét}\, \lambda \in S^1$$

est évidemment un épimorphisme. Vu (2.2), on a

$$\text{dét}\, \lambda = \text{dét}^2 u , \quad \text{si} \quad \lambda = u X^* ;$$

donc, pour tout $u \in U(\ell)$:

(3.9) $$\text{dét}(u\lambda) = \text{dét}^2 u \,.\, \text{dét}\, \lambda .$$

L'application (3.8) définit donc une fibration, dont $U(\ell)$ permute les fibres c'est :

$$\Lambda(\ell) / S\Lambda(\ell) = S^1 ,$$

en notant $S\Lambda(\ell)$ la variété de $\Lambda(\ell)$ définie par l'équation :

$$S\Lambda(\ell) : \text{dét}\, w = 1 .$$

L'exactitude de la suite d'homotopie de cette fibration prouve l'exactitude de la suite :

(3.10) $$\pi_1 [S \wedge (\ell)] \xrightarrow{i} \pi_1 [\wedge (\ell)] \xrightarrow{p} \pi_1 [S^1] .$$

Puisque

$$p : \pi_1 [\wedge (\ell)] \to \pi_1 [S^1]$$

est induit par

$$\text{dét} : W (\ell) \to S^1 ,$$

p est un épimorphisme.

Déterminons $\pi_1 [S \wedge (\ell)]$; $S U (\ell)$ opère transitivement sur $S \wedge (\ell)$; $X^* \in S \wedge (\ell)$; le stabilisateur de X^* dans $SU(\ell)$ est $S O (\ell)$, composante connexe de l'élément neutre de $O (\ell)$; nous avons donc la fibration

$$S U (\ell) / S O (\ell) = S \wedge (\ell) ;$$

l'exactitude de sa suite d'homotopie implique celle de la suite :

$$\pi_1 [S U (\ell)] \xrightarrow{p'} \pi_1 [S \wedge (\ell)] \xrightarrow{\Delta'} \pi_o [S O (\ell)] ,$$

où $\pi_1 [S U (\ell)]$ et $\pi_o [S O (\ell)]$ sont triviaux, vu (3.4) et le fait que $SO(\ell)$ est connexe ; donc $\pi_1 [S \wedge (\ell)]$ est trivial ; dans (3.10) p est donc un isomorphisme .

Il est induit par l'application (3.8) . En la composant avec l'isomorphisme

$$\pi_1 [S^1] \ni \Gamma \to \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z} \in \mathbb{Z},$$

nous obtenons un isomorphisme $\pi_1 [\wedge(\ell)] \to \mathbb{Z}$, défini par (3.5).

<u>Preuve de</u> 2°) . - Dans (3.6) , l'isomorphisme $\mathbb{Z} \simeq \pi_1 [S p (l)]$ est le compos des isomorphismes définis par le 2°) et le 3°) du lemme 3.1 ; l'isomorphisme $\pi_1 [\wedge (\ell)] \simeq \mathbb{Z}$ est le composé de l'isomorphisme (3.5) et de celui qu'induit l'homéomorphisme de $\wedge (\ell)$ et $W (\ell)$. Prouver le 2°) du lemme 3.2 , c'est donc prouver ceci :

La fibration $U(\ell)/O(\ell) = W(\ell)$ induit un morphisme

$$(3.11) \qquad p : \mathbb{Z} \simeq \pi_1[U(\ell)] \to \pi_1[W(\ell)] \simeq \mathbb{Z}$$

qui est le produit par 2 des éléments de $\mathbb{Z}$.

Cette fibration est définie par l'application

$$U(\ell) \ni u \mapsto w = u\,{}^t u \text{ , qui vérifie } \text{dét}\, w = (\text{dét}\, u)^2 .$$

Puisque les isomorphismes figurant dans (3.11) sont définis par (3.1) et (3.5), nous avons donc

$$p : \mathbb{Z} \ni \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d(\text{dét}\, u)}{\text{dét}\, u} \mapsto \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d(\text{dét}\, u)^2}{(\text{dét}\, u)^2} \in \mathbb{Z} ;$$

ce morphisme $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est évidemment la multiplication par 2 .

Les deux lemmes précédents ont pour conséquence immédiate le théorème suivant, qui est évidemment indépendant de la structure hermitienne de $Z(\ell)$ employée ci dessus :

<u>Définition 3.</u> - α et β seront <u>les générateurs de</u> $\pi_1[Sp(\ell)]$ <u>et</u> $\pi_1[\Lambda(\ell)]$ d'images naturelles 1 dans $\mathbb{Z}$.

THEOREME 3 . - 1°) $Sp(\ell)$ <u>a un revêtement unique</u>, $Sp_q(\ell)$, <u>d'ordre</u> q ($q = 1, 2, \ldots, \infty$) [i.e. : dont le nombre de points ayant même projection sur $Sp(\ell)$ est q] ; α <u>opère sur</u> $Sp_q(\ell)$; α^r <u>n'opère identiquement sur</u> $Sp_q(\ell)$ <u>que si</u> $r = 0 \bmod q$.

2°) $\Lambda(\ell)$ <u>a un revêtement unique</u>, $\Lambda_q(\ell)$, <u>d'ordre</u> q ; β <u>opère sur</u> $\Lambda_q(\ell)$; β^r <u>n'opère identiquement sur</u> $\Lambda_q(\ell)$ <u>que si</u> $r = o \bmod q$.

3°) $Sp_q(\ell)$ <u>opère transitivement sur</u> $\Lambda_{2q}(\ell)$,

$$(3.12) \qquad (\alpha S_q)\lambda_{2q} = S_q(\beta^2\lambda_{2q}) = \beta^2 (S_q\lambda_{2q}) \text{, où } \lambda_{2q} \in \Lambda_{2q}(\ell), S_q \in Sp_q(\ell) .$$

Exemple 3.1. - $\wedge_2(\ell)$ est l'ensemble des sous-espaces de $Z(\ell)$ lagrangiens, orientés (au sens d'Euclide), ayant la dimension ℓ ; $Sp(\ell)$ opère sur $\wedge_2(\ell)$.

Exemple 3.2 . - $Sp_2(\ell)$ opère sur $\wedge_4(\ell)$: ce résultat est essentiel pour la théorie des développements asymptotiques (chap. II) .

Notations 3 . - s désignera la projection sur $Sp(\ell)$ de $S \in Sp_q(\ell)$;
λ .... $\wedge(\ell)$ de $\lambda_q \in \wedge_q$;
λ_2 .... $\wedge_2(\ell)$ de $\lambda_{2q} \in \wedge_{2q}(\ell)$;

e désignera l'élément neutre de $Sp(\ell)$; E celui de $Sp_q(\ell)$.

Nous choisirons un élément X^*_∞ de $\wedge_\infty(\ell)$ se projetant en X^* sur $\wedge(\ell)$; X^*_q désignera sa projection sur $\wedge_q(\ell)$.

4. INDICES D'INERTIE . - Définition de l'indice d'inertie Inert $(\lambda, \lambda', \lambda'')$ d'un triplet $(\lambda, \lambda', \lambda'')$ d'éléments de $\wedge(q)$, deux à deux transverses. On a :

$$\lambda \oplus \lambda' = \lambda' \oplus \lambda'' = \lambda'' \oplus \lambda = Z(\ell) .$$

Les conditions

(4.1) $$z \in \lambda , z' \in \lambda' , z'' \in \lambda'' , z + z' + z'' = 0$$

définissent donc trois isomorphismes

(4.2) $$\begin{tikzcd} & z \in \lambda \arrow[dr, mapsto] \arrow[dl, mapsto] & \\ \lambda'' \ni z'' \arrow[ur] & & z' \in \lambda' \arrow[ll, mapsto] \end{tikzcd}$$

dont le produit est l'identité. On a, vu (4.1) :

(4.3) $$[z, z'] = [z', z''] = [z'', z] ;$$

ce nombre est la valeur d'une forme quadratique de $z \in \lambda$ (de $z' \in \lambda'$ ou de $z'' \in \lambda''$); les isomorphismes (4.2) transforment les unes en les autres ces formes, qui ont donc le même indice d'inertie ; il sera noté :

$$\mathrm{Inert}\ (\lambda , \lambda' , \lambda'') .$$

LEMME

$$\lambda \ni z \mapsto [z , z'] \in \mathbb{R}$$

<u>est non dégénérée</u> (c'est-à-dire : n'a pas de valeur propre nulle).

<u>Preuve</u> . - Soit un second triplet

$$\zeta \in \lambda , \zeta' \in \lambda' , \zeta'' \in \lambda'' \text{ tel que } \zeta + \zeta' + \zeta'' = 0 ;$$

puisque λ , λ' et λ'' sont lagrangiens, la forme bilinéaire

$$(z , \zeta) \mapsto [z , \zeta'] = [\zeta' , z''] = [z'' , \zeta] = [\zeta , z'] = [z' , \zeta''] = [\zeta'' , z]$$

est symétrique et est donc la forme polaire de la forme quadratique

$$z \mapsto [z , z'] .$$

Si celle-ci était dégénérée, il existerait donc $z \neq 0$ tel que :

$$z \in \lambda , (\forall \zeta' \in \lambda') [z , \zeta'] = 0 ,$$

c'est-à-dire $z \in \lambda \cap \lambda'$,

contrairement aux hypothèses.

Inert $(. , . , .)$ a donc <u>les propriétés suivantes</u> :

(4.4) $$\mathrm{Inert}\ (\lambda , \lambda' , \lambda'') = \mathrm{Inert}\ (\lambda' , \lambda'' , \lambda) = \ell - \mathrm{Inert}\ (\lambda , \lambda'' , \lambda').$$

Inert $(. , . , .)$, qui est défini quand ses arguments sont deux à deux transverses est localement constant sur son domaine de définition .

(4.5) $$(\forall s \in Sp(\ell))\ \mathrm{Inert}(s\lambda , s\lambda' , s\lambda'') = \mathrm{Inert}(\lambda , \lambda' , \lambda'') .$$

Les formules (2.11) et (2.14) du Ch I , § 1 ont défini Inert (s , s' , s'') pour

(4.6) $$s , s' , s'' \in Sp(\ell) \setminus \textstyle\sum_{Sp} , \ s s' s'' = e .$$

Entre ces deux indices d'inertie existe la relation suivante :

THEOREME 4.1. - Sous l'hypothèse (4.6), on a :

(4.7) $$\mathrm{Inert}\ (s , s' , s'') = \mathrm{Inert}\ (s X^* , X^* , s''^{-1} X^*) .$$

<u>Note</u> 4.1. - La condition $s \in \sum_{Sp}$ équivaut à la suivante : $s X^*$ et X^* ne sont pas transverses.

<u>Preuve</u>. - Reprenons les notations du Ch I, § 2, n° 1, plus précisément celles du lemme 2.3, en notant :

$$s = s_A \,,\; s' = s_{A'} \,,\; s'' = s_{A''} \;;$$

$$s_A : (x', p') \mapsto (x, p) \quad \text{signifie : } p = Px - {}^tLx' \,,\; p' = Lx - Qx' \;;$$

$$s_{A''} : (x, p) \mapsto (x'', p'') \quad \text{signifie : } p'' = P''x'' - {}^tL''x \,,\; p = L''x'' - Q''x \,.$$

Les équations des sous-espaces

$$\lambda = sX^* \,,\; \lambda' = X^* \,,\; \lambda'' = s''^{-1} X^*$$

sont donc :

$$\lambda \;:\; p = Px \;;\; \lambda' : x' = 0 \;;\; \lambda'' : p'' = -Q''x'' \,.$$

La condition (4.1)

$$z = (x, p) \in \lambda \,,\; z'' = (x'', p'') \in \lambda'' \,,\; z + z'' \in \lambda'$$

s'écrit :

$$z = (x, Px) \,,\; z'' = (-x, Q''x) \,.$$

D'où :

$$[z'', z] = \langle (P + Q'')x, x \rangle \;;$$

donc, vu la définition (2.14) du § 1 :

$$\mathrm{Inert}(\lambda, \lambda', \lambda'') = \mathrm{Inert}(P + Q'') = \mathrm{Inert}_x(A + A' + A'') = \mathrm{Inert}(s, s', s'')$$

Les deux lemmes que voici expriment l'indice d'inertie (Inert) au moyen de l'indice de Kronecker (K.I.) ; lorsque le n° 5 aura défini l'indice de Maslov (m) au moyen de l'indice de Kronecker, le lemme 6.1 déduira de ces lemmes la relation entre les indices d'inertie et de Maslov.

LEMME 4.1. - $Sp(\ell)$ opère transitivement sur l'ensemble des couples d'éléments de $\Lambda(\ell)$ non transverses.

Note 4.2. - Tout triplet d'éléments de $\Lambda(\ell)$ non transverses 2 à 2 est donc du type :

$$(s\lambda, sX, sX^*) ;$$

rappelons que

$$\text{Inert}(s\lambda, sX, sX^*) = \text{Inert}(\lambda, X, X^*) .$$

Preuve. - Puisque $Sp(\ell)$ opère transitivement sur $\Lambda(\ell)$, il suffit de prouve que le stabilisateur de X^*, $St(\ell)$, opère transitivement sur l'ensemble des éléments de $\Lambda(\ell)$ transverses à X^*. L'élément s de $St(\ell)$ que définit (2.6) transforme

$$X : p' = 0 \quad \text{en} \quad sX : p = {}^t s_1^{-1} s_2 s_1^{-1} x ,$$

où $s_2 : X \to X^*$ est symétrique ; or la condition que l'équation $p = s_3 x$ définisse un élément de $\Lambda(x)$ est évidemment que $s_3 : X \to X^*$ soit symétrique.

Notation 4.1. - Rappelons que $sp(u)$, spectre de $u \in U(\ell)$, est une 0 - chaîne de S^1. Notons

$$sp(\lambda) = sp(w) , \tag{4.8}$$

où w est l'image de λ par l'homéomorphisme naturel (2.3) .

Notons $(\exp i\theta)$ le point de S^1 d'affixe $\exp i\theta$ $(\theta \in \mathbb{R})$ et $\ell(\exp i\theta)$ la 0 - chaîne constituée par ℓ fois ce point $(\ell \in \mathbb{Z})$; nous avons, par exemple:

$$sp(X^*) = sp(e) ; \; sp(X) = sp(-e) ; \; sp(e) = \ell(1), sp(-e) = \ell(-1) . \tag{4.9}$$

Notons σ une 1 - chaîne de S^1, $|\sigma|$ son support, $\partial\sigma$ son bord et K.I. l'indice de Kronecker (cf. Lefschetz, [ ]).

Rappelons que K.I. $[\sigma_1, \sigma_o]$

- est défini quand σ_1 et σ_o sont une 1 - chaîne et une 0 - chaîne de S^1 telles que $|\sigma_o| \cap |\partial\sigma_1| = \emptyset$,
- est nulle si $|\sigma_o| \cap |\sigma_1| = \emptyset$,
- est linéaire en σ_o et en σ_1,
- est égale à 1 si σ_o est un point et σ_1 un arc d'orientation positive auquel ce point est intérieur ;
- on a : K.I.$[\sigma_1, \partial\sigma_1'] = -$K.I.$[\sigma_1', \partial\sigma_1]$.

LEMME 4.2. - Soient σ et σ^* deux 1-chaînes de S^1 telles que :

(4.10) $$\partial\sigma = sp(\lambda) - sp(X^*)\ ,\ \partial\sigma^* = sp(\lambda) - sp(X)\ ,$$

(4.11) $$\sigma - \sigma^* \text{ appartient au demi-cercle de } S^1 \text{ où } \mathrm{Im}(z) \geq 0.$$

Alors :

(4.12) $$\mathrm{Inert}\,(\lambda, X, X^*) = K.I.\,[\sigma,(-1)] - K.I.\,[\sigma^*,(1)]\ .$$

Note 4.3. - Le lemme 5.1 emploiera cette décomposition de Inert.

Preuve . - Soient :

$$z = x + iy \in \lambda\ ,\ z' \in X\ ,\ z'' \in X^* \text{ tels que } z + z' + z'' = 0\ ;\ (x\,,y \in X)\ ;$$

évidemment

$$z' = -x\ ,\ z'' = -iy\ ;$$

$$[z'\,,z''] = \mathrm{Im}(z' \mid z'') = -(x\,,y)\ .$$

Soit w l'image naturelle de λ par (2.3) ; vu (2.5) :

$$y = i\,\frac{e+w}{e-w}\,x \qquad (e \text{ : identité})\ ;$$

puisque w est unitaire et symétrique , $i\,\frac{e+w}{e-w}$ est réel et symétrique. Donc $\mathrm{Inert}\,(\lambda, X, X^*)$ est l'indice d'inertie de la forme quadratique

$$X \ni x \mapsto -(x \mid i\,\frac{e+w}{e-w}\,x) \in R\ ,$$

c'est-à-dire le nombre de valeurs propres > 0 de la matrice réelle symétrique $i\,\frac{e+w}{e-w}$.

Or le demi-axe réel positif est l'image par la transformation homographique

(4.13) $$S^1 \ni (\exp i\theta) \mapsto i\,\frac{1+\exp i\theta}{1-\exp i\theta} \in R$$

du demi-cercle de S^1 où $\mathrm{Im}\,z \leq 0$; orientons-le positivement : il constitue une chaîne χ de S^1 ; (4.16) transforme les valeurs propres de w en celles de $i\,\frac{e+w}{e-w}$; donc :

$$\mathrm{Inert}\,(\lambda, X, X^*) = K.I.\,[\chi\,, sp\,w]\ .$$

Soit τ une chaîne de S^1 de bord

$$\partial\tau = sp(w) - sp(ie)\ .$$

Inert $(\lambda , X , X^*) = \text{K.I.}\ [\chi , \partial \tau] = - \text{K.I}[\tau , \partial \chi] = \text{K.I.}\ [\tau , (-1)] - \text{K.I.}\ [\tau , (1)]$.

Soient σ et σ^* des 1 - chaînes de S^1 telles que :

$$\begin{cases} \partial (\sigma - \tau) = sp(ie) - sp(e) , \\ \sigma - \tau \text{ appartient à l'arc } \theta \in [o , \frac{\pi}{2}] \text{ de } S^1 = \{ (\exp i\theta) \} ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial (\sigma^* - \tau) = sp(ie) - sp(-e) , \\ \sigma^* - \tau \text{ appartient à l'arc } \theta \in [\frac{\pi}{2} , \pi] \text{ de } S^1. \end{cases}$$

Puisque

$$\text{K.I.}\ [\sigma - \tau , (-1)] = \text{K.I.}[\sigma^* - \tau , (1)] = 0 ,$$

l'expression précédente de Inert (λ , X , X^*) équivaut à (4.12) ; or σ et σ^* vérifient les conditions (4.10) et (4.11) ; ces conditions les déterminent, à l'addition près de 1 - cycles γ et γ^* de S^1 tels que $\gamma - \gamma^*$ appartienne au demi-cercle de S^1 où $\text{Im}\, z > 0$; γ et γ^* sont donc homologues ; d'où :

$$\text{K.I.}\ [\gamma , (-1)] = \text{K.I.}\ [\gamma^* , (1)] ;$$

(4.12) vaut donc pour tout couple (σ , σ^*) vérifiant (4.10) et (4.11).

5. L'INDICE DE MASLOV m SUR $\Lambda^2_\infty (\ell)$. - Nous allons préciser la définition d'Arnold [ ] ; nous emploierons la définition préliminaire que voici .

<u>Définition</u> 5.1. - <u>L'indice</u> M <u>sur</u> $\Lambda^4_\infty (\ell)$. - Notons $(\nu_\infty , \nu'_\infty)$ un élément de $\Lambda_\infty (\ell) \times \Lambda_\infty (\ell) = \Lambda^2_\infty (\ell)$, c'est-à-dire un couple d'éléments de $\Lambda_\infty (\ell)$; soient ν et $w(\nu)$ les images naturelles de ν_∞ dans $\Lambda (\ell)$ et $W(\ell)$: [cf.(2.3)] ; ν' et $w' = w(\nu'_\infty)$ celles de ν'_∞ . Vu le 3°) du lemme 2.1, la transversalité de ν et ν' s'énonce :

$$(1) \notin sp(w\, w'^{-1}) ;$$

$sp(w\, w'^{-1})$, que nous notons $sp(\nu , \nu')$ est une 0 - chaîne de S^1 (cf. Lefschetz [ ]) ; l'application

$$\Gamma \ni (\nu_\infty , \nu'_\infty) \mapsto sp(\nu , \nu')$$

applique l'arc Γ sur une 1-chaîne de S^1 notée $sp(\Gamma)$; si

$$\partial \Gamma = (\lambda_\infty , \lambda'_\infty) - (\mu_\infty , \mu'_\infty) .$$

alors :

$$\partial sp(\Gamma) = sp(\lambda , \lambda') - sp(\mu , \mu') .$$

Supposons :

(5.1) λ et λ' transverses ; μ et μ' transverses ;

alors, vu le 3°) du lemme 2.1 :

$$(1) \notin | \partial sp(\Gamma) | ;$$

K.I. $[sp(\Gamma) , (1)]$ est donc défini ; c'est un entier ne dépendant que de la classe d'homotopie de Γ, c'est-à-dire de $\partial\Gamma$; nous le noterons :

$$M[\lambda_\infty , \lambda'_\infty ; \mu_\infty , \mu'_\infty] = \text{K.I.}\,[sp(\Gamma) , (1)] \in \mathbb{Z} . \tag{5.2}$$

<u>Note</u> 5.1. - Vu la Note 1, M est indépendant du choix de la structure hermitienne de $Z(\ell)$ qu'emploie sa définition .

<u>Propriétés de</u> M. - M est défini sous l'hypothèse (5.1) . M <u>est localement constant</u> sur son domaine de définition .

M possède la propriété <u>additive</u> évidente :

$$M[\lambda_\infty , \lambda'_\infty ; \mu_\infty , \mu'_\infty] + M[\mu_\infty , \mu'_\infty ; \nu_\infty , \nu'_\infty] = M[\lambda_\infty , \lambda'_\infty ; \nu_\infty , \nu'_\infty] , \tag{5.3}$$

qui implique

$$M[\lambda_\infty , \lambda'_\infty ; \lambda_\infty , \lambda'_\infty] = 0 ; \tag{5.4}$$

M possède la propriété <u>d'invariance</u> :

$$(\forall S \in Sp_\infty(\ell)) : M[S\lambda_\infty , S\lambda'_\infty ; \mu_\infty , \mu'_\infty] = M[\lambda_\infty , \lambda'_\infty ; \mu_\infty , \mu'_\infty] . \tag{5.5}$$

On a, β étant le générateur de $\pi_1[\Lambda(\ell)]$ (cf. Définition 3) :

$$(\forall r , r' \in \mathbb{Z}) : M[\beta^r \lambda_\infty , \beta^{r'} \lambda'_\infty ; \mu_\infty , \mu'_\infty] = M[\lambda_\infty , \lambda'_\infty ; \mu_\infty , \mu'_\infty] + r - r' . \tag{5.6}$$

Preuve de (5.5). - Sous l'hypothèse (5.1), $s\lambda$ et $s\lambda'$ sont transverses, l'application

$$Sp_\infty(\ell) \ni S \mapsto M[S\lambda_\infty, S\lambda'_\infty; \mu_\infty, \mu'_\infty] \in \mathbb{Z}$$

est définie et localement constante ; elle est donc constante, puisque $Sp_\infty(\ell)$ est connexe.

Preuve de (5.6). - Choisissons l'arc Γ différentiable et tel que :

$$\partial\Gamma = (\beta^r \lambda_\infty, \beta^{r'} \lambda'_\infty ; \lambda_\infty, \lambda'_\infty) ;$$

on peut évidemment définir ℓ fonctions continues

$$\theta_j : \Gamma \ni (\nu_\infty, \nu'_\infty) \mapsto \theta_j(\nu_\infty, \nu'_\infty) \in \mathbb{R} \quad (j = 1, \ldots, \ell)$$

telles que :

$$sp(\nu, \nu') = \sum_j (\exp i\theta_j) ; \quad \theta_j(\beta^r \lambda_\infty, \beta^{r'}\lambda'_\infty) = \theta_j(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) \bmod. 2\pi .$$

La définition (5.2) de M donne :

$$M[\beta^r\lambda_\infty, \beta^{r'}\lambda'_\infty; \lambda_\infty, \lambda'_\infty] = \sum_j \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma d\theta_j = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma d\Big(\sum_j \theta_j\Big)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\,\text{dét}(ww'^{-1})}{\text{dét}(ww'^{-1})} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\,(\text{dét}\,w)}{\text{dét}\,w} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d(\text{dét}\,w')}{\text{dét}\,w'} = r - r' ,$$

vu (3.5) et la Définition 3 ; d'où (5.6), vu la propriété additive (5.2) de M.

Pour retrouver l'hypothèse (4.11) du lemme 4.2, employons les définitions que voici :

Définition 5.2. - X_∞ est le point de $\Lambda_\infty(\ell)$ qui se projette en X sur $\Lambda(\ell)$ et qui peut être joint à X^*_∞ par un arc γ de $\Lambda_\infty(\ell)$ dont le spectre $sp(\gamma)$ appartient au demi-cercle de S^1 où $\operatorname{Im}(z) \geqq 0$.

Définition 5.3. - L'indice de Maslov est la fonction m valant :

$$m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) = M(\lambda_\infty, \lambda'_\infty ; X^*_\infty, X_\infty) .$$

Elle permet d'énoncer comme suit le lemme 4.2 :

LEMME 5.1. - Pour tout triplet $\lambda_\infty, \lambda'_\infty, \lambda''_\infty$ d'éléments de $\Lambda_\infty(\ell)$ on a :

$$\text{Inert}\,(\lambda, \lambda', \lambda'') = m\,(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) - m\,(\lambda_\infty, \lambda''_\infty) + m\,(\lambda'_\infty, \lambda''_\infty)\,. \tag{5.7}$$

Preuve. - Vu (5.6), le second membre de (5.7) ne dépend que de $(\lambda, \lambda', \lambda'')$; vu le lemme 4.1 et la propriété d'invariance (5.5) il suffit donc d'établir le cas particulier de (5.7) que voici :

$$\text{Inert}\,(\lambda, X, X^*) = m\,(\lambda_\infty, X_\infty) - m\,(\lambda_\infty, X^*_\infty) + m\,(X_\infty, X^*_\infty)\,. \tag{5.8}$$

La définition 5.3 de m et la propriété additive (5.3) de M donnent :

$$m\,(\lambda_\infty, X_\infty) = M\,[\lambda_\infty, X_\infty\,;\, X^*_\infty, X_\infty]\,;$$

$$m\,(\lambda_\infty, X^*_\infty) - m\,(X_\infty, X^*_\infty) = M\,[\lambda_\infty, X^*_\infty\,;\, X_\infty, X^*_\infty]\,.$$

La définition 5.1 de ces deux valeurs de M emploie deux arcs Γ et Γ^* de $\Lambda^2(\ell)$ tels que :

$$\partial\Gamma = (\lambda_\infty, X_\infty) - (X^*_\infty, X_\infty)\,;\, \partial\Gamma^* = (\lambda_\infty, X^*_\infty) - (X_\infty, X^*_\infty)\,;$$

Choisissons ces arcs produits cartésiens :

$$\Gamma = \gamma \times X_\infty \qquad , \Gamma^* = \gamma^* \times X^*_\infty\,,$$

γ et γ^* étant donc des arcs de $\Lambda(\ell)$ tels que

$$\partial\gamma = \lambda_\infty - X^*_\infty \quad , \partial\gamma^* = \lambda_\infty - X_\infty\,;$$

nous avons :

$$\partial\,(\gamma - \gamma^*) = X_\infty - X^*_\infty\,,$$

la définition 5.2 de X_∞ permettant de choisir γ et γ^* tels que : $sp\,(\gamma - \gamma^*)$ appartient au demi-cercle de S^1 où $\text{Im}(z) \geqq 0$.

Notons :

$$\sigma = sp(\gamma) \qquad , \sigma^* = sp(\gamma^*) .$$

Puisque l'homéomorphisme $w(\cdot)$ que définit (2.3) a les valeurs :

$$w(X) = -e \qquad , w(X^*) = e ,$$

la définition 5.1 de M donne :

$$M[\lambda_\infty, X_\infty ; X^*_\infty, X_\infty] = KI[\sigma, (-1)] ,$$

$$M[\lambda_\infty, X^*_\infty ; X_\infty, X^*_\infty] = KI[\sigma^*, (1)]$$

La formule à prouver (5.8) est donc identique à la formule (4.12) , qui est valable , car $\sigma - \sigma^* = sp(\gamma - \gamma^*)$ vérifie la condition (4.11) .

LEMME 5.2 . - On a

$$m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) + m(\lambda'_\infty, \lambda_\infty) = \ell \tag{5.8}$$

Preuve . - On substitue dans (4.4) à Inert . son expression (5.7) .

Le lemme que voici complète le lemme 5.1 :

LEMME 5.3 . - Toute fonction :

$$n : (\lambda_q, \lambda'_q) \mapsto n(\lambda_q, \lambda'_q) ,$$

- définie pour $\lambda_q, \lambda'_q \in \Lambda_q(\ell)$, λ et λ' transverses ,
- à valeurs dans un groupe abélien,
- localement constante sur son domaine de définition ,
- telle que, pour $\lambda, \lambda', \lambda''$ deux à deux transverses :

$$n(\lambda_q, \lambda'_q) - n(\lambda_q, \lambda''_q) + n(\lambda'_q, \lambda''_q) = 0 , \tag{5.9}$$

est identiquement nulle .

Preuve. - Vu (5.9) , n est constant au voisinage de tout couple (λ_q, λ'_q)

transverse ou non ; n est donc constant sur $\Lambda^2(\ell)$, qui est connexe ; vu (5.9) , sa valeur est 0 .

Voici prouvé le

THEOREME 5 . - 1°) L'indice de Maslov (Définitions 5.1 , 5.2 et 5.3) est la seule fonction

$$m : (\lambda_\infty , \lambda'_\infty) \mapsto m(\lambda_\infty , \lambda'_\infty) \in \mathbb{Z} ,$$

définie sur les couples transverses d'éléments de $\Lambda_\infty(\ell)$, localement constante et permettant de décomposer comme suit l'indice d'inertie :

(5.7) $$\operatorname{Inert}(\lambda, \lambda', \lambda'') = m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) - m(\lambda_\infty, \lambda''_\infty) + m(\lambda'_\infty, \lambda''_\infty) .$$

2°) Cette fonction possède les propriétés suivantes :

(5.8) $$m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) + m(\lambda'_\infty, \lambda_\infty) = \ell ;$$

(5.9) $$(\forall\, S \in Sp_\infty(\ell)) : m(S\lambda_\infty, S\lambda'_\infty) = m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) ;$$

(5.10) $$(\forall\, r , r' \in \mathbb{Z}) : m(\beta^r \lambda_\infty , \beta^{r'} \lambda'_\infty) = m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) + r - r' ;$$

(5.11) $$m(X^*_\infty , X_\infty) = 0 , \quad m(X_\infty , X^*_\infty) = \ell ,$$

compte-tenu de la définition 5.2.

Preuve de 1°) . - Les lemmes 5.1 et 5.3

Preuve de (5.8) . - Le lemme 5.2

Preuve de (5.9) et (5.10). - La définition 5.3 de m , (5.5) et (5.6) .

Preuve de (5.11). - La définition 5.3 de m et (5.4) ; (5.8) .

Note 5.1 . - La formule (5.7) implique évidemment ceci : si $\lambda , \lambda' , \lambda'' , \lambda'''$ sont quatre éléments de $\Lambda(\ell)$ deux à deux transverses, alors :

$$\operatorname{Im}(\lambda , \lambda' , \lambda'') - \operatorname{Im}(\lambda , \lambda' , \lambda''') + \operatorname{Im}(\lambda , \lambda'' , \lambda''') - \operatorname{Im}(\lambda' , \lambda'' , \lambda''') = 0$$

Note 5.2 . - Nommons base tout couple transverse $(\mu_\infty, \mu'_\infty) \in \Lambda^2_\infty(\ell)$ tel que

$$(\forall \lambda_\infty, \lambda'_\infty \in \Lambda_\infty(\ell)) : M[\lambda_\infty, \lambda'_\infty ; \mu_\infty, \mu'_\infty] = m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) .$$

Par exemple (X^*_∞, X_∞) est une base .

Vu la propriété additive (5.3) de M , la condition que $(\mu_\infty, \mu'_\infty)$ est une base s'énonce :

$$m(\mu_\infty, \mu'_\infty) = 0 .$$

6 . LE SAUT DE L'INDICE DE MASLOV $m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty)$ EN UN POINT (λ, λ') OÙ $\dim \lambda \cap \lambda' = 1$. - Maslov [ ] a défini son indice, à une constante additive près, par l'expression de son saut à la traversée de l'hypersurface $\sum_2{}_{\Lambda_\infty}$ de $\Lambda^2_\infty(\ell)$ qui est l'ensemble des couples $(\lambda_\infty, \lambda'_\infty)$ d'éléments non transverses de $\Lambda(\ell)$. Le théorème 7 va expliciter l'expression de ce saut .

Etablissons d'abord certaines propriétés de $U(\ell)$; γ désignera un arc différentiable de $U(\ell)$:

$$\gamma : [-1, 1] \ni \theta \mapsto u(\theta) \in U(\ell) ; u_\theta = \frac{du}{d\theta} \neq 0 .$$

LEMME 6.1 . - Soit $\exp(i\,\psi(\theta))$ une valeur propre simple de $u(\theta)$ et $z(\theta)$ un vecteur propre correspondant ; alors :

$$(6.1) \qquad \|z(\theta)\|^2 \psi_\theta = \left(\frac{1}{i} u^{-1}(\theta)\, u_\theta\, z(\theta) \mid z(\theta)\right)$$

Note 6.1 . - Rappelons que si U est un groupe de Lie, d'élément u , de transformations infinitésimales X_k et de formes de Maurer - Cartan ω_k , alors $u^{-1} du$ (donc, en particulier, $u^{-1} u_\theta$) a l'expression ;

$$u^{-1} du = \sum_k \omega_k(u, du)\, X_k ;$$

voir : E Cartan [ ] .

Note 6.2. - Puisque $U(\ell)$ est le groupe unitaire,

$\frac{1}{i} u^{-1} (\theta)\, u_\theta$ est une $\ell \times \ell$ matrice <u>self-adjointe</u> arbitraire, caractérisant le vecteur u_θ tangent en $u(\theta)$ à $U(\ell)$.

<u>Preuve</u> . - Tant que $\exp(i\,\psi(\theta))$ est valeur propre simple, $\psi(\theta)$ est une fonction différentiable de θ et le vecteur $z(\theta)$, qui est défini à un facteur scalaire près, peut être choisi fonction différentiable de θ ; alors la différentiation de la relation

$$u(\theta)\, z(\theta) = z(\theta) \exp(i\,\psi(\theta))$$

donne, après multiplication à gauche par $\frac{1}{i} u^{-1}(\theta)$:

$$\frac{1}{i} u^{-1} u_\theta\, z + \frac{1}{i} z_\theta = \frac{1}{i} u^{-1} z_\theta \exp(i\,\psi) + z(\theta)\, \psi_\theta\,.$$

Le produit scalaire par z élimine z_θ et donne (6.1) , car, puisque u est unitaire ,

$$(u^{-1} z_\theta \exp(i\psi) | z) = (z_\theta | \exp(-i\psi)\, u\, z) = (z_\theta \mid z)\,.$$

Notons Σ_U <u>l'ensemble des</u> $u \in U(\ell)$ <u>tels que</u> $(1) \in sp(u)$; rappelons que (1) désigne le point de $S^1 \subset \mathbb{C}$ d'affixe 1.

Le lemme suivant a pour seul rôle d'interpréter géométriquement une condition qu'emploiera le lemme 6.3.

LEMME 6.2. - Si $u(o) \in \Sigma_U$, si (1) est valeur simple de $sp\, u(o)$, si $z(o)$ est un vecteur propre correspondant, alors la condition que u_θ définisse une direction tangente à Σ_U en $u(o)$ s'énonce :

$$(6.2) \qquad \left(\frac{1}{i} u^{-1}(o)\, u_\theta(o)\, z(o) \mid z(o)\right) = 0\,.$$

<u>Preuve</u> . - $u(o)$ est point régulier de Σ_U ; vu le lemme 6.1, toute direction tangente en $u(o)$ à Σ_U vérifie (6.2); l'hyperplan des directions vérifiant (6.2) contient donc le plan tangent en $u(o)$ à Σ_U ; or Σ_U est une hypersurface de $U(\ell)$.

LEMME 6.3. - Si l'arc γ de $U(\ell)$ coupe Σ_U au seul point $u(o)$, si la valeur propre 1 de $u(o)$ est simple et si le vecteur propre correspondant $z(o)$ vérifie

$$\left(\frac{1}{i} u^{-1}(o)\, u_\theta\, z(o) \mid z(o)\right) \neq 0,$$

(c-à-d- si γ n'est pas tangent à Σ_U), alors :

$$\text{K.I.}\,[sp\,\gamma, (1)] = \text{signe}\left(\frac{1}{i} u^{-1}(o)\, u_\theta\, z(o) \mid z(o)\right). \tag{6.3}$$

Preuve. - Soit $\psi(\theta)$ la valeur propre de $u(\theta)$ voisine de (1) ; évidemment :

$$\text{K.I.}\,[sp\,\gamma, (1)] = \text{signe}\ \psi_\theta(o) \quad \text{si} \quad \psi_\theta(o) \neq 0;$$

(6.3) résulte donc de (6.1) .

Notations. - Σ_{Λ^2} désigne l'ensemble des (λ, λ') non transverses :

$\Sigma'_{\Lambda^2} \subset \Lambda^2(\ell)$;

Γ désigne un arc différentiable de $\Lambda^2(\ell)$:

$$[-1, 1] \ni \theta \mapsto (\lambda(\theta), \lambda'(\theta)) \in \Lambda^2(\ell).$$

$w(\theta)$ et $w'(\theta)$ désignent les images naturelles dans $W(\ell)$ de $\lambda(\theta)$ et $\lambda'(\theta) \in \Lambda^2(\ell)$: voir (2.3) .

LEMME 6.4. - Si l'arc Γ de $\Lambda^2(\ell)$ coupe Σ_{Λ^2} au seul point $(\lambda(o), \lambda'(o))$ et si

$$\dim \lambda(o) \cap \lambda'(o) = 1, \ z(o) \in \lambda(o) \cap \lambda'(o),$$

$$\left(\frac{1}{i} w_\theta\, w^{-1}(o)\, z(o) \mid z(o)\right) \neq \left(\frac{1}{i} w'_\theta\, w'^{-1}(o)\, z(o) \mid z(o)\right),$$

alors :

$$\text{K.I.}\,[sp\,\Gamma, (1)] = \text{signe}\left\{\left(\frac{1}{i} w_\theta\, w^{-1}(o)\, z(o) \mid z(o)\right) - \left(\frac{1}{2} w'_\theta\, w'^{-1}(o)\, z(o) \mid z(o)\right)\right\} \tag{6.4}$$

Preuve . - L'arc Γ de $\Lambda^2(\ell)$ a pour image l'arc de $U(\ell)$

$$\gamma : [-1, 1] \ni \theta \longmapsto u(\theta) = w(\theta)\, w'^{-1}(\theta) ;$$

par définition :

$$\text{K.I.}\, [sp\,\Gamma, (1)] = \text{K.I.}\, [sp\,\gamma, (1)] .$$

Vu le 3°) du lemme 2.1, γ coupe $\sum_U$ au seul point $\theta = 0$, 1 est valeur simple de $sp\,u(0)$; vu le 2°) du lemme 2.1 :

$$z(0) + w(0)\,\overline{z(0)} = 0 , \; z(0) + w'(0)\,\overline{z(0)} = 0 ;$$

donc :

$$z(0) = u(0)\, z(0) ;$$

or :

$$u^{-1} u_\theta = u^{-1} w_\theta w^{-1} u - w'_\theta w'^{-1} ;$$

donc, puisque u est unitaire :

$$(u^{-1}(0)\, u_\theta\, z(0) \mid z(0)) = (w_\theta w^{-1}(0)\, z(0) | z(0)) - (w'_\theta w'^{-1}(0) z(0) | z(0))$$

donc, vu le lemme 6.3 :

$$\text{K.I.}\,[sp\,\gamma, (1)] = \text{signe}\, \{ (\tfrac{1}{i} w_\theta\, w^{-1}(0) z(0) | z(0)) - (\tfrac{1}{i} w'_\theta\, w'^{-1}(0) z(0) | z(0)) \}$$

D'où (6.4).

LEMME 6.5. - Soient

$$\theta \longmapsto \lambda(\theta) , \; \theta \longmapsto z(\theta)$$

des applications différentiables de $[-1, 1]$ dans $\Lambda(\ell)$ et $Z(\ell)$, telles que :

$$z(\theta) \in \lambda(\theta) ;$$

alors :

$$(\tfrac{1}{2i}\, w_\theta\, w^{-1} z | z) = [z_\theta , z(\theta)] . \qquad (6.5)$$

Preuve . - Vu le 2°) du lemme 2.1 :

$$z + w\,\bar{z} = o\ ;$$

donc :

$$z_\theta + w_\theta\,\bar{z} + w\,\bar{z}_\theta = o\ ;$$

donc :

$$(z_\theta \mid z) - (w_\theta\, w^{-1} z \mid z) + (w\,\bar{z}_\theta \mid z) = o\ ,$$

où :

$$(w\,\bar{z}_\theta \mid z) = (\bar{z}_\theta \mid w^{-1} z) = -(\bar{z}_\theta \mid \bar{z}) = -\overline{(z_\theta \mid z)}\ ;$$

d'où (6.5), vu (1.1).

Le premier membre de (6.4) s'exprime au moyen de l'indice de Maslov, vu (5.2) et la déf. 5.3 ; le second membre de (6.4) s'exprime au moyen de la forme symplectique $[\cdot\,,\cdot]$, vu le lemme 6.5 ; d'où :

LEMME 6.6. - Avec les notations du lemme 6.4

(6.6) $$m\,(\lambda_\infty(1)\,,\,\lambda'_\infty(1)) - m\,(\lambda_\infty(-1)\,,\,\lambda'_\infty(-1)) =$$

$$\text{signe}\,\left\{\frac{d}{d\theta}\,[\,z(\theta)\,,\,z'(\theta)\,]\right\}_{\theta = o} \qquad \text{si } \{\ldots\}_{\theta = o} \neq o$$

Ce lemme 6.6 a pour conséquence évidente le théorème suivant, qui permet d'établir le théorème 3.2 du § 3 :

THEOREME 6. - Choisissons $(\lambda_\infty\,,\lambda'_\infty)$ voisin d'un point de $\Sigma^2_{\Lambda_\infty}$ où $\dim \lambda \cap \lambda' = 1$. Définissons deux applications différentiables

(6.7) $$\lambda_\infty \mapsto z \in Z\,(\ell)\,,\ \lambda'_\infty \mapsto z' \in Z\,(\ell)$$

telles que :

$$z \in \lambda\ ;\ z' \in \lambda'\ ;\ z = z' \in \lambda \cap \lambda' \quad \text{quand} \quad (\lambda_\infty, \lambda'_\infty) \in \Sigma^2_{\Lambda_\infty}\ ;$$

la fonction

$$(\lambda_\infty\,,\lambda'_\infty) \mapsto [\,z\,,\,z'\,] \in \mathbb{R}$$

ne s'annule que sur $\Sigma^2_{\Lambda_\infty}$ et s'y annule une seule fois.

Alors il existe une constante $c \in \mathbb{Z}$ telle que :

(6.8) $$m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) = c \quad \text{pour} \quad [z, z'] < 0 ,$$
$$= 1 + c \; \text{pour} \quad [z, z'] > 0 .$$

7. L'INDICE DE MASLOV SUR $Sp_\infty(\ell)$; L'INERTIE MIXTE . - Soient

(7.1) $$S, S', S'' \in Sp_\infty(\ell) \setminus \Sigma_{Sp_\infty} \quad \text{tels que} \quad S\,S'\,S'' = E \quad (\text{élément neutre}) ;$$

soient s, s', s'' leurs projections sur $Sp(\ell)$. La formule (4.7) du théorème 4.1, qui relie les définitions de l'inertie sur $\Lambda(\ell)$ et $Sp(\ell)$, et la formule (5.7) du théorème 5, qui relie l'inertie sur $\Lambda(\ell)$ à l'indice de Maslov, donnent, vu la propriété d'invariance de l'indice de Maslov (5.9) :

$$\text{Inert}(s, s', s'') = m(S X^*_\infty, X^*_\infty) - m(S'^{-1} X^*_\infty, X^*_\infty) + m(S'' X^*_\infty, X^*_\infty) .$$

Donnons à cette formule l'expression (7.3), grâce à la définition suivante :

Définition 7.1 : L'indice de Maslov sur $Sp_\infty(\ell)$. - Si $S \in Sp_\infty(\ell) \setminus \Sigma_{Sp_\infty}$, définissons :

(7.2) $$m(S) = m(S X^*_\infty, X^*_\infty) .$$

Cette définition a un sens, vu la Note 4.1 : $S \notin \Sigma_{Sp_\infty}$ équivaut à la condition que $S X^*$ et X^* sont transverses .

Complétons cette formule par le lemme, analogue au lemme 5.3 :

LEMME 7 . - Toute fonction

$$n : S \mapsto n(S)$$

- définie pour $S \in Sp_q(\ell) \setminus \Sigma_{Sp_q}$,
- à valeurs dans un groupe abélien ,
- localement constante sur son domaine de définition ,
- telle que :

$$n(S) - n(S'^{-1}) + n(S'') = 0 \quad \text{quand} \quad S\,S'\,S'' = E\,,$$

est identiquement nulle

Ce lemme, le théorème 5 et (3.12) donnent :

THEOREME 7.1. - 1°) <u>L'indice de Maslov, que définit</u> (7.2), <u>est la seule fonction</u>

$$m : Sp_\infty(\ell) \setminus \sum_{Sp_\infty} \to Z\,,$$

<u>localement constante, permettant de décomposer comme suit l'indice d'inertie</u> : <u>sous l'hypothèse</u> (7.1),

(7.3) $$\text{Inert}\,(s, s', s'') = m(S) - m(S'^{-1}) + m(S'')\,.$$

2°) <u>Cette fonction possède les propriétés suivantes</u> :

(7.4) $$m(S) + m(S^{-1}) = \ell\,;$$

α <u>étant le générateur de</u> $\pi_1\,[Sp(\ell)]$ (Définition 3),

(7.5) $$m(\alpha^r S) = m(S) + 2r\,.$$

<u>Définition</u> 7.2 : <u>L'inertie mixte</u>. - Soient :

(7.6) $$s \in Sp(\ell) \setminus \sum_{Sp}\,;\ \lambda \ \text{et}\ \lambda' \in \Lambda(\ell), \text{transverses à } X^* \text{et tels que } \lambda = s\lambda'$$

l'inertie mixte est définie par la formule suivante, dont les deux derniers termes sont égaux vu l'invariance (4.5) de l'inertie :

(7.7) $$\text{Inert}\,(s, \lambda, \lambda') = \text{Inert}\,(sX^*, X^*, \lambda) = \text{Inert}\,(X^*, s^{-1}X^*, \lambda')\,.$$

Evidemment :

THEOREME 7.2. - <u>On a, sous l'hypothèse</u> (7.6) :

(7.8) $$\text{Inert}\,(s^{-1}, \lambda', \lambda) = \ell - \text{Inert}\,(s, \lambda, \lambda')\,,$$

(7.9) $$\text{Inert}\,(s, \lambda, \lambda') = m(S) - m(\lambda_\infty, X^*_\infty) + m(\lambda'_\infty, X^*_\infty)\,,$$

<u>si</u> $\lambda_\infty = S\,\lambda'_\infty$ <u>et si</u> s <u>est la projection de</u> S.

<u>Exprimons l'inertie mixte par l'inertie d'une forme quadratique</u>, comme l'a été Inert (s, s', s'') (§ 1, Définition 2.4) et Inert $(\lambda, \lambda', \lambda'')$ (§ 2, n° 4) ; le n° 9 emploiera ce résultat.

THEOREME 7.3. - <u>Sous l'hypothèse</u> (7.6) <u>on a</u> $s = s_A$ (§ 1, n° 1) <u>et l'équation de</u> λ' <u>est, vu</u> (2.5) : $\lambda' : p' = \varphi'_{x'}(x')$ <u>où</u> φ' <u>est une forme quadratique sur</u> X.

<u>Alors</u> :

$$\text{(7.10)} \qquad \text{Inert}\,(s, \lambda, \lambda') = \text{Inert}\,(A(o, .) + \varphi'(.))$$

<u>Preuve</u>. - Vu (7.7) et la définition d'Inert $(\lambda, \lambda', \lambda'')$ (§ 2, n° 4),

$$\text{Inert}\,(s, \lambda, \lambda') = \text{Inert}\,(X^*, s^{-1} X^*, \lambda')$$

est l'inertie de la forme quadratique

$$x' \mapsto [z, z']$$

pour $z = (x, p)$, $z' = (x', p')$,

$$\text{(7.11)} \qquad (x, p) \in X^*, \; s\,(x', p') \in X^*, (x+x', p+p') \in \lambda' ;$$

les relations (7.11) s'écrivent :

$$x = o, \; p' = -A_{x'}(o, x'), \; p+p' = \varphi'_{x'}(x+x') ;$$

d'où :

$$x = o, \; p = A_{x'}(o, x') + \varphi'_{x'}(x'),$$

ce qui implique :

$$[z, z'] = \langle p, x' \rangle = 2\,A(o, x') + 2\,\varphi'(x'),$$

donc (7.10).

8. INDICES DE MASLOV SUR $\Lambda_q(\ell)$ ET $Sp_q(\ell)$. - Notons λ_q et $\lambda'_q \in \Lambda_q(\ell)$, $S \in Sp_q(\ell)$ les projections de λ_∞ et $\lambda'_\infty \in \Lambda_\infty(\ell)$, $S_\infty \in Sp_\infty(\ell)$. Vu (5.10) et (7.5), où α et β sont les générateurs de $\pi_1[Sp(\ell)]$ et $\pi_1[\Lambda(\ell)]$, les relations

$$\text{(8.1)} \qquad m(\lambda_q, \lambda'_q) = m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) \bmod. q ; \; m(S) = m(S_\infty) \bmod. 2q$$

définissent des fonctions m ; elles seront encore appelées <u>indices de Maslov</u> ; elles ont évidemment les propriétés suivantes, vu les théorèmes 5 , 7.1 , 7.2 et les lemmes 5.3 et 7 :

THEOREME 8 . - 1°) <u>L'indice de Maslov que définit</u> $(8.1)_1$ <u>est la seule fonction</u>

$$m : (\lambda_q , \lambda'_q) \mapsto m(\lambda_q , \lambda'_q) \in \mathbb{Z}_q$$

<u>définie sur les couples transverses d'éléments de</u> $\Lambda_q(\ell)$, <u>localement constante et permettant de décomposer comme suit l'indice d'inertie</u> :

$$(8.2) \qquad \mathrm{Inert}\,(\lambda_q , \lambda'_q , \lambda''_q) = m(\lambda_q , \lambda'_q) - m(\lambda_q , \lambda''_q) + m(\lambda'_q , \lambda''_q) \bmod. q.$$

2°) <u>L'indice de Maslov que définit</u> $(8.1)_2$ <u>est la seule fonction</u>

$$m : Sp_q(\ell) \setminus \sum_{Sp_q} \to Z_{2q}$$

<u>localement constante et permettant de décomposer comme suit l'indice d'inertie</u> :

$$(8.3) \qquad \mathrm{Inert}\,(s , s' , s'') = m(S) - m(S'^{-1}) + m(S'') \bmod. 2q.$$

3°) <u>Ces fonctions possèdent les propriétés suivantes</u> :

$$(8.4) \qquad m(\lambda_q , \lambda'_q) + m(\lambda'_q , \lambda_q) = \ell \bmod. q ; \; m(S) + m(S^{-1}) = \ell \bmod. 2q ;$$

$$(8.5) \qquad \mathrm{Inert}\,(s , \lambda , \lambda') = m(S) - m(\lambda_{2q} , X^*_{2q}) + m(\lambda'_{2q} , X^*_{2q}) \bmod. 2q ,$$

si $S \in Sp_q , \lambda_{2q} = S\lambda'_{2q}$; rappelons que $Sp_q(\ell)$ opère sur $\Lambda_{2q}(\ell)$.

Vu le 3°) du théorème 2 du § 1 , le 1°) du théorème 8 identifie, pour $q = 2$:

i) l'indice de Maslov que la formule (2.15) du § 1 définit sur $Sp_2(\ell)$ mod. 4 ;

ii) l'indice de Maslov que (7.2) et (8.2) définissent sur $Sp_q(\ell)$ mod. $2q$.

<u>Définition</u> 8 . - Etant donné $A \in \mathbb{A}$ (Définition 1.2 du § 1) , définissons $S_A \in Sp_q(\ell) \setminus \sum_{Sp_q}$, cette définition s'identifiant à celle du § 1 pour $q = 2$.

Vu la formule (2.15) du § 1 :

$$m(s_A) = m(A) \mod. 2 .$$

Vu (7.5), il existe donc un seul élément de $Sp_q \backslash \Sigma_{Sp_q}$ que <u>nous noterons</u> S_A, tel que :

(8.6) $\qquad s_A$ soit sa projection sur $Sp(\ell)$; $m(S_A) = m(A) \mod. 2q$.

L'application :

$$\mathbb{A} \ni A \mapsto S_A \in Sp_q \backslash \Sigma_{Sp_q}$$

est évidemment surjective et, si $q = \infty$, bijective.

Si $q \neq \infty$, la condition

$$S_A = S_{A'}$$

équivaut à la suivante :

$$(\forall\, x, x' \in X) \quad A(x, x') = A'(x, x') \quad ; \; m(A) = m(A') \mod 2q .$$

9. VARIETES LAGRANGIENNES. - Une <u>variété lagrangienne</u> V de $Z(\ell)$ est une variété sur laquelle :

(9.1) $\qquad d \langle p, dx \rangle = 0$; c'-à-d. $\sum_j dp_j \wedge dx^j = 0$; c'-à-d. $d[z, dz] = 0$;

son plan tangent est lagrangien ; elle est donc de dimension $\leqq \ell$; nous choisirons :

$$\dim V = \ell .$$

Notons $\check{V}$ le revêtement universel de V ; (9.1) signifie évidemment qu'existent des fonctions, définies à des constantes additives près,

$$\varphi : \check{V} \to \mathbb{R} \; ; \; \psi : \check{V} \to \mathbb{R}$$

telles que :

(9.2) $\qquad d\varphi = \langle p, dx \rangle$; $\psi(x, p) = \varphi(x, p) - \frac{1}{2} \langle p, x \rangle$, $d\psi = \frac{1}{2}[z, dz]$;

φ est la <u>phase</u> de V ; ψ <u>sa phase lagrangienne</u>.

Le ℓ-plan $\lambda(z)$ tangent à V en $z = (x, p) \in V$ est évidemment lagrangien. Le <u>contour apparent</u> $\sum_V$ de V est l'ensemble des $z \in V$ tels que $\lambda(z)$ ne soit pas transverse à X^*. Sur $V \setminus \sum_V$ et sur ses ℓ-plans tangents, x peut servir de <u>coordonnée locale</u> ; les équations de V et de ses ℓ-plans tangents $\lambda(z)$ sont alors, vu (9.2) :

$$(9.3) \qquad V : p = \varphi_x(x) \; ; \; \lambda(z) : d p_j = \sum_{k=1}^{\ell} \varphi_{x^j x^k} \, dx^k .$$

Tout élément de $Sp(\ell)$

$$s : Z(\ell) \ni z' \mapsto s z' = z \in Z(\ell)$$

transforme toute variété lagrangienne V' de $Z(\ell)$ en une variété lagrangienne V de $Z(\ell)$, dont la phase lagrangienne vaut :

$$\psi(z) = \psi'(z') + \text{const.} \quad \text{pour} \quad z = s z' \; ;$$

si $z = (x, p)$ et $z' = (x', p')$, les phases φ et φ' de V et V' sont donc liées par la relation

$$(9.4) \qquad \varphi(x) - \frac{1}{2} < p, x > = \varphi'(x') - \frac{1}{2} < p', x' > + \text{const.} :$$

si $s = s_A \notin \sum_{Sp(\ell)}$, alors $p = A_x$, $p' = - A_{x'}$ et l'on a donc :

$$(9.5) \qquad \varphi(x) = \varphi'(x') + A(x, x') + \text{const.}, \; p = \varphi_x = A_x, \; p' = \varphi'_{x'} = - A_{x'} .$$

LEMME 9. - Soit $s_A \in Sp(\ell) \setminus \sum_{Sp}$; soit $z' = (x', p') \in V' \setminus \sum_{V'}$ tel que

$$s_A z' = z = (x, p) \in V \setminus \sum_V, \text{ où } V = s_A V' .$$

Ces relations définissent évidemment un difféomorphisme $x' \mapsto x$ des coordonnées locales de V et V'. Son déterminant fonctionnel a l'expression :

$$(9.6) \qquad \frac{d^\ell x}{d^\ell x'} = \frac{\text{Hess}_{x'} [A(x, x') + \varphi'(x')]}{\Delta^2(A)} .$$

(Dans le calcul de $\mathrm{Hess}_{x'}$, x et x' sont considérés comme indépendants)

Preuve. Vu § 1, (1.11) et l'équation (9.5) de V', on a :

$$p' = -A_{x'}(x, x') \quad , \quad p' = \varphi'_{x'}(x') .$$

Le difféomorphisme $x' \mapsto x$ vérifie donc

$$\varphi'_{x'}(x') + A_{x'}(x, x') = 0 ;$$

d'où (9.6), puisque le § 1, n° 1 a noté

$$\Delta^2(A) = \det_{jk}(-A_{x^j x'^k}) .$$

10. q - ORIENTATION. ($q = 1, 2, \ldots, \infty$). - Les notions qu'a définies ce § 2 permettent d'apporter à la formule (9.6) un complément, qu'énonce le théorème 10 et qui sera essentiel.

Nommons q - orientation de $\lambda \in \Lambda(\ell)$ le choix de l'un des $\lambda_{2q} \in \Lambda_{2q}(\ell)$ de projection naturelle λ.

Notons V_q et nommons variété lagrangienne q - orientée la donnée d'une variété lagrangienne V et d'une application continue

$$V \ni z \mapsto \lambda_{2q}(z) \in \Lambda_{2q}(\ell)$$

qui, composée avec l'application naturelle

$$\Lambda_{2q}(\ell) \to \Lambda(\ell) ,$$

soit l'application

$$V \ni \mapsto \lambda(z) \in \lambda(\ell) , \text{ où } \lambda(z) \text{ est le } \ell\text{-plan tangent à } V \text{ en } z .$$

Tout élément de $Sp_q(\ell)$ transforme une variété lagrangienne q-orientée V_q en une autre.

Une q-orientation de V est caractérisée par les valeurs prises par la fonction localement constante :

$$V \setminus \Sigma_V \ni z \to m(X^*_{2q}, \lambda_{2q}) \in Z_{2q}.$$

Vu (5.10), un changement de cette q-orientation équivaut à l'addition à cette fonction m et une constante $\in Z_{2q}$.

L'énoncé du théorème 10 sera facilité par la

<u>Définition</u> 10. - L'argument de $d^\ell x$ est défini, en un point de $V_q \setminus \Sigma_V$, dont le ℓ-plan tangent est $\lambda_{2q} \in \Lambda_{2q}(\ell)$, par la formule :

(10.1) $$\arg d^\ell x = \pi\, m(X^*_{2q}, \lambda_{2q}) \mod. 2q\pi.$$

<u>Par exemple</u>, vu (5.11) :

(10.2) $$\arg d^\ell x = o \quad \text{sur} \quad X_{2q}.$$

Soient :

$$S_A \in Sp_q(\ell) \setminus \Sigma_{Sp_q} \qquad \text{(Définition 8)};$$

V'_q une variété lagrangienne q-orientée de $Z(\ell)$;

$$V_q = S_A V'_q.$$

Soient λ'_{2q} et λ_{2q} les plans-tangents à V'_q et V_q en z' et $z = s_A z'$. Dans la formule (8.5), où nous faisons $S = S_A$ et $s = s_A$, nous avons vu (8.6) et la définition 1.2 du § 1 :

$$m(S) = m(A) = \frac{2}{\pi} \arg(\Delta(A));$$

vu le théorème 7.3 et l'équation (9.3) de λ',

Inert $(s_A , \lambda , \lambda')$ est l'inertie de la matrice symétrique

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^j \partial x'^k} \left[A(x, x') + \varphi'(x') \right] \right) :$$

vu la définition 2.3 du § 1 de arg. Hess. , c'est donc :

$$\frac{1}{\pi} \arg \operatorname{Hess}_{x'} \left[A(x, x') + \varphi'(x') \right] .$$

La formule (8.5)s'écrit donc, vu (8.4) :

$$m(X^*_{2q} , \lambda_{2q}) - m(X^*_{2q} , \lambda'_{2q}) = \frac{1}{\pi} \arg \operatorname{Hess}_{x'} [A + \varphi'] - \frac{1}{\pi} \arg \Delta^2 (a) \bmod. 2q .$$

D'où, vu (10.1), le

THEOREME 10. - <u>Si</u> V_q <u>et</u> V'_q <u>sont deux variétés lagrangiennes</u> q - <u>orientées telles que</u>

$$V_q = S_A V'_q \text{ , où } S_A \in Sp_q(\ell) \setminus \Sigma_{Sp_q} ,$$

<u>alors, non seulement les deux membres de</u> (9.6') <u>sont égaux, mais aussi leurs arguments</u> mod. $2q\pi$. (<u>cf. Définition 10</u>).

C'est le cas particulier : $q = 2$ de ce théorème que nous emploierons (cf. § 3, Corollaire 3) .

§ 3. Espaces symplectiques

0. INTRODUCTION . - Le chapitre II emploiera les énoncés, en géométrie symplectiques, des résultats précédents.

$Z(\ell)$ est muni d'une structure symplectique et, en outre , d'un repère particulier, constitué par un couple (X, X^*) de ℓ-plans lagrangiens transverses. Il importe d'énoncer des conclusions indépendantes de ce choix d'un repère particulier.

1. UN ESPACE SYMPLECTIQUE Z est constitué par $R^{2\ell}$ et une forme symplectique, c'est-à-dire bilinéaire, alternée, à valeurs réelles, non dégénérée :

$$[\cdot\,,\cdot] : R^{2\ell} \times R^{2\ell} \ni (z, z') \mapsto [z, z'] \in R .$$

On a donc :

$$[z, z'] = -[z', z] ;$$

$[z, z'] = o$ pour z donné et tout $z' \in R^{2\ell}$ seulement si $z = o$.

$Z(\ell)$ possède donc une structure symplectique ; l'isomorphie des structures symplectiques de Z et $Z(\ell)$ est évidente et a les conséquences suivantes .

Nommons lagrangiens les sous-espaces de Z sur lesquels $[\cdot\,,\cdot]$ s'annule identiquement ; leur dimension est $\leqq \ell$;

nommons grassmannnienne lagrangienne $\Lambda(Z)$ de Z l'ensemble de ses ℓ-plans lagrangien $\Lambda(Z)$ est homéomorphe à $\Lambda(\ell)$ et possède donc un revêtement unique $\Lambda_q(Z)$ d'ordre $q \in \{1, 2, .., \infty\}$.

La projection de $\lambda_q \in \Lambda_q(Z)$ dans $\Lambda(Z)$ sur notée λ . La définition suivante (cf. § 2, n°4) a un sens dans Z .

Définition. - Soient $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \Lambda(Z)$, deux à deux transverses. Inert $(\lambda, \lambda', \lambda'')$ est l'indice d'inertie de la forme quadratique non dégénérée

(1.1) $$z \mapsto [z , z'] = [z' , z''] = [z'' , z] ,$$

où $$z \in \lambda , z' \in \lambda' , z'' \in \lambda'' , \lambda + \lambda' + \lambda'' = 0 .$$

Evidemment : ses valeurs appartiennent à $\{0, 1, .., \ell\}$:

(1.2) $$\mathrm{Inert}\,(\lambda , \lambda' , \lambda'') = \mathrm{Inert}\,(\lambda' , \lambda'' , \lambda) = \ell - \mathrm{Inert}\,(\lambda , \lambda'' , \lambda') .$$

Notons $\sum_{\Lambda_q^2} \subset \Lambda_q^2\,(Z)$ l'ensemble des couples d'éléments non transverses de $\Lambda_q\,(Z)$.

Vu le théorème 8 et (8.1) :

THEOREME 1. - <u>Pour chaque</u> $q \in \{1, 2, ..., \infty\}$, il existe une fonction unique,

$$m : \Lambda_q^2\,(Z) \setminus \sum_{\Lambda_q^2} \to \mathbb{Z}_q ,$$

<u>appelée indice de Maslov, qui soit localement constante sur son domaine de définition et qui vérifie</u> :

(1.3) $$\mathrm{Inert}\,(\lambda , \lambda' , \lambda'') = m\,(\lambda_q , \lambda'_q) - m\,(\lambda_q , \lambda''_q) + m\,(\lambda'_q , \lambda''_q) \mod. q .$$

<u>Elle possède les propriétés suivantes</u> :

(1.4) $$m\,(\lambda_q , \lambda'_q) + m\,(\lambda'_q , \lambda_q) = \ell \mod. q ;$$

(1.5) $$m\,(\lambda_q , \lambda'_q) = m\,(\lambda_\infty , \lambda'_\infty) \mod. q ;$$

Le théorème 6 du § 2 s'applique au saut de cet indice de Maslov à travers $\sum_{\Lambda_q^2}$.

Une variété lagrangienne V de Z est une variété de dimension ℓ sur laquelle

(1.6) $$d\,[z , dz] = 0 ,$$

c'est-à-dire, sur le revêtement universel $\check{V}$ de laquelle existe une fonction, appelée <u>phase lagrangienne</u> :

(1.7) $$\psi : \check{V} \to \mathbb{R} \text{ telle que } d\,\psi = \frac{1}{2}\,[z , dz] ;$$

elle est définie à une constante additive près.

2. LES REPERES DE Z. – Un <u>repère</u> de Z est un isomorphisme

$$R : Z \to Z(\ell) \tag{2.1}$$

respectant $[\cdot,\cdot]$. Si R et R' sont deux tels repères, on nomme $R R'^{-1}$ <u>changement de repère</u> :

$$R R'^{-1} \in Sp(\ell) . \tag{2.2}$$

Evidemment, si $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \Lambda(Z)$, alors $R\lambda, R\lambda', R\lambda'' \in \Lambda(\ell)$ et

$$\mathrm{Inert}(\lambda, \lambda', \lambda'') = \mathrm{Inert}(R\lambda, R\lambda', R\lambda'') . \tag{2.3}$$

Si V est une variété lagrangienne de Z, RV est une variété lagrangienne de $Z(\ell)$ dont la phase φ_R vaut :

$$\varphi_R(z) = \psi(z) + \frac{1}{2} \langle p, x \rangle, \text{ où } Rz = (x, p) \in X \oplus X^* = Z(\ell) . \tag{2.4}$$

On nomme <u>contour apparent de</u> V <u>relativement au repère</u> R l'ensemble $\sum_R$ des points de V dont le ℓ-plan tangent n'est pas transverse à $R^{-1} X^*$.

Sur $V \setminus \sum_R$, x peut servir de coordonnée locale.

Vu le lemme 9 du § 2 :

THEOREME 2. – <u>Soient</u> x <u>et</u> x' <u>les coordonnées locales définies sur</u> $V \setminus (\sum_R \cup \sum_{R'})$ <u>par deux repères</u> R <u>et</u> R' <u>tels que</u> $R R'^{-1} \in Sp(\ell) \setminus \sum_{Sp}$; <u>il existe donc</u> A (§ 1, n° 2) <u>tel que</u> $s_A = R R'^{-1}$; <u>notons</u> $\varphi'(x') = \varphi_{R'}(z)$ <u>la phase de</u> $R'V$. <u>Alors le difféomorphisme local</u> $X \ni x' \mapsto x \in X$ <u>a pour déterminant fonctionnel</u>

$$\frac{d^\ell x}{d^\ell x'} = \frac{\mathrm{Hess}_{x'}[A(x,x') + \varphi'(x')]}{\Delta^2(A)} . \tag{2.5}$$

(Dans le calcul de $\mathrm{Hess}_{x'}$, x et x' sont considérés comme indépendants)

<u>Note</u> 2. – Les repères que nous venons définir ne permettent pas de repérer les q-orientations, si $q > 1$.

3. LES q-REPERES DE Z le permettent : chaque q-repère $(q \in \{1, 2, .., \infty\})$ est constitué par

i) un isomorphisme $j_R : Z \to Z(\ell)$ respectant $[.,.]$;

ii) un homéomorphisme $h_R : \Lambda_{2q}(Z) \to \Lambda_{2q}(\ell)$ ayant pour image naturelle l'homéomorphisme $\Lambda(Z) \to \Lambda(\ell)$ induit par j_R.

Si R et R' sont deux tels repères, le changement de repère $R R'^{-1}$ est donc constitué par :

i) $$s = j_R \, j_{R'}^{-1} \in Sp(\ell) ;$$

ii) $H = h_R \, h_{R'}^{-1}$, homéomorphisme de $\Lambda_{2q}(\ell)$ ayant pour image naturelle l'homéomorphisme de $\Lambda_2(\ell)$ qu'induit s. (cf. § 2, exemple 3.1).

Pour définir H, connaissant s, il suffit de donner $H X_{2q}^* \in \Lambda_{2q}(\ell)$ de projection $s X_2^* \in X_2^*$.

Il existe q éléments de $Sp_q(\ell)$ d'image $s \in Sp(\ell)$; ils transforment X_{2q}^* en les q éléments de $\Lambda_{2q}(\ell)$ d'image $s X_2^* \in \Lambda_2(\ell)$, vu § 2, (3.12).

L'élément unique $S \in Sp_q(\ell)$, d'image $s \in Sp(\ell)$ et tel que $S X_{2q}^* = H X_{2q}^*$, induit donc l'homéomorphisme H de $\Lambda_{2q}(\ell)$. Il caractérise $R R'^{-1}$, que nous noterons donc S :

$$R R'^{-1} \in Sp_q(\ell). \tag{3.1}$$

R désignera indifféremment j_R ou h_R ; nous écrirons

$$R : Z \ni z \mapsto R z = (x, p) \in X \oplus X^* = Z(\ell) ;$$

$$R : \Lambda_{2q}(Z) \ni \lambda_{2q} \mapsto R \lambda_{2q} \in \Lambda_{2q}(\ell) .$$

Evidemment :

$$\forall \lambda_{2q}, \lambda'_{2q} \in \Lambda_{2q}(Z), m(\lambda_{2q}, \lambda'_{2q}) = m(R\lambda_{2q}, R\lambda'_{2q}) \mod. 2q. \tag{3.2}$$

R transforme une variété lagrangienne q-orientée V de Z en une autre de

$Z\,(\ell)$; si $\lambda_{2q} \in \Lambda_{2q}\,(Z)$ est le plan tangent à V en z , nous définirons :

$$(3.3) \qquad m_R\,(z) = m\,(R^{-1}\,X^*_{2q}\,,\lambda_{2q}) \in \mathbb{Z}_{2q}\,.$$

x étant la coordonnée locale de V (q - orientée) , définie par le q - repère R , nous définirons

$$(3.4) \qquad \arg d^{\ell} x = \pi\, m_R\,(z) \mod. 2\,q\,\pi\,.$$

Exemple 3.1 . - Sur $R^{-1}\,X_{2q}$, $\arg d^{\ell} x = o \mod 2\,q\,\pi$, vu § 2 , (10.2) .

Le théorème 10 du § 2 permet évidemment de compléter comme suit le théorème 2.

THEOREME 3.1. - Dans l'énoncé du théorème 2, supposons que $V = V_q$ soit q - orientée et que R et R' soient des q - repères. Alors :

$$(3.5) \qquad R\,R'^{-1} = S_A \in Sp_q\,(\ell)$$

et les arguments des deux membres de (2.5) sont égaux mod. $2\,q\,\pi$.

Rappelons que le § 1 a donné les définitions 1.2 et 2.3 de $\arg \Delta\,(A)$ et arg Hess ; vu le § 2, (8.6) :

$$m\,(A) = m\,(S_A) \mod 2\,q\,.$$

C'est le cas particulier suivant de ce théorème qu'emploiera le ch. II, § 1, preuve des théorèmes 4 , iii) :

COROLLAIRE 3 . - Si $q = 2$, la demi-mesure $[d^{\ell}x]^{\frac{1}{2}}$ de V_2, variété lagrangienne 2 - orientée, est définie par :

$$(3.6) \qquad \arg\,[d^{\ell}x]^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}\, m_R\,(z) \mod 2\pi\,;$$

on a :

$$(3.7) \qquad [d^{\ell}x]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta(A)}\,\{\mathrm{Hess}_{x'}\,[A(x\,,x') + \varphi'\,(x')\,]\}^{\frac{1}{2}}\,[d^{\ell}x']^{\frac{1}{2}}\,.$$

Au voisinage d'un point de Σ_R où $\dim\,\lambda \cap R^{-1}X^* = 1$, $m_R\,(z)$ a l'expression suivante, qui résulte du théorème 7, § 2 :

THEOREME 3.2 . - Soit $\lambda\,(z)$ le ℓ - plan tangent en z à la variété lagrangienne

V ; $z \in \sum_R$ <u>signifie</u> :

$$\dim \lambda \cap R^{-1} X^* > 0 ;$$

<u>restons au voisinage d'un point de</u> $\sum_R$ <u>en lequel</u>

$$\dim \lambda \cap R^{-1} X^* = 1 ;$$

<u>la projection parallèle à</u> X^* <u>de</u> $R\lambda(z)$ <u>sur</u> X <u>est donc, pour</u> $z \in \sum_R$, <u>un hyperplan</u> :

$$(3.8) \qquad \sum_{j=1}^{\ell} c_j \, dx^j = 0 .$$

1°) <u>Il existe alors une mesure régulière</u> $\bar{\omega}$ <u>de</u> V <u>telle que, pour</u> $z \in \sum_R$, <u>pour tout</u> j <u>et tout</u> k :

$$(3.9) \qquad dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{j-1} \wedge dp_k \wedge dx^{j+1} \wedge \ldots \wedge dx^{\ell} = c_j \, c_k \, \bar{\omega} .$$

2°) <u>Si</u> $V = V_q$ <u>est</u> q-<u>orientée, il existe une constante</u> $c \in Z_{2q}$ <u>telle que</u> :

$$(3.10) \qquad \begin{aligned} m_R(z) &= c \mod 2q \quad \underline{\text{pour}} \quad \frac{d^{\ell}x}{\bar{\omega}} < 0 , \\ m_R(z) &= 1 + c \mod 2q \quad \underline{\text{pour}} \quad \frac{d^{\ell}x}{\bar{\omega}} > 0 . \end{aligned}$$

<u>Preuve de 1°)</u>. - Les c_j figurant dans (3.8) ne sont pas tous nuls ; supposons $c_1 \neq 0$; donc sur V, en z :

$$(3.11) \qquad dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^{\ell} \neq 0 ; \ \exists k \text{ tel que } dp_k \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^{\ell} \neq 0 .$$

Puisque sur V : $\sum_j dp_j \wedge dx^j = 0$, on a , $\wedge$ supprimant le terme qu'il coiffe :

$$(3.12) \quad dp_1 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \widehat{dx_k} \ldots \wedge dx^{\ell} + dp_k \wedge dx^k \wedge dx^2 \wedge \ldots \widehat{dx^k} \ldots \wedge dx^{\ell} = 0 ;$$

vu (3.8)

$$dx^1 = -\frac{c_k}{c_1}\,dx^k \,; \qquad \text{mod. } (dx^2,\ldots,\widehat{dx^k},\ldots,dx^\ell) \,;$$

donc (3.12) s'écrit en notant.

$$\bar{\omega} = \frac{1}{c_1^2}\,dp_1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^\ell :$$

$$(3.13) \qquad c_1\, c_k\;\bar{\omega} = dp_k \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^\ell ,$$

c-à-d. (3.9) pour $j = 1$.

Vu (3.11) , (3.13) implique :

$$\bar{\omega} \neq 0 \quad \text{sur} \quad V \quad \text{en} \quad z \,.$$

En employant au second membre de (3.13) l'expression

$$dx^j = -\frac{c_1}{c_j}\,dx^1 \quad \text{mod } (dx^2,\ldots,\widehat{dx^j}\ldots,dx^\ell)$$

on obtient (3.9) pour $j > 1$ et $c_j \neq 0$. Si $j > 1$ et $c_j = 0$, alors les deux membres de (3.9) sont évidemment nuls.

<u>Preuve de</u> 2°) . - Supposons $c_1 \neq 0$ en un point de $\sum_R$; près de ce point, on peut donc choisir pour coordonnées sur V de $z \in V$ les coordonnées $(p_1, x^2,\ldots,x^\ell)$ de Rz dans $Z(\ell)$; sur V , x^1 , $p_2,\ldots,p_\ell$ sont donc fonctions de $(p_1,x^2,\ldots,x^\ell)$.

Soit $\zeta'(z)$ le vecteur de $\lambda(z)$ ayant pour coordonnées :

$$(dp_1 = 1 \,, dx^2 = \ldots = dx^\ell = 0) \,;$$

$R\,\zeta'(z)$ a donc dans $Z(\ell)$ les coordonnées :

$$\left(dx^1 = \frac{\partial x^1 (p_1, x^2,\ldots x^\ell)}{\partial p_1} \,,\; dx^2 = 0 \,,\; \ldots ,\; dx^\ell = 0 \,,\; dp_j = \frac{\partial p_j (p_1, x^2, \ldots x^\ell)}{\partial p_1}\right)$$

Notons $\zeta(z)$ le vecteur de $R^{-1} X^*$, fonction de $z \in V$, tel que

$$R\,\zeta(z) = \left(dx = 0 \,,\; dp = \frac{\partial p (p_1, x^2,\ldots,x^\ell)}{\partial p_1}\right) .$$

On a donc :

$$\zeta(z) = \zeta'(z) \quad \text{pour} \quad z \in \textstyle\sum_R \,;$$

$$(3.14) \qquad [\,\zeta(z)\,,\zeta'(z)\,] = [\,R\zeta(z)\,,R\,\zeta'(z)\,] = \frac{\partial x^1}{\partial p_1} = \frac{1}{c_1^{\,2}}\,\frac{d^\ell x}{\bar{\omega}}$$

car la relation évidente :

$$dx^1\wedge\ldots\wedge dx^\ell = \frac{\partial x^1(p_1\,,x^2,\ldots,x^\ell)}{\partial p_1}\,dp_1\wedge dx^2\wedge\ldots\wedge dx^\ell \quad \text{sur}$$

V signifie, vu (3.9)

$$\frac{\partial x^1}{\partial p_1} = \frac{d^\ell x}{c_1^{\,2}\,\bar{\omega}} .$$

Or, vu le théorème 6 du § 2 , on a, pour $z \in V \setminus \sum_R$:

$$m_R(z) = m\,(R^{-1}X^*_\infty\,,\lambda_\infty(z)\,) = c \quad \text{pour} \quad [\zeta(z)\,,\zeta'(z)\,] < 0\,,$$

$$= 1 + c \quad \text{pour} \quad [\zeta(z)\,,\zeta'(z)\,] > 0\,,$$

c étant une constante $\in \mathbb{Z}$. D'où (3.10) , vu (3.14) .

4. GÉOMÈTRIES q - SYMPLECTIQUES . - Evidemment, si R est un q - repère, le groupe

$$R^{-1}\,Sp_q(\ell)\,R = Sp_q(Z)$$

opère sur Z et ses variétés lagrangiennes en conservant leur q - orientation ; ce groupe est indépendant de R , vu (3.1) .

Or <u>F.Klein</u> a défini une géométrie par la donnée d'une variété et d'un groupe de Lie opérant sur cette variété ,

Chacun des groupes $Sp_q(Z)$, où $q \in \{\,1\,,2\,,\ldots,\infty\}$, définit donc sur Z une géométrie, qu'il convient de nommer <u>géométrie</u> q - <u>symplectique</u> .

CONCLUSION . - <u>Le</u> § 1 de ce chapitre I <u>a défini une représentation unitaire du groupe</u> $Sp_2(\ell)$ <u>dans l'espace de Hilbert</u> $\mathcal{H}(X)$, <u>où</u> dim $X = \ell$; <u>grâce au § 2 ,</u> le § 3 <u>a substitué à l'étude de ce groupe celle du groupe isomorphe</u> $Sp_2(Z)$ <u>qui définit la géométrie 2 - symplectique de Z,</u> <u>où</u> dim $Z = 2\,\ell$; les <u>§ 2 et § 3 ont</u>

approfondi les propriétés de l'indice d'inertie et de l'indice de Maslov, que le § 1 avait déjà introduits. L'intérêt de ces diverses propriétés est qu'elles s'appliquent toutes simultanément à une même structure : l'analyse lagrangienne, que le chapitre II va définir .

CHAPITRE II .

FONCTIONS LAGRANGIENNES ; OPERATEURS DIFFERENTIELS LAGRANGIENS

INTRODUCTION . - <u>Sommaire</u> . - Le chapitre I n'étudie que des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux et des fonctions définies sur $X = R^{\ell}$ tout entier.

Le but du chapitre II est d'étendre ces résultats : son § 2 se donne un espace symplectique Z , de dimension $2\,\ell$, muni d'une géométrie 2 - symplectique ; il définit :

des <u>fonctions lagrangiennes</u>, sur lesquelles $Sp_2\,(Z)$ opère localement ;

des <u>opérateurs lagrangiens</u>, plus généraux que les opérateurs différentiels, transformés par $Sp_2\,(Z)$ comme le sont les opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux (cf. Chap. I, § 1, théor. 3.1) .

Chaque fonction lagrangienne U est définie sur une variété lagrangienne V de Z ; dans chaque 2 - repère R , U possède une expression U_R , qui est une fonction à valeurs formelles, définie sur $V \setminus \sum_R$. Dans chaque repère R , chaque opérateur lagrangien a possède une expression $a_R = a_R^+ (\nu\,, x\,, \frac{1}{\nu}\, \frac{\partial}{\partial x})$, qui est un opérateur différentiel formel d'ordre $\leq \infty$, opérant localement sur les U_R .

Un <u>changement de repère</u>

$$S = R\,R'^{-1} \in Sp_2\,(\ell) \qquad \text{(cf. Chap.I , §3 , n° 3)}$$

est un opérateur <u>local</u> , qui transforme

$$U_{R'} \;\text{ en }\; U_R = S\,U_{R'}\;,\; a_{R'} \;\text{ en }\; a_R = S\,a_{R'}\,S^{-1}\;,$$

donc

$$a_{R'}\,U_{R'} \;\text{ en }\; S\,(a_R\,U_R)\;;$$

il en résulte que <u>les opérateurs lagrangiens opèrent sur les fonctions lagrangiennes</u> .

Toutes les expressions a_R d'un même opérateur lagrangien a se déduisent aisément d'une même fonction formelle a^o , définie sur Z .

En géométrie, un changement de repère laisse invariante (ou transforme linéairement) la valeur en un point d'une fonction scalaire (ou vectorielle) ; mais un caractère essentiel de l'analyse lagrangienne est le suivant : en chaque point z de V , le groupe $Sp_2(\ell)$ des changements de repère opère sur les germes des expressions U_R d'une même fonction lagrangienne U et non sur les valeurs en z de ces expressions ; $U_R = S\, U_{R'}$ peut avoir des singularités sur Σ_R , mais n'en a pas sur $\Sigma_{R'} \setminus \Sigma_{R'} \cap \Sigma_R$, alors que les singularités de $U_{R'}$ sont sur $\Sigma_{R'}$; les singularités des expressions U_R de U ne sont donc pas des singularités de U : elles peuvent être qualifiées de singularités apparentes ; leur nature peut être précisée, grâce à l'indice de Maslov.

Historique . - V.P. Maslov [ ] a explicité ce caractère essentiel de l'analyse lagrangienne, bien qu'il n'ait étudié que les projections sur X des fonctions lagrangiennes, sans définir ni les fonctions lagrangiennes explicitement , ni les opérateurs lagrangiens. Il n'a employé qu'un sous-groupe de $Sp_2(\ell)$, dépendant d'un choix des coordonnées de X : le sous-groupe qu'engendrent les transformations de Fourier portant sur une seule coordonnée .

§ 1. Analyse formelle .

0. SOMMAIRE . - Le n° 1 définit et étudie <u>les classes d'équivalence asymptotique</u> des fonctions.

Le n° 2 définit les fonctions formelles ; les fonctions formelles définies sur X et à support compact sont des classes d'équivalence asymptotique. On peut donc (n° 3, 4 et 6) leur appliquer l'intégration, $Sp_2(\ell)$ et les opérateurs différentiels, dont la définition peut être généralisée. On en déduit (n° 4 et 6) que $Sp_2(\ell)$ et les opérateurs différentiels formels opèrent localement sur les fonctions formelles définie sur les variétés lagrangiennes V ou leurs revêtements $\check{V}$, ces fonctions formelles étant à support compact ou non. Le n° 5 étudie leur produit scalaire.

Les fonctions formelles sur $\check{V}$, qui ne sont plus des classes d'équivalence asymptotique, permettront au § 2 de définir les fonctions lagrangiennes .

1. L'ALGEBRE $C(X)$ DES CLASSES D'EQUIVALENCE ASYMPTOTIQUES . - <u>L'algèbre</u> $B(X)$. Soit $\mathcal{J}$ la demi-droite imaginaire pure de $\mathbb{C}$:

$$\mathcal{J} = i\,[\,1\,,\infty\,[$$

$B(X)$ désignera l'algèbre des applications :

$$f : \mathcal{J} \times X \ni (\nu , x) \mapsto f(\nu , x) \in \mathbb{C} ,$$

dont toutes les dérivées en x sont continues en (ν , x) et vérifient :

$$(1.1) \qquad (\forall\, q , r \in \mathbb{N}^{\ell}) \quad \operatorname{Sup} \left| x^q \left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)^r f(\nu , x)\right| < \infty .$$

$Sp_2(\ell)$ et les opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux en $\left(\frac{1}{\nu} , x\right)$

$$a = a^+\left(\nu , x , \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right) = a^-\left(\nu , \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x} , x\right)$$

opèrent sur $B(X)$.

Si $\ell = \dim X = 0$, $B(X)$ est noté B : B est l'algèbre des applications continues bornées $\mathcal{J} \to \mathbb{C}$.

<u>L'algèbre</u> $C(X)$. - Soit $N \in \mathbb{R}_+$; soit $B_N(X)$ l'ensemble des $f \in B(X)$ telles que l'application

$$(\nu, x) \to \nu^N f(\nu, x)$$

appartienne encore à $B(X)$; évidemment $B_N(X)$ est un <u>idéal</u> de $B(X)$, qui décroît quand N croit ; $B_\infty(X) = \bigcap_{N \in \mathbb{R}_+} B_N(X)$ est donc un idéal de $B(X)$. Définissons :

(1.2) $$C(X) = B(X) / B_\infty(X) ;$$

$C(X)$ est une algèbre sur le corps $\mathbb{C}$; ses éléments seront nommés : classes d'équivalence asymptotique ; la condition que les éléments f et f' de $B(X)$ appartiennent à une même classe est que

$$(\forall N \in \mathbb{R}) \quad f - f' \in B_N(X) .$$

(1.3) $$C_N(X) = B_N(X) / B_\infty(X)$$

est évidemment un idéal de $C(X)$, qui décroît quand N croît ;

(1.4) $$\bigcap_{N \in \mathbb{R}} C_N(X) = \{0\} .$$

Soient f et $f' \in B(X)$, de classes $\tilde{f}$ et $\tilde{f}' \in C(X)$; pour exprimer les relatio[ns] équivalentes

(1.5) $$f - f' \in B_N(X) , \tilde{f} - \tilde{f}' \in C_N(X),$$

nous écrirons l'une quelconque des relations :

(1.6) $$f = f' \mod \frac{1}{\nu^N} , \tilde{f} = \tilde{f}' \mod \frac{1}{\nu^N} , f' \in \tilde{f} \mod \frac{1}{\nu^N} .$$

Si $\ell = \dim X = 0$, $C(X)$ est noté C. Evidemment, $C(X)$ <u>est une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions</u> $X \to C$.

Tout élément $\tilde{f}$ de $C(X)$ possède donc une <u>restriction</u> à toute partie de X et un support :

(1.7) $$\mathrm{Supp}(\tilde{f}) \subset X .$$

Note 1 . - Soit une fonction holomorphe

$$F : \mathbb{C}^J \to \mathbb{C} \quad \text{telle que} \quad F(0) = 0 \ ;$$

$(\forall f_j \in \tilde{f}_j)$ les $F(f_1, \dots, f_J)$ sont dans une même classe notée $F(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_J)$.

ainsi : $\forall \tilde{f}_j \in C(X) \quad (j = 1, \dots, J) \quad , \quad F(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_J) \in C(X)$.

Soit une fonction holdérienne

$$F : \mathbb{C}^J \to \mathbb{C} \quad \text{telle que} \quad F(0) = 0 \ ;$$

on définit de même :

$$\forall \tilde{f}_j \in C \quad (j = 1, \dots, J) \quad , \quad F(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_J) \in C .$$

Par exemple, si $\tilde{f} \in C$, alors $|\tilde{f}|$, $\operatorname{Re} \tilde{f}$, $\operatorname{Im} \tilde{f}$ sont définis. $\tilde{f} \in C$ est réel si $\operatorname{Im} \tilde{f} = 0$; alors $\tilde{f}_+$ (partie positive) et $\tilde{f}_-$ sont définis ; $\tilde{f}_- = 0$ s'écrit $0 \leqq \tilde{f}$ et définit un ordre partiel sur $\operatorname{Re} C$, ensemble des éléments réels de C : soient $\tilde{f}$ et $\tilde{g} \in \operatorname{Re} C$; $\tilde{f} \geqq 0$ et $\tilde{g} \geqq 0$ impliquent : $\tilde{f} + \tilde{g} \geqq 0$, et $\tilde{f} \cdot \tilde{g} \geqq 0$; $\tilde{f}^2 \geqq 0$; $\tilde{f} \leqq 0$ (i.e. $-\tilde{f} \geqq 0$) exclut $\tilde{f} > 0$ (i.e. $0 \leqq \tilde{f} \neq 0$); mais $\tilde{f}$ peut ne vérifier ni $\tilde{f} \leqq 0$ ni $\tilde{f} > 0$.

Soit une fonction hölderienne (croissante)

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{telle que} \quad F(o) = 0 \ ;$$

$\forall \tilde{f} \in \operatorname{Re} C$, on a $F(\tilde{f}) \in \operatorname{Re} C$ (la relation d'ordre de $\operatorname{Re} C$ étant conservée).

En particulier, on a l'inégalité de Schwarz :

$$(\forall \tilde{f}_j , \tilde{g}_j \in C) \ : \ \Big|\sum_j \tilde{f}_j \tilde{g}_j\Big| \leqq \Big[\sum_j |\tilde{f}_j|^2\Big]^{\frac{1}{2}} . \Big[\sum_j |\tilde{g}_j|^2\Big]^{\frac{1}{2}}$$

Les opérateurs différentiels, à coefficients polynomiaux en $(\frac{1}{\nu}, x)$

$$a = a^+\left(\nu , x , \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x}\right) = a^-\left(\nu , \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x} , x\right)$$

sont évidemment des endomorphismes de $B(X)$, $B_N(X)$, $C(X)$, $C_N(X)$. Ils opèrent localement : la restriction de $a\tilde{f}$ à un ouvert Ω de X ne dépend que de la restriction de $\tilde{f}$ à cet ouvert ;

$$\operatorname{Supp}(a\tilde{f}) \subset \operatorname{Supp}(\tilde{f}) .$$

Comme au § 1, n° 3, l'opérateur différentiel

$$a = a^{+}\left(\nu, x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right) = a^{-}\left(\nu, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}, x\right)$$

est <u>associé</u> au polynome a° de $\left(\frac{1}{\nu}, x, p\right)$ valant

$$(1.8) \qquad a^{\circ}(\nu, x, p) = e^{-\frac{1}{2\nu}\left<\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}\right>} a^{+}(\nu, x, p) = a^{\frac{1}{2\nu}\left<\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}\right>} a^{-}(\nu, x, p)$$

<u>L'intégration</u> opère sur $C(X)$: si $f \in B(X)$, la fonction

$$\nu \mapsto \int_X f(\nu, x)\, d^{\ell}x$$

appartient à B ; sa classe d'équivalence asymptotique, qui ne dépend que de la classe $\tilde{f}$ de f sera notée :

$$\tilde{\int_X} \tilde{f}(\nu, x)\, d^{\ell}x \in C ;$$

$\tilde{\int}$ est nommée <u>intégrale asymptotique</u> .

Le <u>produit scalaire</u> $(.\,|\,.)$ est une forme sesquilinéaire sur $C(X) \times C(X)$, à valeurs dans C, définie par :

$$(1.9) \qquad (\tilde{f}, \tilde{g}) = \tilde{\int_X} f(\nu, x)\, \overline{g(\nu, x)}\, d^{\ell}x , \quad \text{où} \quad f \in \tilde{f} \in C(X) , \; g \in \tilde{g} \in C(X) ,$$

$\overline{g(\nu, x)}$ est l'imaginaire conjuguée de $g(\nu, x)$, $\bar{\nu} = -\nu$. Donc :

$$(\tilde{g}, \tilde{f}) = \overline{(\tilde{f}, \tilde{g})} .$$

La <u>semi-norme</u> $\|.\|$ est la fonction $C(X) \to C$, à valeurs ≥ 0, définie par

$$\|\tilde{f}\|^2 = (\tilde{f}, \tilde{f}) ;$$

évidemment :

$$\|\tilde{f} + \tilde{g}\| \leq \|\tilde{f}\| + \|\tilde{g}\| \ , \ |(\tilde{f}, \tilde{g})| \leq \|\tilde{f}\| \cdot \|\tilde{g}\| \quad \text{dans} \quad C.$$

D'autre part :

LEMME 1.1. - $Sp_2(\ell)$ constitue un groupe d'automorphismes de $C(X)$, qui sont unitaires, c'est-à-dire conservent normes et produits scalaires.

<u>Preuve</u>. - Soit $S_A \in Sp_2(\ell) \setminus \sum_{Sp_2}$; sa définition ch. I , § 1 par l'intégrale (1.10) prouve que S_A transforme la classe d'équivalence asymptotique $\tilde{f}'$ en la classe $S_A \tilde{f}'$ définie par l'intégrale asymptotique

$$(S_A \tilde{f}')(x) = \left(\frac{|\nu|}{2\pi i}\right)^{\ell/2} \Delta(A) \int_X e^{\nu A(x,x')} \tilde{f}'(x')\, d^\ell x' \ ;$$

cette formule a un sens, car le produit par $e^{\nu A}$, où νA est imaginaire pur, conserve évidemment l'équivalence asymptotique. Les S_A opèrent sur $C(X)$, en se composant comme ils le font quand ils opèrent sur $\mathcal{S}(X)$; or ils engendrent le groupe $Sp_2(\ell)$; ce groupe opère donc sur $C(X)$.

Puisque $Sp_2(\ell)$ <u>est unitaire</u> sur $\mathcal{S}(X)$, il est unitaire <u>sur</u> $C(X)$

Les théorèmes 3.1 et 3.2 du chap I, § 1 et leurs corollaires donnent :

LEMME 1.2. - Le transformé $S\ a\ S^{-1}$ de l'opérateur différentiel a par $S \in Sp_2(\ell)$ est l'opérateur différentiel associé à $a^o \circ s^{-1}$; s désigne l'image de S dans $Sp(\ell)$; s opère sur l'espace $Z(\ell)$ des vecteurs (x, p).

LEMME 1.3. - Pour que les opérateurs différentiels a et b soient adjoints, il faut et suffit que

$$b^o(\nu, x, p) = \overline{a^o(\nu, x, p)}.$$

En particulier : a est auto-adjoint quand $a^o(\nu, x, p)$ est à valeurs réelles pour

$$\nu \in \mathcal{J},\ (x, p) \in Z(\ell).$$

S transforme des opérateurs adjoints en opérateurs adjoints.

2. NOMBRES FORMELS ; FONCTIONS FORMELLES . - Le théorème 2.2 reliera les définitions suivantes aux précédentes.

Un nombre formel est une série formelle

$$(2.1)\qquad u = u(\nu) = \sum_{j \in J} \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_{jr}}{\nu^r} e^{\nu \varphi_j} ,$$

où : J est un ensemble fini ; $\alpha_{jr} \in \mathbb{C}$, $\varphi_j \in \mathbb{R}$, $\varphi_j \neq \varphi_k$ si $j \neq k$.

L'expression (2.1) d'un nombre formel est unique, par définition.

L'ensemble des nombres formels est une algèbre commutative F dont les règles d'addition et multiplication sont évidentes.

F est muni de la topologie que définit le sytème de voisinages $W(N, \epsilon)$ de son origine que voici :

$$N \in \mathbb{N} , \epsilon \in \dot{\mathbb{R}}_+ , u \in W(N, \epsilon) \text{ signifie : } (\forall r \leq N) \sum_{j \in J} |\alpha_{jr}| < \epsilon .$$

Une fonction formelle sur X est une application $u : X \to F$ qui peut être mise sous la forme

$$(2.2)\qquad u = u(\nu) = \sum_{j \in J} \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_{jr}}{\nu^r} e^{\nu \varphi_j}$$

où : J est un ensemble fini ; $\alpha_{jr} : X \to \mathbb{C}$; $\varphi_j : X \to \mathbb{R}$;

α_{jr} et φ_j sont indéfiniment différentiables.

u peut être mis de plusieurs façons sous la forme (2.2) en les points au voisinage desquels deux des φ_j sont égaux. La valeur de $u(\nu)$ en x est notée :

$$(2.3)\qquad u(\nu, x) = \sum_{j \in J} \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_{jr}(x)}{\nu^r} e^{\nu \varphi_j(x)} .$$

$u(\nu)$ a un support :

$$(2.4)\qquad \operatorname{Supp} u(\nu) \subset \overline{\bigcup_{j, r} \operatorname{Supp} \alpha_{jr}} .$$

L'ensemble $F(X)$ des fonctions formelles sur X est une algèbre sur F ; elle est commutative. L'ensemble des fonctions formelles sur X, à supports compacts, est une sous-algèbre $F_o(X)$ de $F(X)$.

Les φ_j sont nommés phases ; les $\alpha_j = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_{jr}}{\nu^r}$ amplitudes.

L'ensemble F^o [resp. $F^o(X)$] des éléments de F [resp. $F(X)$] de phase nulle constitue une sous-algèbre de F (resp. $F(X)$).

Notons Z un espace symplectique, muni d'une géométrie 2-symplectique, V une variété lagrangienne de Z (ch I, § 3, n° 1 et 4) et $\check{V}$ le revêtement universel de V.

Une fonction formelle $\check{U}_R$ sur $\check{V}$ est constituée par :

i) un 2-repère R de Z;

ii) une application

(2.5) $$\check{U}_R = \check{U}_R(\nu) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_r}{\nu^r} e^{\nu \varphi_R} : \check{V} \to F,$$

où : φ_R est la phase de RV (ch I, §3, n° 2),

$\alpha_r : \check{V} \to \mathbb{C}$ est indéfiniment différentiable

Evidemment :

$$\operatorname{Supp} \check{U}_R = \overline{\bigcup_r \operatorname{Supp} \alpha_r} \subset \check{V}.$$

Pour R et V donnés, l'ensemble de ces fonctions formelles $\check{U}_R$ est un espace vectoriel sur F^o, noté $F(\check{V}, R)$; l'ensemble de celles de ces fonctions dont le support est compact est un sous espace $F_o(\check{V}, R)$.

$F(\check{V}, R)$ est muni de la topologie que définit le système de voisinages $W(K, p, r,$ de l'origine que voici :

K est un compact de V ; $p, r \in \mathbb{N}$, $\epsilon \in \dot{R}_+$;

$\check{U}_R \in W(K, p, r, \epsilon)$ signifie que sur K les dérivées d'ordres $\leq p$ des α_s $(s \leq r)$ sont de modules $< \epsilon$.

$\sum_R$ désigne le contour apparent de V pour le repère R (ch I , §3 , n° 2) ;

$\check{\sum}_R$ désigne le contour apparent de $\check{V}$, c'est-à-dire l'ensemble des points de $\check{V}$ se projetant sur $\check{\sum}_R$; nous déduirons les propriétés de $F(\check{V} \setminus \check{\sum}_R , R)$ de celles de $F_o(\check{V} \setminus \check{\sum}_R , R)$; celles-ci seront déduites de celles de $F_o(X)$ par le morphisme résultant de la composition des deux morphismes que vont définir respectivement les théorèmes 2.1 et 2.2.

Notation. - Si $z \in Z$ et $R\,z = (x , p)$, alors nous notons $x = R_X\, z$. Le composé de la projection naturelle $\check{V} \to V$ et de la restriction de R_X à V est noté $\check{R}_X : \check{V} \to X$.

THEOREME 2.1. - Il existe un morphisme naturel

$$\Pi_R \; : \; F_o(\check{V} \setminus \check{\sum}_R , R) \to F_o(X) .$$

appelé projection ; il se définit comme suit :

soit $\check{U}_R \in F_o(\check{V} \setminus \check{\sum}_R , R)$; $u = \Pi_R \check{U}_R$ vaut

$$u(\nu , x) = \sum_{\check{z} \in \check{R}_X^{-1} x} \check{U}_R(\nu , \check{z}) .$$

Note 2.1 . - Π_R est un monomorphisme.

Preuve . - La formule (2.8) a un sens, car $\check{R}_X^{-1} x \cap \operatorname{Supp} \check{U}_R$ est un ensemble fini puisque $\operatorname{Supp} \check{U}_R$ est une partie compacte de $\check{V} \setminus \check{\sum}_R$ et que R_X est un homéomorphisme local $\check{V} \setminus \check{\sum}_R \to X$.

THEOREME 2.2. - Il existe un monomorphisme naturel de l'algèbre $F_o(X)$ dans l'algèbre $C(X)$; il permet la convention

(2.9) $$F_o(X) \subset C(X) ;$$

il se définit comme suit.

Soit

$$(2.10) \qquad u = \sum_{j \in J} \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_{jr}}{\nu^r} e^{\nu \varphi_j} \in F_o(X) :$$

notons

$$(2.11) \qquad u_N = \sum_{j \in J} \sum_{r=o}^{N-1} \frac{\alpha_{jr}}{\nu^r} e^{\nu \varphi_j} ; \mathfrak{J} \times X \to \mathbb{C}$$

1°) Il existe des fonctions $f \in B(X)$ telles que $(\forall N) : f - u_N = 0 \mod \frac{1}{\nu^N}$

2°) Toutes ces fonctions appartiennent à une même classe d'équivalence asymptotique $\tilde{f} \in C(X)$; l'application $u \mapsto \tilde{f}$ définit un morphisme naturel $F_o(X) \to C(X)$.

3°) Ce morphisme est un monomorphisme.

Ce théorème résulte d'un raisonnement de type classique ; explicitons-le.

Preuve de 1°). - Il suffit de traiter le cas où (2.10) se réduit à :

$$(2.12) \qquad u(\nu, x) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_r(x)}{\nu^r} e^{\nu \varphi(x)} .$$

Pour tout $g \in B(X)$, nul hors d'un compact de X, employons la norme :

$$(2.13) \qquad |g|_r = \operatorname{Sup.}_{\nu, x, s} \left| \left(\frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x} \right)^s g \right| \text{ où } \nu \in \mathfrak{J}, x \in X, |s| \leq r :$$

Choisissons une suite croissante de nombres

$$0 \leq \mu_o \leq \mu_1 \leq \dots$$

telle que

$$(2.14) \qquad 2^r |\alpha_r e^{\nu \varphi}|_r \leq \mu_r , \quad \lim_{r \to \infty} \mu_r = \infty ;$$

choissons une suite de fonctions continues $\epsilon_o, \epsilon_1, \dots : \mathfrak{J} \to \mathbb{R}_+$

telle que

$$(2.15) \qquad 0 \leq \epsilon_r(\nu) \leq 1 ; \ \epsilon_r(\nu) = 0 \text{ pour } |\nu| \leq \mu_r ; \ \epsilon_r(\nu) = 1 \text{ pour } 2\mu_r \leq |$$

définissons alors

$$(2.16) \qquad f(\nu, x) = \sum_{r=0}^{\infty} \epsilon_r(\nu) \frac{\alpha_r(x)}{\nu^r} e^{\nu\varphi(x)} ;$$

cette série converge, puisque, vu $(2.14)_2$ et $(2.15)_2$ sur tout intervalle borné de variation de ν, ses termes non nuls sont en nombre fini. Notons, conformément à (2.11) :

$$(2.17) \qquad u_N(\nu, x) = \sum_{r=0}^{N-1} \frac{\alpha_r(x)}{\nu^r} e^{\nu\varphi(x)} ;$$

vu $(2.15)_3$, pour $2\mu_N \leq |\nu|$:

$$|f(\nu) - u_{N+1}(\nu)|_N \leq \sum_{r=N+1}^{\infty} \frac{\epsilon_r(\nu)}{|\nu|^r} |\alpha_r e^{\nu\varphi}|_r ;$$

or $(2.14)_1$, $(2.15)_1$ et $(2.15)_2$ impliquent :

$$\epsilon_r(\nu)\, 2^r\, |\alpha_r e^{\nu\varphi}|_r \leq |\nu| ;$$

donc, pour $2\mu_N \leq |\nu|$:

$$|f(\nu) - u_{N+1}(\nu)|_N \leq \sum_{r=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^r |\nu|^{r-1}} = \frac{1}{2^N |\nu|^N} \frac{1}{2 - \frac{1}{|\nu|}} \leq \frac{1}{|\nu|^N}$$

car $1 \leq |\nu|$; donc :

$$(2.18) \qquad |f - u_N|_N = 0 \mod \frac{1}{\nu^N} .$$

Prouvons que, plus généralement :

$$(2.19) \qquad (\forall M, N \in \mathbb{N}) \quad |f - u_N|_M = 0 \mod \frac{1}{\nu^N} .$$

Si $M \leq N$, (2.19) résulte de (2.18) et de la croissance de $|\cdot|_M$ avec M.

Si $N < M$, (2.19) résulte des relations :

$$|f - u_N|_M \leq |f - u_M|_M + |u_M - u_N|_M ; \quad |f - u_M|_M = 0 \mod \frac{1}{\nu^M} \text{ donc mod } \frac{1}{\nu^N} ;$$

$$|u_M - u_N|_M = 0 \mod \frac{1}{\nu^N} , \quad \text{car } u_M - u_N = \sum_{r=N}^{M-1} \frac{\alpha_r}{\nu^r} e^{\nu\varphi} .$$

Puisque les supports de f et des u_N appartiennent à $\mathrm{Supp}\ u = \overline{\bigcup_r \mathrm{Supp}\ \alpha_r}$, qui est compact, (2.19) implique

$$(\forall \quad M, N, q \in \mathbb{N}) \qquad |x^q (f - u_N)|_M = 0 \bmod \frac{1}{\nu^N}$$

c'est-à-dire

$$f - u_N = 0 \bmod \frac{1}{\nu^N}$$

<u>Preuve de 2°)</u> . - Si f et $f' \in B(X)$ et vérifiant

$$(\forall N) \;\; f - u_N = f' - u_N = 0 \bmod \frac{1}{\nu^N}$$

on a évidemment

$$f - f' = 0 \bmod \frac{1}{\nu^N} .$$

<u>Preuve de 3°)</u> . - Supposons

$$u \mapsto \tilde{f} = 0 ,$$

donc

$$(\forall N \in \mathbb{N} , \forall x \in X) \quad u_N(\nu , x) = 0 \bmod \frac{1}{\nu^N} ;$$

il s'agit de prouver que

$$(\forall x \in X) \quad u(\nu , x) = 0$$

Il suffit donc de traiter le cas où u est un <u>nombre</u> formel ; supposons que dans son expression (2.1)

$$(\forall j \in J) \quad \alpha_{jr} = 0 \quad \text{pour} \quad r < N ;$$

nous avons donc

$$u_{N+1}(\nu) = \sum_{j \in J} \frac{\alpha_{jN}}{\nu^N} e^{\nu \varphi_j} = 0 \bmod \frac{1}{\nu^{N+1}} ,$$

donc

$$\lim_{\nu \to i\infty} \sum_{j \in J} \alpha_{jN} e^{\nu \varphi_j} = 0 ,$$

ce qui implique

$$(\forall_j) \; \alpha_{jN} = 0 ;$$

d'où le théorème 2.2

COROLLAIRE 2. - <u>L'intégration asymptotique, les éléments de</u> $Sp_2(\ell)$ <u>et les opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux sont des morphismes.</u>

$$F_o(X) \to C \; ; \; F_o(X) \to C(X) \; ; \; F_o(X) \to F_o(X) \, .$$

La fin de ce § 1 explicitera les propriétés de ces morphismes.

Le n° 3 du § 2 emploiera, pour étudier la norme lagrangienne, le

THEOREME 2.3. - 1°) <u>Soit un nombre formel de phase nulle</u> :

$$u = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_r}{\nu^r} \in F^o \, .$$

<u>La condition qu'il soit réel,</u> $u \in \mathrm{Re}\, F^o$, <u>est</u> :

$$(\forall r) \; \frac{\alpha_r}{\nu^r} \; \underline{\text{est réel}} \; ; \; \underline{\text{i.e}} : i^{-r} \alpha_r \; \underline{\text{est réel}} \, .$$

<u>La condition</u> $u > 0$ <u>est, en notant</u> s <u>le premier des</u> r <u>tels que</u> $\alpha_r \neq 0$:

$$0 < \frac{\alpha_s}{\nu^s} \; ; \; \underline{\text{i.e.}} : i^{-s} \alpha_s > 0 \, .$$

<u>Tout</u> $u \in \mathrm{Re}\, F^o$ <u>vérifie donc</u> : <u>soit</u> $u > 0$; <u>soit</u> $u \leqq 0$.

$\geqq$ <u>définit donc une relation d'ordre sur</u> $\mathrm{Re}\, F^o$.

2°) <u>La condition</u> $u^{1/2} \in \mathrm{Re}\, F^o$ <u>équivaut à la suivante</u> :

$u \in F^o$; $u > 0$; <u>l'entier</u> s <u>(défini ci-dessus)</u> <u>est pair</u>.

<u>Notation</u>. - $u^{1/2}$ a alors deux déterminations opposées ; on choisit : $u^{1/2} \geqq 0$.

<u>Preuve</u> : Soit

$$u = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_r}{\nu^r} \in F^o \; ; \quad \text{notons } s \text{ le premier des } r \text{ tels que } \alpha_r \neq 0 \, .$$

Si $(\forall r)\ \alpha_r \nu^{-r}$ est à valeurs réelles, la preuve du théorème 2.2 construit une fonction $f \in u$, à valeurs réelles ; donc $u \in \mathrm{Re}\, F^o$. D'où :

$$\mathrm{Re}\, u = \sum_{r \in \mathbb{N}} \mathrm{Re}\, \frac{\alpha_r}{\nu^r} \, , \quad \mathrm{Im}\, u = \sum_{r \in \mathbb{N}} \mathrm{Im}\, \frac{\alpha_r}{\nu^r} \, .$$

Donc $u \in \mathrm{Re}\, F^o$ si et seulement si $(\forall r)$ $\alpha_r \nu^{-r}$ est réel .
Etudions $u^{1/2}$.

$$u^2 = \frac{\alpha_s^2}{\nu^{2s}} \mod \frac{1}{\nu^{2s+1}} \quad ;$$

donc

$u^{1/2} \in \mathrm{Re}\, F^o$ exige : s pair ; $u \geqq 0$ (cf. Note 1) .

Pour prouver la réciproque, il suffit évidemment de prouver ceci :

$$u^{1/2} \in \mathrm{Re}\, F^o \quad \text{quand} \quad \alpha_o > 0 \ ;$$

c'est évident puisque la condition

$$\Big(\sum_r \frac{\beta_r}{\nu^r}\Big)^2 = \sum_r \frac{\alpha_r}{\nu^r}$$

équivaut à la condition $\beta_o^2 = \alpha_o$ et à des conditions donnant (pour chaque $r = 1, 2, \ldots$) $\beta_o \beta_r$ en fonction linéaire réelle de α_r et des $\beta_t \beta_{r-t}$ $(0<t<r)$

Or $u^{1/2} \in \mathrm{Re}\, F^o$ implique $u \geqq 0$ (cf. Note 1) ; donc $\alpha_o > 0$ implique $u > 0$; donc $\alpha_s \nu^{-s} > 0$ implique $u > 0$. Tout $u \in \mathrm{Re}\, F^o$ vérifie donc : soit $u > 0$, soit $u \leqq 0$.

3. INTEGRATION DES ELEMENTS DE $F_o(X)$. - Les propriétés essentielles des fonctions formelles seront déduites du théorème suivant, qui précise des résultats classiques (méthode de la phase stationnaire) ; ces précisions exigent l'emploi des lemmes 3.4 et 3.5 au lieu du lemme de Marston MORSE [ ] , qui transforme localement par changement de coordonnées une fonction ayant un point critique non dégénéré en une forme quadratique. Nous rappelons brièvement les autre lemmes nécessaires à la preuve de ce théorème .
Vu le corollaire 2, l'intégration asymptotique est un morphisme

$$\tilde{\int_X} : F_o(X) \to C \ .$$

Evidemment, quand les phases de u sont toutes constantes :

$$\tilde{\int_X} u(\nu, x)\, d^\ell x \in F .$$

Le théorème 3 prouve que, dans le cas important qu'énonce le corollaire 3 :

$$\nu^{\ell/2} \tilde{\int_X} u(\nu, x)\, d^\ell x \in F .$$

THEOREME 3 . - Soit $u \in F_o(X)$.

1°) La valeur de $\tilde{\int_X} u(\nu, x)\, d^\ell x$ ne dépend que de la restriction de u à un voisinage arbitrairement petit de l'ensemble des points critiques des phases de u ; cette valeur est 0 si cet ensemble est vide.

2°) Soit

$$u(\nu) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_r}{\nu^r} e^{\nu\varphi} \in F_o(X) , \tag{3.1}$$

où φ a, sur $\operatorname{Supp} u$, un point critique unique, x_c, non-dégénéré. Notons :

$\varphi_c = \varphi(x_c)$ la valeur critique de φ ; $\arg i^{\ell/2} = \Pi \ell / 4$;

$\sqrt{\operatorname{Hess}_c \varphi}$ la valeur en x_c de $\sqrt{\operatorname{Hess} \varphi}$, (Déf. 2.3 du ch. I, § 1).

Alors

$$\tilde{\int_X} u(\nu, x)\, d^\ell x = \left(\frac{2\Pi i}{|\nu|}\right)^{\ell/2} (\operatorname{Hess}_c \varphi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} I_r(\varphi ; \alpha)\, e^{\nu\varphi_c} , \tag{3.2}$$

où :

$$I_o(\varphi ; \alpha) = \alpha_o(x_c) ; \tag{3.3$_o$}$$

$$I_r(\varphi, \alpha) = \sum_{s=o}^{r} \sum_{j=o}^{2(r-s)} \frac{1}{(r-s+j)!\,j!} \left\{ \Phi^{*\, r-s+j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) [\Theta^j(x)\, \alpha_s(x)] \right\}_{x=x_c} \tag{3.3$_r$}$$

Φ, Φ^* et Θ étant définis comme suit .

Notations. - Le développement de Taylor d'ordre 2 de φ en x_c est noté :

(3.4) $$\varphi(x) = \Phi(x - x_c) + \Theta(x) \; ;$$

donc : Θ s'annule 3 fois en x_c ; Φ est une forme quadratique .

Φ^* est sa forme "duale" ; c'est-à-dire :

(3.5) $\Phi^*(p)$ est la valeur critique de la fonction $x \to \Phi(x) + \langle p, x\rangle$;

autrement dit, si M est la valeur en x_c de la matrice $(\varphi_{x^j x^k})$:

(3.6) $$\Phi(x) = \tfrac{1}{2}\langle Mx, x\rangle \; , \; \Phi^*(p) = -\tfrac{1}{2}\langle p, M^{-1}p\rangle \; , \text{ où } M = {}^tM : X \to X^* \; .$$

Evidemment :

COROLLAIRE 3. - Soit $u \in F_o(X)$. Si, sur Supp u , tous les points critiques de toutes les phases de u sont non-dégénérés, alors :

$$\nu^{\ell/2} \tilde{\int_X} u(\nu, x)\, d^\ell x \in F \; ;$$

les phases de $\nu^{\ell/2} \tilde{\int_X} u\, d^\ell x$ sont les valeurs critiques, sur Supp u, des phases de u .

Il suffit évidemment de prouver le théorème 3 quand on y remplace u par une fonction f valant :

(3.7) $$f(\nu, x) = \alpha(x)\, e^{\nu\varphi(x)} \; ,$$

où $\alpha \in \mathcal{D}$ (c-à-d : est indéfiniment diférentiable, à support compact) . Ce théorème résulte alors des lemmes suivants, dont le premier prouve le 1°) du théorème :

LEMME 3.1. - Notons x_c les points critiques de φ appartenant à Supp f . S'ils sont tous non-dégénérés, alors

$$\int_X \alpha(x)\, e^{\nu\varphi(x)}\, d^\ell x \mod \frac{1}{\nu^N}$$

est fonction linéaire des valeurs, en les points x_c , des dérivées de α d'ordres $< 2N$.

Preuve. - Il s'agit de prouver ceci :

$(3.8)_N$ Si α s'annule 2 N - fois en les points x_c, alors $\int_X f\, d^\ell x = 0 \bmod \frac{1}{\nu^N}$.

Or $(3.8)_o$ est évident. Supposons $(3.8)_N$ vrai. Si α s'annule 2 (N+1) - fois en les points x_c, alors il existe des $\beta_j \in \mathcal{D}$ tels que :

$\alpha = \sum_j \beta_j \varphi_{x^j}$, β_j s'annule (2 N+1) - fois en les points x_c ;

donc, vu $(3.8)_N$:

$$\int_X \alpha\, e^{\nu\varphi} d^\ell x = - \int_X \frac{1}{\nu} \sum_j \frac{\partial \beta_j}{\partial x^j} e^{\nu\varphi} d^\ell x = 0 \bmod \frac{1}{\nu^{N+1}},$$

ce qui prouve $(3.8)_{N+1}$.

On prouve de même :

LEMME 3.2. - Soit $\alpha \in \mathcal{S}$ (notation de L. Schwartz ; cf ch I, § 1, n° 1). Soit Φ une forme quadratique non-dégénérée $X \to \mathbb{R}$. Alors

$$\int_X \alpha(x)\, e^{\nu \Phi(x)}\, d^\ell x \bmod \frac{1}{\nu^N}$$

est une fonction linéaire des valeurs en 0 des dérivées de α d'ordre $< 2N$.

Ce lemme s'explicite comme suit :

LEMME 3.3. - Soit $\alpha \in \mathcal{S}$. Soit Φ une forme quadratique non-dégénérée $X \to \mathbb{R}$ Alors

$$\int_X \alpha(x)\, e^{\nu\Phi(x)}\, d^\ell x =$$

$$\left(\frac{2\pi i}{|\nu|}\right)^{\ell/2} [\text{Hess } \Phi]^{-\frac{1}{2}} \sum_{r\in N} \frac{1}{r!\,\nu^r} \left[\Phi^{*r}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \alpha(x)\right]_{x=0} \bmod \frac{1}{\nu^\infty}.$$

Preuve. - On sait (cf. ch. I, § 1, lemme 2.2) que

$$\int^\infty e^{-\frac{\mu}{2} x^2} dx = \sqrt{2\pi}\, \mu^{-1/2} \qquad \text{pour } |\arg \mu| < \frac{\pi}{2}.$$

D'où, par dérivations en μ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2r} e^{-\frac{\mu}{2}x^2}\, dx = \sqrt{2\pi}\, \frac{\mu^{-1/2}}{(2\mu)^r}\, \frac{(2r)!}{r!}$$

$$= \sqrt{2\pi}\, \mu^{-\frac{1}{2}} \left[e^{\frac{1}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2}}\, x^{2r} \right]_{x=0} .$$

Or

$$(\forall r \in \mathbb{N}) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^{2r+1} e^{-\frac{\mu x^2}{2}}\, dx = 0 .$$

Donc, pour toute $\ell \times \ell$ matrice diagonale complexe M_c , à valeurs propres non nulles, d'arguments $\in \left] -\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2} \right[$, et pour tout polynome $P : X \to \mathbb{C}$:

$$(3.9) \qquad \int_X P(x)\, e^{-\Phi_c(x)}\, d^\ell x =$$

$$(2\pi)^{\ell/2} \left[\operatorname{Hess} \Phi_c \right]^{-1/2} \left[e^{\Psi_c\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)} P(x) \right]_{x=0} ,$$

où :

$$\Phi_c(x) = \tfrac{1}{2} < M_c x , x > , \quad \Psi_c(p) = \tfrac{1}{2} < p , M_c^{-1} p > ;$$

arg. Hess Φ_c est la somme des arg. des valeurs propres de Φ_c .

Explicitons :

$$\Phi_c = \Phi_+ - \nu \Phi ,$$

où : $\nu \in [i , \infty [$; Φ_+ et Φ sont des formes quadratiques : $X \to \mathbb{R}$, indépendantes de ν ; Φ_+ est définie positive ; nous supposons Φ <u>non-dégénérée</u>.

L'hypothèse que la matrice M_c est diagonale est surperflue, puisqu'un changement de coordonnées réduit deux telles formes à :

$$\Phi_+(x) = \sum_j x_j^2 \quad , \quad \Phi(x) = \sum_j c_j x_j^2 \qquad (c_j \neq 0) .$$

Soit $\epsilon \in \mathcal{D}$ tel que $\epsilon(x) = 1$ pour x voisin de 0 . Le lemme 3.2 et (3.9) donnent :

(3.10) $$(-\frac{\nu}{2\pi})^{\ell/2} \int \epsilon(x)\, P(x)\, e^{\nu\Phi(x) - \Phi_+(x)}\, d^\ell x =$$

$$[\,\text{Hess}\,(\Phi - \frac{1}{\nu}\Phi_+)\,]^{-1/2}\, [e^{\Psi_c(\frac{\partial}{dx})} P(x)]_{x=0} \qquad \text{mod}\ \frac{1}{\nu^\infty}\ ;$$

arg Hess $(\Phi - \frac{1}{\nu}\Phi_+)$ est la somme des arg. des valeurs propres de $\Phi - \frac{1}{\nu}\Phi_+$, qui appartiennent à $]\,0\,,\pi\,[$; $-\nu = \frac{|\nu|}{i}$ a pour arg $-\frac{\pi}{2}$.

Le second membre est une fonction de $\frac{1}{\nu}$, holomorphe pour $\frac{1}{\nu} = 0$, donc, mod $\frac{1}{\nu^\infty}$, un élément de F, dont la $\lim\limits_{\Phi_+\to 0}$ est, vu le développement de Taylor de cette fonction :

$$[\,\text{Hess}\ \Phi\,]^{-1/2}\, [e^{\frac{1}{\nu}\Phi^*(\frac{\partial}{\partial x})} P(x)]_{x=0} \qquad \text{mod}\ \frac{1}{\nu^\infty}\ ;$$

arg. Hess Φ a la définition 2.3 du chap. I , § 1.

Le premier membre de (3.10) est donc, mod $\frac{1}{\nu^\infty}$, un élément de F ; vu le lemme 3.2 , sa $\lim\limits_{\Phi_+\to 0}$ est

$$(\frac{|\nu|}{2\pi i})^{\ell/2} \int_X \epsilon(x)\, P(x)\, e^{\nu\Phi(x)}\, d^\ell x\ .$$

Donc :

(3.11) $$\int_X \epsilon(x)\, P(x)\, e^{\nu\Phi(x)}\, d^\ell x =$$

$$(\frac{2\pi i}{|\nu|})^{\ell/2}\, [\,\text{Hess}\ \Phi\,]^{-1/2}\, [\,e^{\frac{1}{\nu}\Phi^*(\frac{\partial}{\partial x})} P(x)\,]_{x=0} \qquad \text{mod}\ \frac{1}{\nu^\infty}\ ;$$

d'où le lemme 3.3, en approximant α à l'origine par sa série de Taylor limitée P et en appliquant le lemme 3.2.

Le lemme 3.3 prouve le 2°) du théorème 3 dans le cas particulier où la phase φ est une forme quadratique Φ ; nous déduirons le cas général de ce cas particulier en appliquant au reste d'un développement de Taylor limité le lemme suivant, dont la preuve est analogue à celle du lemme 3.1 :

LEMME 3.4 . - Soient :

$$\theta \in [o, 1] \; ; \; x \in X \; ;$$

$$\alpha : (\theta, x) \mapsto \alpha(\theta, x) \in \mathbb{C},$$

indéfiniment différentiable, à support compact, s'annulant $2N$ - fois quand x s'annule ;

$$\varphi : (\theta, x) \mapsto \varphi(\theta, x) \in \mathbb{R},$$

indéfiniment différentiable, tel que, sur $\operatorname{Supp} \alpha$, $\forall \theta$, $\varphi : x \mapsto \varphi(\theta, x)$ ait l'origine pour point critique unique, non-dégénéré . Alors :

$$\int_o^1 d\theta \int_X \alpha(\theta, x)\, e^{\nu \varphi(\theta, x)}\, d^\ell x = 0 \mod \frac{1}{\nu^N} .$$

Nous déduirons de ce lemme le suivant :

LEMME 3.5 . - Soit $\varphi : X \to \mathbb{R}$, indéfiniment différentiable, ayant l'origine pour point critique unique, non dégénéré, sa valeur critique étant nulle :

$$\varphi(o) = o \quad , \quad \varphi_x(o) = o \; , \quad \operatorname{Hess} \varphi(o) \neq o .$$

Soit

$$\varphi(x) = \Phi(x) + \Theta(x).$$

son développement de Taylor d'ordre 2 à l'origine :

Φ est une forme quadratique ; Θ s'annule 3 fois à l'origine .

Soit $\alpha : X \to \mathbb{C}$, indéfiniment différentiable, dont le support est compact et ne contient pas d'autre point critique que l'origine . Alors :

$$(3.13) \qquad \int_X \alpha(x)\, e^{\nu \varphi(x)}\, d^\ell x = \sum_{s=o}^{\infty} \frac{\nu^j}{j!} \int_X \Theta^j(x)\, \alpha(x)\, e^{\nu \Phi(x)}\, d^\ell x \qquad \mod \frac{1}{\nu^\infty} .$$

cette série converge dans $\mathbb{F}$, puisque, vu le lemme 3.3,

$$\nu^j \int_X \Theta^j(x)\, \alpha(x)\, e^{\nu \Phi(x)}\, d^\ell x = o \qquad \mod \nu^{-\frac{\ell}{2} - [\frac{j+1}{2}]}$$

où [...] désigne la partie entière de ..., c'est-à-dire le plus grand entier $\leq$... .

Preuve . - Vu (3.12) et la formule de Taylor :

$$e^{\nu\varphi} = \sum_{j=1}^{2N-1} \frac{\nu^j \Theta^j}{j\,!}\; e^{\nu\Phi} + \nu^{2N} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{2N-1}}{(2N-1)\,!}\, \Theta^{2N} e^{\nu(\Phi+\theta\Theta)}\, d\theta . \tag{3.14}$$

Le lemme 3.4 donne :

$$\nu^{2N} \int_X d^\ell x \int_0^1 (1-\theta)^{2N-1}\, \Theta^{2N}(x)\, \alpha(x)\, e^{\nu(\Phi+\nu\Theta)}\, d\theta = o \bmod \frac{1}{\nu^N} , \tag{3.15}$$

puisque Θ^{2N} s'annule $6N$-fois à l'origine ; quand N tend vers l'infini , (3.14) et (3.15) impliquent (3.13).

Preuve du 2°) du théorème 3 . - On peut remplacer u par une fonction f , de valeur (3.7) ; φ possède un point critique unique, non dégénéré ; il suffit de traiter le cas où ce point critique est l'origine et où la valeur critique est nulle. Alors, vu (3.13) et le lemme 3.3 :

$$\int_X \alpha(x)\, e^{\nu\varphi(x)}\, d^\ell x = \tag{3.16}$$

$$\left(\frac{2\pi i}{|\nu|}\right)^{\ell/2} (\text{Hess } \Phi)^{-\frac12} \sum_{r,j} \frac{1}{r!\, j\,!\, \nu^{r-j}} \left\{\Phi^{*r}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\Theta^j(x)\, \alpha(x)\right]\right\}_{x=o} \quad \bmod \frac{1}{\nu^\infty}$$

où $r, j \in N$. Notons $q = r - j$ l'exposant de ν . Puisque $\Theta(x) = o \bmod |x|^3$, la condition $\{...\}_{x=o} \neq o$ implique $3j \leq 2r$, c'est-à-dire $j \leq 2q$. Soit :

$$I_q(\varphi\, ;\, \alpha) = \sum_{j=o}^{2q} \frac{1}{(q+j)!\, j\,!} \left\{\Phi^{*q+j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\Theta^j(x)\, \alpha(x)\right]\right\}_{x=o} ,$$

donc, en particulier :

$$I_o(\varphi\, ;\, \alpha) = \alpha(o) ;$$

(3.16) s'écrit :

$$\int_X \alpha(x)\, e^{\nu\varphi(x)}\, d^\ell x = \left(\frac{2\pi i}{|\nu|}\right)^{\ell/2} (\text{Hess } \Phi)^{-\frac12} \sum_{q\in N} \frac{1}{\nu^q}\, I_q(\varphi\, ;\, \alpha) .$$

D'où le 2°) du théorème .

4. TRANSFORMATION DES FONCTIONS FORMELLES PAR LES ELEMENTS DE $Sp_2(\ell)$. - Tout $S \in Sp_2(\ell)$ induit un isomorphisme

$$S : C(X) \to C(X) \quad \text{(voir n° 1)} ,$$

dont la restriction à

$$F_o(X) \subset C(X) \quad \text{(théorème 2.2.)}$$

est un <u>monomorphisme</u>

(4.1) $$S : F_o(X) \to C(X) .$$

Les théorèmes 4.1, 4.2 et 4.3 précisent les propriétés de ce monomorphisme .

THEOREME 4.1 . - <u>Soit un espace 2-symplectique</u> Z , <u>une variété lagrangienne</u> V <u>de</u> Z , <u>un</u> 2-<u>repère</u> R' <u>de</u> Z <u>et</u>

$$S \in Sp_2(\ell) ;$$

$R = S R'$ <u>est donc un</u> 2-<u>repère de</u> Z (Chap. I , § 3 , n° 3) .

1°) <u>Il existe un isomorphisme , induit par</u> S <u>et noté</u> S :

(4.2) $$S : F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'} , R') \to F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'} , R)$$

<u>caractérisé par les deux propriétés suivantes</u> :

i) <u>il est local</u> ; c'est-à-dire : soit

$$\check{U}_{R'} \in F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'} , R') , \quad \check{U}_R = S\check{U}_{R'} \in F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'} , R)$$

alors la valeur $\check{U}_R(\nu , \check{z})$ de $\check{U}_R$ en $\check{z} \in \check{V}$ est fonction linéaire de la valeur de $\check{U}_{R'}$, et de ses dérivées en ce même point $\check{z}$;

ii) <u>le diagramme suivant est commutatif</u> :

$$\begin{array}{lccc}
(4.2) & F_o(\check V \setminus \check\Sigma_R \cup \check\Sigma_{R'}, R') & \xrightarrow{S} & F_o(\check V \setminus \check\Sigma_R \cup \check\Sigma_{R'}, R) \\
& \Big\downarrow \Pi_{R'} & & \Big\downarrow \Pi_R \\
(4.1) & F_o(X) & \xrightarrow{\quad S \quad} & C(X) \ ;
\end{array}$$

<u>il définit donc un morphisme</u>

(4.3) $$S \circ \Pi_{R'} = \Pi_R \circ S : F_o(\check V \setminus \check\Sigma_R \cup \check\Sigma_{R'}, R') \to F_o(X) .$$

2°) <u>La loi de composition des morphismes</u> (4.1) <u>et</u> (4.2) <u>est celle de</u> $Sp_2(\ell)$.

<u>Note 4.</u> - La restriction de (4.1)

(4.4) $$S : \Pi_{R'} F_o(\check V \setminus \check\Sigma_R \cup \check\Sigma_{R'}, R') \to \Pi_R F_o(\check V \setminus \check\Sigma_R \cup \check\Sigma_{R'}, R) \subset F_o(X)$$

est donc un isomorphisme ; alors que (4.2) est local,(4.4) n'est pas local, mais seulement ponctuel : si

$$u' \in \Pi_{R'} F_o(\check V \setminus \check\Sigma_R \cup \check\Sigma_{R'}, R') \quad , u = S u' ,$$

alors la valeur $u(\nu, x)$ en $x \in X$ est fonction linéaire de la valeur de u' et de ses dérivées en les points de l'ensemble fini $R'_X R_X^{-1} x$.

Le caractère local du morphisme (4.2) s'explicite comme suit :

THEOREME 4.2 . - <u>Soit</u>

(4.5) $$\check U_{R'} = \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} \alpha_r e^{\nu\varphi_{R'}} \in F_o(\check V \setminus \check\Sigma_R \cup \check\Sigma_{R'}, R') ;$$

<u>alors</u> :

$$\check U_R = S \check U_{R'} \in F_o(\check V \setminus \check\Sigma_R \cup \check\Sigma_{R'}, R) \ , \ \underline{\text{où}} \ R = S R' ,$$

<u>vaut en</u> $\check z$

(4.6) $$\check U_R(\nu, \check z) = \sum_{r\in\mathbb{N}} \left(\frac{d^\ell x'}{d^\ell x}\right)^{3r+1/2} \frac{1}{\nu^r} J_{R,r}(\check z ; \alpha) e^{\nu\varphi_R(\check z)}$$

<u>où</u> :

(4.7) $\quad x = \check{R}_X \check{z}$; $x' = \check{R}'_X \check{z}$; $[d^{\ell} x]^{1/2}$ <u>est défini</u> chap I , § 3 <u>coroll</u>. 3 ;

$J_{R,r}$ <u>est une fonction linéaire des dérivées d'ordres</u> $\leqq 2(r-s)$, <u>sur</u> V , <u>des</u> α_s $(s \leqq r)$; <u>ses coefficients sont des fonctions indéfiniment différentiables de</u> $\check{z} \in \check{V} \setminus \check{\Sigma}_{R'}$; <u>ces fonctions dépendent de</u> V, R' <u>et</u> S ;

$$J_{R,0}(\check{z}, \alpha) = \alpha_0(\check{z}) . \tag{4.8}$$

La formule (4.6) garde un sens pour tout $\check{U}_{R'} \in F(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_{R'}, R')$; et $\check{z} \in \check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}$; donc, évidemment :

THEOREME 4.3. - <u>La formule (4.6) définit un isomorphisme, induit par</u> S <u>et noté</u> S :

$$S : F(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}, R') \to F(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}, R) . \tag{4.9}$$

<u>La loi de composition de ces isomorphismes et celle du groupe</u> $Sp_2(\ell)$.

<u>Preuve des théorèmes précédents</u>. - Soit $\check{U}_{R'} \in F_0(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}, R')$ tel que la restriction

$$\check{R}'_X : \text{Supp}\, \check{U}_{R'} \to X \text{ de } \check{R}'_X : \check{V} \to X$$

soit un difféomorphisme, dont l'inverse sera noté R'^{-1}_X.

<u>Cas où</u> $S \notin \Sigma_{Sp_2(\ell)}$. - Alors $S = S_A$ (Ch. I , § 1 , n° 1) . Soit (4.5) l'expression de $\check{U}_{R'}$;

$$u' = \Pi_{R'} \check{U}_{R'}$$

vaut en x'

$$u'(\nu, x') = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} \alpha'_r(x') e^{\nu \varphi'(x')} \tag{4.10}$$

où :

$$\alpha'_r(x') = \alpha_r(R'^{-1}_X x') \ , \ \varphi'(x') = \varphi_{R'}(R'^{-1}_X x') \text{ pour } x' \in \operatorname{Supp} u' ,$$

$$\alpha'_r(x') = 0 \text{ pour } x' \notin \operatorname{Supp} u' = R'_X \operatorname{Supp} \check{U}'_R \ ;$$

puisque $u' \in F_o(X) \subset C(X)$, $u = Su' \in C(X)$; vu le ch. I, § 1 , (1.10) , l'expression de u en x est :

$$(4.11) \qquad u(\nu, x) = \left(\frac{|\nu|}{2\Pi i}\right)^{\ell/2} \Delta(A) \tilde{\int_X} \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} \alpha'_r(x') \, e^{\nu[A(x,x') + \varphi'(x')]} d^\ell x' .$$

Appliquons le théorème 3 à cette intégrale asymptotique.

i) Pour chaque $x \in X$, cherchons sur $\operatorname{Supp} u'$ <u>les points critiques</u> de la phase :

$$(4.12) \qquad X \ni x' \longmapsto A(x, x') + \varphi'(x') \in \mathbb{R} \ ;$$

c'est-à-dire les $x' \in \operatorname{Supp} u'$ tels que :

$$(4.13) \qquad A_{x'} + \varphi'_{x'} = 0 .$$

Notons :

$$(4.14) \qquad \check{z} = \check{R}'^{-1}_X x' \ ; \ \check{R}' \check{z} = (x', p') , \text{ c'est-à-dire } p' = \varphi'_{x'} \in X^* .$$

La relation (4.13) s'écrit

$$p' + A_{x'} = 0 \ ;$$

vu ch. I , § 1, (1.11) elle signifie l'existence de $p \in X^*$ tel que

$$(x, p) = s_A(x', p') \ ;$$

elle équivaut donc à :

$$x = R_X R'^{-1}(x', p') = \check{R}_X \check{R}'^{-1}(x', p') ,$$

c'est-à-dire, vu (4.14) , à :

$$x = \check{R}_X \check{z} .$$

Sur supp u', les points critiques de la phase (4.12) sont donc les points :

(4.15) $$x' = \check{R}'_X\,\check{z}\ ,\ \text{où}\ \ \check{z} \in \check{R}_X^{-1}\,x\ \cap \operatorname{Supp} U_{R'}\ .$$

Leur ensemble est fini, puisque Supp $\check{U}_{R'}$ est une partie compacte de $\check{V} \setminus \check{\sum}_R$ au voisinage de laquelle $\check{R}_X$ est, localement, un difféormorphisme .

ii) Cherchons les valeurs critiques de la phase (4.12) . Au point critique x' défini par (4.15), notons

$$\check{R}\,\check{z} = (x\,,p)\quad ,\ \check{R}'\,\check{z} = (x'\,,p')\ ;$$

d'après les formules précédentes

$$p = A_x\quad ,\ p' = -\,A_{x'}\ ;$$

puisque A est une forme quadratique en $(x\,,x')$, nous avons donc :

$$A\,(x\,,x') = \tfrac{1}{2} < p\,,x> - \tfrac{1}{2} < p'\,,x'>\ ,$$

c'est-à-dire, vu ch. I, § 3, (2.4) :

$$A\,(x\,,x') = \varphi_R\,(\check{z}) - \varphi_{R'}\,(\check{z})\ ,\ \text{où}\ \ \varphi_{R'}\,(\check{z}) = \varphi'\,(x')\ .$$

Au point critique x' défini par (4.15), la valeur de la phase (4.12) est donc $\varphi_R\,(\check{z})$.

iii) La racine carré du Hessien de cette phase (4.12) est donnée par le ch. I, § 3, (3.7) :

(4.16) $$\{\ \operatorname{Hess}_{x'}\,[\,A\,(x\,,x') + \varphi'\,(x')\,]\,\}^{1/2} = \Delta\,(A)\,\left[\frac{d^\ell x}{d^\ell x'}\right]^{1/2}\ ;$$

lors du calcul de $\operatorname{Hess}_{x'}$, x et x' sont considérés comme indépendants ; puis on leur donne les valeurs $x = \check{R}_X\,\check{z}$ et $x' = \check{R}'_X\,\check{z}$; au second membre, x et x' ont ces valeurs, c'est-à-dire sont les coordonnées locales d'un même point $\check{z} \in \check{V} \setminus \check{\sum}_R \cup \check{\sum}_{R'}$. De (4.16) résulte donc

$$\mathrm{Hess}_{x'}\,[\,A\,(x\,,x') + \varphi'\,(x')\,] \neq 0\,.$$

Par suite le théorème 3 s'applique au calcul de (4.11) .

iV) Fin de la preuve . - Cette application à (4.11) du théorème 3 donne :

$$(4.17) \qquad u\,(\nu\,,x) = \sum_{\check{z} \in \check{R}'^{-1}_X x} \check{U}_R\,(\nu\,,\check{z})\,.$$

où : $\check{U}_R$ a même support que $\check{U}_{R'}$;

$\check{U}_R$ vaut en $\check{z}$, en notant $x = \check{R}_X\,\check{z}$ et $x' = \check{R}'_X\,\check{z}$:

$$(4.18) \qquad \check{U}_R(\nu\,,\check{z}) = \Delta\,(A)\,[\,\mathrm{Hess}_{x'}\,(A+\varphi')\,]^{-\frac{1}{2}} \sum_{r \in N} \frac{1}{\nu^r}\, I_r(A+\varphi'\,;\alpha')\, e^{\nu \varphi_R(\check{z})}\,.$$

Or d'une part, (4.17) signifie :

$$u = \Pi_R\,\check{U}_R\;;$$

d'autre part, vu (4.16) , (4.18) équivaut à (4.6) ; en effet : vu $(3.3)_r$, $I_r\,(A + \varphi'\,;\,\alpha')$ est la valeur d'une fonction linéaire des dérivées d'ordres $\leq 2(r-s)$ des α'_s $(s \leq r)$; les coefficients de cette fonction sont des fonctions rationnelles des dérivées de φ' ; le dénominateur commun de ces fonctions rationnelles est $[\mathrm{Hess}_{x'}\,(A+\varphi')\,]^{3r}$, dont (4.16) donne la valeur .

Les théorèmes 4.1 et 4.2 s'appliquent donc aux $S_A \in Sp_2(\ell) \setminus \sum_{Sp_2}$.

Cas où $S \in \sum_{Sp_2}$. - Vu le ch. I , § 1 , lemme 2.5 , étant donné $S \in \sum_{Sp_2}$, il existe S_A et $S_{A'} \in Sp_2(\ell)\setminus\sum_{Sp_2}$ tels que

$$S = S_{A'}\,S_A\,.$$

Puisque les morphismes (4.1) et (4.2) se composent comme les éléments de $Sp_2\,(\ell)$

qui les induisent, les composés des morphismes induits par S_A et $S_{A'}$ ne dépendent que de $S = S_{A'} S_A$; ce sont donc des morphismes induits par S ; étant donné $\check{U}_{R'}$ tel que $\mathrm{Supp}\ \check{U}_{R'} \subset \check{V} \setminus \check{\Sigma}_{R'} \cup \check{\Sigma}_{SR'}$, on peut choisir S_A assez voisin de l'identité pour que $\check{\Sigma}_{S_A R'} \cap \mathrm{Supp}\ \check{U}_{R'} = \emptyset$; d'où les théorèmes 4.1 et 4.2 , qui impliquent le théorème 4.3.

5. NORME ET PRODUIT SCALAIRE DES FONCTIONS FORMELLES A SUPPORT COMPACT . - Soient :

V et V' deux variétés lagrangiennes de Z ;

$\check{V}$ et $\check{V}'$ leurs revêtements universels ; R un 2-repère de Z ;

φ_R et φ'_R les phases de $R\,V$ et $R\,V'$;

$$\check{U}_R = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r}\, \alpha_{R,r}\, e^{\nu \varphi_R} \in F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R) ,$$

(5.1)

$$\check{U}'_R = \sum_{s \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^s}\, \alpha'_{R,s}\, e^{\nu \varphi'_R} \in F_o(\check{V}' \setminus \check{\Sigma}'_R, R) ,$$

de projections

$$u = \Pi_R \check{U}_R \quad , \quad u' = \Pi_R \check{U}'_R .$$

<u>Définition</u> 5. - Sous l'hypothèse (5.1), <u>le produit scalaire</u> de $\check{U}_R$ et $\check{U}'_R$ est la classe asymptotique

$$(5.2) \qquad (\check{U}_R \check{|} \check{U}'_R) = (u | u') \in C ,$$

où $(u|u')$ est défini par l'intégrale asympotique (1.9) . Donc :

$(\check{U}_R \check{|} \check{U}'_R)$ et $(\check{U}'_R \check{|} \check{U}_R)$ sont imaginaires conjugués ;

l'inégalité de Schwarz s'applique :

(5.3) $$|(\check{U}_R \mid \check{U}'_R)| \leq (\check{U}_R \mid \check{U}_R)^{1/2} (\check{U}'_R \mid \check{U}'_R)^{\frac{1}{2}} .$$

La semi-norme de $\check{U}_R$ est $(\check{U}_R \mid \check{U}_R)^{1/2} = \|u\| \geq 0$;

cette semi-norme vérifie l'inégalité du triangle.

THEOREME 5.1. - 1°) La valeur de $(\check{U}_R \mid \check{U}'_R)$ ne dépend que de l'allure de $\check{U}_R$ et $\check{U}_{R'}$ en les couples de points de $\check{V}$ et $\check{V}'$ se projetant en un même point de $V \cap V'$.

Cette valeur est 0 si $V \cap V' = \emptyset$.

2°) Si $V = V'$, ce qui implique $\varphi_R = \varphi'_R$, alors

(5.4) $$(\check{U}_R \mid \check{U}'_R) =$$

$$\sum_{r,s} \frac{(-1)^s}{\nu^{r+s}} \int_{z \in V} \sum_{\check{z},\check{z}'} \alpha_{R,r}(\check{z})\, \overline{\alpha'_{R,s}(\check{z}')}\, e^{\nu[\psi(\check{z}) - \psi(\check{z}')]}\, d^{\ell}x \in F ,$$

où : $x = R_X z$, $d^{\ell}x > 0$;

$\check{z}$ et $\check{z}'$ sont les points de Supp $\check{U}_R$ et Supp $\check{U}'_R$ se projetant en z .

Dans (5.4) , $\psi(\check{z}) - \psi(\check{z}')$ est l'une des périodes de ψ :

$$c_\gamma = \frac{1}{2} \int_\gamma [z, dz] ,$$ où γ est un lacet de V.

Les phases de $(\check{U}_R \mid \check{U}'_R)$ sont donc ces périodes c_γ de ψ .

3°) Si V et V' sont transverses, alors

(5.5) $$\nu^{\ell/2}\,(\check{U}_R \,\check{|}\, U'_R) \in F\,.$$

Si V et V' sont transverses et se coupent en un seul point z, projection d'un seul point $\check{z}$ de Supp $\check{U}_R$ et d'un seul point $\check{z}'$ de Supp $\check{U}'_R$, alors :

(5.6) $$\left(\frac{|\nu|}{2\pi i}\right)^{\ell/2} (\check{U}_R \,\check{|}\, \check{U}'_R) =$$

$$\sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r}\,[\,\mathrm{Hess}\,(\varphi-\varphi')\,]^{-3r-1/2}\, P_r\,(\alpha_R\,,\alpha'_R)\ e^{\nu[\psi(\check{z})-\psi'(\check{z}')]}$$

où φ et φ' sont définis près de $R_X\, z$ par

$$\varphi\,(x) = \varphi_R\,(\check{R}_X^{-1} x \cap \check{V})\ ,\ \varphi'(x) = \varphi'_R\,(\check{R}_X^{-1} x \cap \check{V}')\,;$$

$$\mathrm{Hess}\,(\varphi-\varphi') = \{\mathrm{Hess}_x\,[\varphi\,(x) - \varphi'\,(x)]\}_{x=R_X z}\,;$$

P_r est une fonction sesquilinéaire des valeurs en $\check{z}$ et $\check{z}'$ des dérivées d'ordres $\le 2\,(r-s)$ des $\alpha_{R,s}$ et $\alpha'_{R,s}$ $(s \le r)$;

les coefficients de cette fonction dépendent de l'allure en z de V et

(5.7) $$P_o\,(\alpha_R\,,\alpha'_R) = \alpha_{R,o}\,(\check{z})\,\overline{\alpha'_{R,o}\,(\check{z}')}\,.$$

4°) [Invariance par $Sp_2(\ell)$]. — Soit $S \in Sp_2(\ell)$; sous l'hypothèse plus stricte que (5.1) :

$$\check{U}_R \in F_o\,(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{SR})\ ,\ \check{U}'_R \in F_o\,(\check{V}' \setminus \check{\Sigma}'_R \cup \check{\Sigma}'_{SR})$$

on a

(5.8) $$(U_R \,\check{|}\, \check{U}'_R) = (S\,\check{U}_R \,\check{|}\, S\,\check{U}'_R)\,.$$

Preuve de 1°), 2°) et 3°). — u et u' ont des expressions du type :

$$u(\nu, x) = \sum_{j \in J} v_j(\nu, x)\, e^{\nu \varphi_j(x)}, \quad \text{où} \quad v_j(\nu, x) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} v_{j,r}(x) ;$$

$$u'(\nu, x) = \sum_{k \in K} v'_k(\nu, x)\, e^{\nu \varphi'_k(x)}, \quad \text{où} \quad v'_k(\nu, x) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} v'_{k,r}(x) ;$$

J et K sont des ensembles finis. Vu le 1°) du théorème 3,

$$(u \mid u') = \tilde{\int_X} u(\nu, x)\, \overline{u'(\nu, x)}\, d^\ell x$$

ne dépend que de l'allure des couples $v_j\, e^{\nu \varphi_j}$, $v'_k\, e^{\nu \varphi'_k}$ en les points critiques de $\varphi_j - \varphi'_k$, c'est-à-dire en les points

$$x \in X \quad \text{tels que} \quad \varphi_{j,x} = \varphi'_{k,x} .$$

Autrement dit, $(\check{U}_R \mid \check{U}'_R)$ ne dépend que de l'allure de $\check{U}_R$ et $\check{U}'_R$ en les couples de points $(\check{z}, \check{z}') \in \check{V} \times \check{V}'$ tels que

$$\check{R}\, \check{z} = \check{R}\, \check{z}' = (x, \varphi_{j,x}) = (x, \varphi'_{k,x}) ;$$

ces couples sont les couples de points de $\check{V} \times \check{V}'$ se projetant en un même point z de $V \wedge V'$. D'où 1°), 2°) et, vu (3.2) et (3.3), 3°).

<u>Preuve de</u> 4°). - Le lemme 1.1 et le 1°) du théorème 4.1.

L'invariance par $Sp_2(\ell)$ de $(\check{U}_R \mid \check{U}_{R'})$, qu'énonce ce 4°) du théorème 5.1 pose le problème suivant :

donner des expressions invariantes des seconds membres de (5.4) et (5.6) . Les théorèmes 5.2 et 5.3 donneront de telles expressions $\mod \frac{1}{\nu}$.

Notations . – Soient η et η' des mesures régulières > 0 de $\check{V}$ et $\check{V}'$; définissons :

$$\arg \eta = \arg \eta' = 0 .$$

Supposons $\check{V}$ et $\check{V}'$ munis chacun d'une 2-orientation :

$$\text{si } \check{z} \in \check{V} , x = \check{R}_X \check{z} , \text{ alors :}$$

$$\frac{d^\ell(\check{R}_X \check{z})}{\eta} = \frac{d^\ell x}{\eta} \text{ est une fonction } \check{V} \to \mathbb{R} ,$$

nulle sur $\check{\Sigma}_R$, dont le ch. I , § 3 , coroll 3 a précisé l'argument :

$$\arg \frac{d^\ell(\check{R}_X \check{z})}{\eta} = \pi \, m_R(\check{z}) \mod 4\pi .$$

Définissons $\beta_o : \check{V} \to \mathbb{C}$ par :

$$(5.9) \qquad \beta_o(\check{z}) = \left[\frac{d^\ell(\check{R}_X \check{z})}{\eta} \right]^{1/2} \alpha_{R,o}(\check{z}) , \text{ où } \check{z} \in \check{V} .$$

Vu les formules (4.6) et (4.8) du théorème 4 , β_o <u>est invariant</u> quand , sans changer V ni V' , on remplace R par SR ; β_o sera nommée <u>amplitude lagrangienne</u> de $\check{U}_R$; cette amplitude dépend donc des choix de la mesure η de $\check{V}$ et de la 2-orientaiton de $\check{V}$.

En portant dans (5.4) l'expression (5.9) de $\alpha_{R,0}$ et $\alpha'_{R,0}$ on obtient :

THEOREME 5.2. - Supposons $V = V'$, ce qui implique $\psi = \psi'$; notons β_o et β'_o les amplitudes lagrangiennes de U_R et U'_R. Alors

(5.10) $$(\check{U}_R \mid \check{U}'_R) = \int_{z \in V} \sum_{\check{z},\check{z}'} \beta_o(\check{z}) \overline{\beta'_o(\check{z}')}\, e^{\nu[\psi(\check{z}) - \psi(\check{z}')]}\, \eta \mod \frac{1}{\nu}$$

où $\check{z}$ et $\check{z}'$ sont les points de $\operatorname{Supp} \check{U}'_R$ et $\operatorname{Supp} \check{U}'_R$ se projetant en z.

Notations (suite). - Notons ψ et ψ' les phases lagrangiennes de V et V' (ch. I, § 3, (1.7)). Faisons l'hypothèse 3°) du théorème 5.1 ; soient

λ_4 et $\lambda'_4 \in \Lambda_4(Z)$, tangents respectivement en $\check{z}$ et $\check{z}'$ aux variétés 2-orientée $\check{V}$ et $\check{V}'$; soient λ et λ' leurs images naturelles dans $\Lambda(Z)$; soit η_o (et η'_o) la mesure de λ (et λ'), invariante par translation et égale à η (et η') en $\check{z}$ (et $\check{z}'$). V et V' sont supposés transverses (3° du théorème 5.1) ; donc

(5.11) $$Z = \lambda \oplus \lambda' ; \ \eta_o \wedge \eta'_o \text{ est une mesure de } Z.$$

Vu (5.1) et le 1°) du théorème 5.1), les deux membres de (5.6) sont nuls si l'on ne suppose pas :

(5.12) $$\check{z} \in \check{V} \setminus \check{\Sigma}_R , \ \check{z}' \in \check{V}' \setminus \check{\Sigma}'_R$$

c'est-à-dire :

$$R\lambda \text{ et } R\lambda' \text{ transverses à } X^*.$$

En portant dans (5.6) l'expression (5.9) de $\alpha_{R,0}$ et $\alpha'_{R,0}$ on obtient, sous l'hypothèse (5.12) :

(5.13) $$\left(\frac{|\nu|}{2\pi i}\right)^{\ell/2} (\check{U}_R \mid \check{U}'_R) =$$

$$[\operatorname{Hess}(\varphi - \varphi')]^{-1/2} \left[\frac{\eta}{d^{\ell}(R_X \check{z})}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\overline{\left(\frac{\eta'}{d^{\ell}(R_X \check{z}')}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \beta_o(\check{z})\, \overline{\beta'_o(\check{z}')}\, e^{\nu[\psi(\check{z}) - \psi'(\check{z}')]} \mod \frac{1}{\nu}.$$

Le lemme 5.1 transforme cette formule en la suivante :

THEOREME 5.3. - Si V et V' sont munis chacun d'une 2-orientation, sont transverses et ne se coupent qu'en un point z, projection d'un seul point $\check{z}$ de $\operatorname{Supp} \check{U}_R$ et d'un seul point $\check{z}'$ de $\operatorname{Supp} \check{U}'_R$, alors :

$$(5.14) \qquad \left(\frac{|\nu|}{2\pi i}\right)^{\ell/2} (\check{U}_R \mid \check{U}'_R) =$$

$$\left|\frac{\eta_o \wedge \eta'_o}{d^{2\ell} z}\right|^{1/2} \beta_o(\check{z})\, \beta'_o(\check{z}')\, e^{\nu[\psi(\check{z}) - \psi'(\check{z}')] - \frac{\pi i}{2} m(\lambda'_4, \lambda_4)} \mod \frac{1}{\nu}.$$

où : m est l'indice de Maslov, défini mod 4 (Ch. I, §3, n°3) ; $\eta_o \wedge \eta'_o$ et $d^{2\ell} z$ sont les mesures de Z définies respectivement par (5.11) et (5.15).

LEMME 5.1. - 1°) La structure symplectique de Z définit sur Z une mesure invariante par les translations et par $Sp(Z)$:

$$(5.15) \qquad d^{2\ell} z = \frac{1}{\ell!} (dx \wedge dp)^{\ell} = (-1)^{\ell(\ell-1)/2} d^{\ell}x \wedge d^{\ell}p$$

où :

$$Rz = (x, p) \; ; \; dx \wedge dp = \sum_{j=1}^{\ell} dx^j \wedge dp_j ,$$

$\{x^j\}$ et $\{p_j\}$ étant des coordonnées duales de X et X^*.

2°) Sous l'hypothèse (5.12), avec les notations (5.9) :

$$(5.16) \qquad \left| \operatorname{Hess}(\varphi - \varphi') \frac{d^{\ell}(\check{R}_X \check{z})}{\eta} \frac{d^{\ell}(\check{R}_X \check{z}')}{\eta'} \right| = \left| \frac{d^{2\ell} z}{\eta_o \wedge \eta'_o} \right| ;$$

$$(5.17) \qquad \arg\left[\operatorname{Hess}(\varphi - \varphi') \frac{d^{\ell}(\check{R}_X \check{z})}{\eta} \overline{\left(\frac{d^{\ell}(\check{R}_X \check{z}')}{\eta'}\right)}\right] = \pi\, m(\lambda'_4, \lambda_4) \mod 4\pi .$$

Preuve de 1°). - La valeur de $dp \wedge dx$ sur un couple de vecteurs z, z' est $[z, z']$.

<u>Preuve de</u> (5.16) . - Puisque $R\lambda$ et $R\lambda'$ sont lagrangiens et transverses à X^* d'après (5.12), leurs équations sont du type :

$$R\lambda \;:\; p = \Phi_x(x) \;;\; R\lambda' \;:\; p = \Phi'_x(x) \,, \tag{5.18}$$

Φ et Φ' étant deux formes quadratiques : $X \to \mathbb{R}$.

Puisque λ et λ' sont transverses :

$$\text{Hess}\,(\Phi - \Phi') \neq 0 \,.$$

Vu (5.11) , tout $z \in Z$ se décompose d'une façon unique en la somme d'un vecteur de λ et d'un vecteur de λ' :

$$R\,z = (x + x' \,,\, \Phi_x(x) + \Phi_{x'}(x')) \in Z(\ell) \,,$$

où x et $x' \in X$ et sont uniques . D'où, vu (5.15) :

$$d^{2\ell} z = (-1)^{\ell(\ell-1)/2}\, d^\ell\,[x+x'] \wedge d^\ell\,[\Phi_x(x) + \Phi'_{x'}(x')]$$

$$= (-1)^{\ell(\ell-1)/2}\, d^\ell\,[x+x'] \wedge d^\ell\,[\Phi_x(x) - \Phi'_x(x)]$$

$$= (-1)^{\ell(\ell+1)/2}\ \text{Hess}\,(\Phi - \Phi')\ d^\ell x \wedge d^\ell x'$$

$$= (-1)^{\ell(\ell+1)/2}\ \text{Hess}\,(\Phi - \Phi')\ \frac{d^\ell(R_X \zeta)}{\eta_0}\ \frac{d^\ell(R_X \zeta')}{\eta'_0}\ \eta_0 \wedge \eta'_0$$

où $\zeta \in \lambda$, $\zeta' \in \lambda'$; d'où (5.16) .

<u>Preuve de</u> (5.17) . - Par définition [ch. I, § 3 ; coroll. 3 , (3.2) et (3.3)]

$$\arg \frac{d^\ell(\check{R}_X \check{z})}{\eta} = \pi\, m_R(\check{z}) = \pi\, m\,(X^*_4 \,,\, R\lambda_4) \qquad \text{mod } 4\pi \;;$$

donc :

$$\pi\, m\,(\lambda'_4 \,,\, \lambda_4) - \arg \frac{d^\ell(\check{R}_X \check{z})}{\eta} + \arg \frac{d^\ell(\check{R}_X \check{z}')}{\eta'} =$$

$$\pi\, m\,(\lambda_4', \lambda_4) - \pi\, m(X_4^*, R\lambda_4) + \pi\, m\,(X_4^*, R\lambda_4') =$$

$$\pi \ \mathrm{Inert}\ (X^*, R\lambda', R\lambda) \mod 4\pi ,$$

vu ch I , § 2 , (8.2) ; pour prouver (5.17) , il suffit donc, vu la définition de arg Hess [Ch I , § 1 , (2.1)],de prouver :

(5.19) $$\mathrm{Inert}\ (\Phi - \Phi') = \mathrm{Inert}\ (X^*, R\lambda', R\lambda) .$$

Preuve de (5.19) . - Ecrivons les équations de $R\lambda$, $R\lambda'$ et X^* :

$R\lambda : p = \Phi_x(x)$; $R\lambda' : p' = \Phi'_{x'}(x')$; $X^* : x'' = 0$

La définition d'Inert. (chap. I , § 2, n° 4) emploie :

$$z \in R\lambda, z' \in R\lambda' , z'' \in X^* \text{ tels que } z + z' + z'' = 0 ;$$

notons :

$$z = (x, p) , z' = (x', p') , z'' = (x'', p'') ,$$

d'où

$$x + x' = 0 , x'' = 0 , p + p' + p'' = 0 ,$$

$$[z'', z] = < p'', x > = - < p, x > - < p', x > =$$

$$- < \Phi_x(x) , x > + < \Phi'_x(x) , x > = 2\,\Phi'(x) - 2\,\Phi(x) ;$$

par suite :

$$\mathrm{Inert}\ (R\lambda , R\lambda' , X^*) = \mathrm{Inert}\ (\Phi' - \Phi)$$

D'où (5.19) , vu ch I , § 2 , (4.4) et la définition 2.3 , chap I , § 1 de l'inertie d'une forme .

6 . OPERATEURS DIFFERENTIELS FORMELS . - Définitions 6.1. - Soit Ω un ouvert de Z . Notons $F^o(\Omega)$ l'ensemble des fonctions formelles de phase nulle

(6.1) $$a^{\circ} = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} \alpha_r : \Omega \to F^{\circ}$$

telles que les

$$\alpha_r : \Omega \to \mathbb{C}$$

soient indéfiniment différentiables. Munissons l'espace vectoriel $F^{\circ}(\Omega)$ de la topologie que définit le système de voisinages $W(K, p, r, \epsilon)$ de l'origine que voici :

K est une partie compacte de Ω ; $p, r \in \mathbb{N}$, $\epsilon \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}_+$;

$a^{\circ} \in W(K, p, r, \epsilon)$ signifie que , sur K, les dérivées d'ordres $\leqq p$ des α_s $(s \leqq r)$ sont de modules $< \epsilon$.

Nous dirons que a° est un polynome si

$$(\nu, z) \mapsto a^{\circ}(\nu, z)$$

est un polynome en $\frac{1}{\nu}$ et en les 2ℓ coordonnées de z .

D'après le théorème de Weierstrass : l'ensemble des polynomes de $F^{\circ}(Z)$ est partout dense dans $F^{\circ}(\Omega)$.

$F^{\circ}(\Omega(\ell))$ se définit de même en remplaçant Ω par un domaine $\Omega(\ell)$ de $Z(\ell) = X \oplus X^*$.

Tout 1-repère R de Z (donc, a fortiori, tout 2-repère R) induit un isomorphisme

$$F^{\circ}(\Omega) \ni a^{\circ} \mapsto a^{\circ}_R \in F^{\circ}(\Omega(\ell)) , \quad \text{où} \quad \Omega(\ell) = R\,\Omega ,$$

défini par la formule :

(6.2) $$(\forall \nu, z) \quad a^{\circ}(\nu, z) = a^{\circ}_R(\nu, Rz) .$$

Les formules (3.4) du ch. I , § 1

(6.3) $$\begin{cases} a^{+}_R(\nu, x, p) = e^{\frac{1}{2\nu}\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}\right\rangle} a^{\circ}_R(\nu, x, p) \\ a^{-}_R(\nu, p, x) = e^{-\frac{1}{2\nu}\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}\right\rangle} a^{\circ}_R(\nu, x, p) \end{cases}$$

définissent deux automorphismes de $F^o(Z(\ell))$, inverses l'un de l'autre :

$$\overset{o}{a}_R \mapsto a^+_R \ , \ \overset{o}{a}_R \mapsto a^-_R \ .$$

La définition 6.2 des opérateurs différentiels formels repose sur le lemme suivant

LEMME 6.1. - Soit

$$(6.4) \qquad u = \alpha\, e^{\nu\varphi} \in F(X) \ , \quad \text{où} \quad \alpha = \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r}\, \alpha_r \ .$$

En un point critique x de la phase φ, on a :

$$\left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)^h u(\nu, x) = 0 \mod \frac{1}{\nu^{|h|/2}} \ .$$

<u>Preuve</u>. - Il suffit de traiter le cas où $\alpha = \alpha_o$. Alors en un point critique de φ :

$$\left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)^h u = \frac{1}{\nu^{|h|}}\, P_h\, e^{\nu\varphi} \qquad (h : \text{multi-indice})$$

où P_h est un polynome en les dérivées de α d'ordres $\in [0, |h|]$ et en les dérivées de $\nu\varphi$ d'ordres $\in [2, |h|]$, puisque $\varphi_x = 0$; chaque monôme de P_h est un produit de dérivées dont la somme des ordres est $|h|$. Donc ν, dans un tel monôme, a une puissance $\leq |h|/2$. D'où le lemme.

<u>Définition</u> 6.2. - Notons

$$(6.5) \qquad \Theta(y, x) = \varphi(x) - \varphi(y) - \langle \varphi_y(y), x - y \rangle$$

le reste, au point y, de la série de Taylor, limitée à l'ordre 1, de la phase φ de (6.4).

Associons à l'élément $\overset{o}{a}$ de $F^o(\Omega)$ et au repère R l'endomorphisme <u>local</u> a_R de $F(X)$ et $F_o(X)$, nommé <u>opérateur différentiel formel</u>, que définissent les deux formules équivalentes :

$$(6.6) \qquad (a_R u)(\nu, y) =$$

$$\sum_h \frac{1}{h!} \left\{ \frac{\partial^{|h|} a_R^+}{\partial p^h} (\nu, x, p) \left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)^h [\alpha(\nu,x)\, e^{\nu \Theta(y,x)}] \right\}_{\substack{x=y \\ p=\varphi_y(y)}} e^{\nu\varphi(y)} =$$

$$\sum_h \frac{1}{h!} \left\{ \left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)^h \left[\frac{\partial^{|h|} a_R^-}{\partial p^h} (\nu, p, x)\, \alpha(\nu,x)\, e^{\nu\Theta(y,x)} \right] \right\}_{\substack{x=y \\ p=\varphi_y(y)}} e^{\nu\varphi(y)}$$

Chacune de ces deux formules a un sens, vu le lemme 6.1, quand $(y, \varphi_y) \in \Omega(\ell)$: nous dirons que a_R <u>est défini</u> sur $\Omega(\ell) = R\,\Omega$.

<u>Preuve de l'équivalence de ces deux formules</u> . - La formule de Leibniz donne (cf. ch I, §1, preuve du lemme 3.1) :

$$\sum_h \frac{1}{h!} \left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)^h \left[\frac{\partial^{|h|} a_R^-(\nu,p,x)}{(\partial p)^h} v(\nu,x) \right] =$$

$$\sum_{j,k} \frac{1}{j!\,k!} \frac{\partial^{|2j+k|} a_R^-(\nu,p,x)}{(\partial p)^{j+k} (\nu \partial x)^j} \left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)^k v(\nu,x) =$$

$$\sum_k \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} a_R^+(\nu,x,p)}{(\partial p)^k} \left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)^k v(\nu,x) ,$$

car, vu (6.3) :

$$\sum_j \frac{1}{j!} \frac{\partial^{|2j|} a_R^-(\nu,p,x)}{(\partial p)^j (\nu\partial x)^j} = e^{\frac{1}{\nu}\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}\rangle} a_R^-(\nu,p,x) = a_R^+(\nu,x,p).$$

<u>Justification de la définition 6.2.</u> - Montrons qu'elle équivaut à celle du n° 1 quand a^{o} est un polynome , c'est-à-dire quand a_R est un opérateur différentiel classique, à coefficients polynomiaux en $(\frac{1}{\nu}, x)$. Dans ce cas, (6.6) signifie :

$$(a_R u)(\nu,x) = \left\{ a_R^+\left(\nu, x, p + \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right) [u(\nu,x)\, e^{-\nu\langle p, x-y\rangle}] \right\}_{\substack{y=x \\ p=\varphi_x}} ;$$

or :

$$a_R^+ (\nu , x , p + \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}) [u(\nu, x) e^{-\nu<p , x-y>}] =$$

$$e^{-\nu<p , x-y>} a_R^+ (\nu, x , \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}) u (\nu , x) ;$$

on a donc, au sens donné par le n° 1 à $a^+ (\nu, x , \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}) = a^- (\nu , \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x} , x)$:

$$(a_R u) (\nu , x) = a_R^+ (\nu , x , \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}) u (\nu , x) = a_R^- (\nu , \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x} , x) u (\nu , x) .$$

<u>Notations</u> . - Nous noterons :

$$(a_R u) (\nu , x) = a_R^+ (\nu , x , \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}) u (\nu , x) = a_R^- (\nu , \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x} , x) u (\nu , x) .$$

<u>Définition</u> 6.3. - Soit $V \subset \Omega$, $a^\circ \in F^\circ (\Omega)$. Notons a_R l'endomorphisme <u>local</u> unique de $F_\circ (\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R , R)$ tel que :

(6.7) $$a_R \Pi_R = \Pi_R a_R ;$$

a_R , étant local, se prolonge en un endomorphisme de $F (\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R , R)$ dont voici les propriétés :

THEOREME 6. - 1°) <u>L'opérateur différentiel formel</u> a_R <u>est local</u> (au sens du 1°) théorème 4.1) ; <u>donc</u>

$$\text{Supp} (a_R U_R) \subset \text{Supp } U_R \cap \text{Supp} (a^\circ) .$$

2°) <u>L'application</u> :

(6.8) $$F^\circ (\Omega) \times F (\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R , R) \ni (a_R , U_R) \mapsto a_R U_R \in F (\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R , R)$$

<u>est continue</u> .

3°) <u>Tout</u> $S \in Sp_2 (\ell)$ <u>transforme</u> a_R <u>en un opérateur</u>

$$a_{SR} = S a_R S^{-1}$$

défini comme suit :

$$a_{SR}(S\check{U}_R) = S(a_R\check{U}_R) \quad \text{pour tout} \quad \check{U}_R \in F(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{SR}, R).$$

a_R et son transformé a_{SR} sont associés à la même fonction a^o , qui vérifie :

$$(6.9) \qquad (\forall \nu, z)\ a^o(\nu, z) = a_R^o(\nu, Rz) = a_{SR}^o(\nu, SRz).$$

4°) Pour que les opérateurs différentiels formels a_R et b_R soient adjoints, c'est-à-dire pour que :

$$(\forall \check{U}_R, \check{U}'_R)\ (a_R\check{U}_R, \check{U}'_R) = (\check{U}_R, b_R\check{U}'_R),$$

il faut et suffit que :

$$(\forall \nu, z) \qquad b^o(\nu, z) = \overline{a^o(\nu, z)}.$$

5°) Si a_R et b_R sont deux opérateurs différentiels associés aux éléments a^o et b^o de $F^o(Z)$, alors leur composé $c_R = a_R \circ b_R$ est associé à l'élément c^o de $F^o(Z)$ défini par la formule

$$(6.10) \qquad c^o(\nu, z) = \left\{ e^{-\frac{1}{2\nu}\left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z'}\right]} \left[a^o(\nu, z)\, b^o(\nu, z')\right] \right\}_{z=z'},$$

où :

$$(6.11) \qquad \left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z'}\right] = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p'} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle \text{pour } Rz = (x, p), Rz' = (x', p')$$

est évidemment indépendant de R .

Preuve de 1°) . - La définition de a_R .

Preuve de 2°) . - La définition de a_R et des topologies de $F^o(\Omega)$ (n° 6) et de $F(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$ (n° 2) .

Preuve de 3°) 4°) et 5°) . - Le ch I , § 1 (théorème 3.1 , théorème 3.2 et lemme

3.2) , dans le cas particulier où a° est un polynôme . Ce cas particulier implique le cas général, puisque (6.8) est continu et que les polynomes sont partout denses dans $F^{\circ}(\Omega)$.

LES COROLLAIRES 3.1 (opérateur adjoint) et 3.2 (opérateur auto-adjoint) du ch I , § 1 s'appliquent évidemment aux opérateurs différentiels formels.

§ 2 . Analyse lagrangienne .

0. SOMMAIRE . - C'est en synthétisant les propriétés des fonctions formelles et des opérateurs différentiels formels, obtenues au § 1, que ce § 2 définit et étudie les opérateurs lagrangiens, les fonctions lagrangiennes et leur produit scalaire, c'est-à-dire les trois notions qui sont l'objet essentiel de cet article.

Le n°1 définit les opérateurs lagrangiens et étudie leurs inverses .

Le n°2 définit les fonctions lagrangiennes sur le revêtement $\check{V}$ d'une variété lagrangienne V ; leur produit scalaire $(.\check{|}.)$ est défini quand leurs supports sont compacts

Le n°3 peut alors définir les fonctions lagrangiennes sur V ; leur produit scalaire $(.|.)$ est défini quand l'intersection de leurs supports est compacte . Ce n°3 exige la donnée d'un nombre $\nu_o \in i\,[o, \infty[$: il emploie " la restriction" à la valeur ν_o de ν des divers termes des séries formelles définissant les expressions U_R d'une fonction formelle U .

Ce processus de définition des fonctions lagrangiennes sur V a une justification théorique, qui est la possibilité de définir leur produit scalaire $(.|.)$, et une justification pragmatique, que voici : c'est le processus de certains " calculs approchés". Par exemple, en physique quantique, la constante de Planck h est considérée comme un infiniment petit, $\frac{2\pi i}{h}$ jouant le rôle de notre variable $\nu \in i[1, \infty]$, sans que soient comparés les ordres de grandeur des valeurs numériques prises par les termes en jeu quand on donne à h sa valeur physique : on lui donne cette valeur physique quand on a achevé les calculs supposant h infiniment petit. Un autre exemple antérieur est celui de la mécanique céleste (cf. H. Poincaré)

H. Poincaré a expliqué comment un tel processus est un calcul approché, capable de prédire avec une précision extrême les phénomènes célestes à l'aide de séries divergentes, dont on ne conserve finalement que les premiers termes . V.P. Maslov veut, par ce processus, obtenir des "asymptotiques", c'est-à-dire faire des calculs approchés. Le Chap. III appliquera ce processus à des cas où il n'est certainement pas un calcul approché et retrouvera les résultats numériques qui sont en accord avec les résultats expérimentaux. Expliciter ce processus est donc bien "un problème qui se pose et non pas un problème qu'on pose" , au sens où l'entendait H. Poincaré .

1. OPERATEURS LAGRANGIENS . - Soit Z un espace symplectique et Ω un ouvert de Z.

Définition 1.1. - Soit $a^{\circ} \in F^{\circ}(\Omega)$ (Chap. II , § 1, défin. 6.1) ; soit

$$a_R = a^{+}_R \left(\nu , x , \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x} \right) = a^{-}_R \left(\nu , \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x} , x \right)$$

l'opérateur différentiel formel associé à a° et au 1 - repère R (Chap. II , § 1, défin. 6.2) . L'opérateur lagrangien associé à a° est l'ensemble $\{a_R\}$ de ces opérateurs différentiels formels a_R (a° donné ; R arbitraire) ; a_R est nommé expression de a dans le repère R .

Le théorème 2.3 justifiera cette terminologie .

Nous dirons que a est défini sur Ω ; définissons :

$$\mathrm{Supp}\ (a) = \mathrm{Supp}\ (a^{\circ}) .$$

Si

$$(\forall\ \nu , z) \quad a^{\circ} (\nu , z) = 1 ,$$

alors a est noté

$$a = 1 .$$

La formule (2.9) justifiera la

Définition 1.2 . - Deux opérateurs lagrangiens a et b associés à a° et $b^{\circ} \in F^{\circ} (\Omega)$ sont adjoints quand

$$(\forall\ \nu , z) \quad b^{\circ} (\nu , z) = \overline{a^{\circ} (\nu , z)} ,$$

c'est-à-dire (Chap. II , § 1 , théorème 6.1 4o)) quand $(\forall R)$ a_R et b_R sont adjoints.

Notation . - L'adjoint de a est noté a^{*} .

La formule (2.2) et la formule (1.2), dont elle résulte, justifieront la

Définition 1.3. - Le composé $a^\circ \circ b^\circ$ de a° et $b^\circ \in F^\circ(\Omega)$ vaut, par définition

$$(1.1) \qquad (a^\circ \circ b^\circ)(\nu, z) = \left\{ e^{-\frac{1}{2\nu}\left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z'}\right]} a^\circ(\nu, z) \cdot b^\circ(\nu, z') \right\}_{z=z'},$$

où $\left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z'}\right]$ est défini par (6.11) § 1.

Le composé $a \circ b$ des opérateurs lagrangiens a et b est l'opérateur lagrangien associé à $a^\circ \circ b^\circ$.

Vu le 5°) du théorème 6,

$$(1.2) \qquad (a \circ b)_R = a_R \circ b_R$$

La composition des a_R étant associative, la composition des a° et celle des a sont associatives. Il est facile de le vérifier directement en constatant que (1.1) implique :

$$(1.3) \qquad (a^\circ \circ b^\circ \circ c^\circ)(\nu, z) =$$

$$\left\{ e^{-\frac{1}{2\nu}\left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z'}\right] - \frac{1}{2\nu}\left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z''}\right] - \frac{1}{2\nu}\left[\frac{\partial}{\partial z'}, \frac{\partial}{\partial z''}\right]} a^\circ(\nu,z) \cdot b^\circ(\nu,z') \cdot c^\circ(\nu,z'') \right\}_{z=z'=z''}$$

Cette formule s'étend aisément à la composition d'un nombre quelconque d'éléments de $F^\circ(\Omega)$

Evidemment :

$$(1.4) \qquad \mathrm{Supp}\,(a \circ b) \subset \mathrm{Supp}\,(a) \cap \mathrm{Supp}\,(b) ;$$

$$(1.5) \qquad (a^\circ \circ b^\circ)(\nu, z) = a^\circ(\nu, z) \cdot b^\circ(\nu, z) \bmod \frac{1}{\nu},$$

le second membre étant le produit dans F° des valeurs de a° et b° ;

$$(1.6) \qquad (a^\circ \circ a^\circ)(\nu, z) = \left\{ \mathrm{ch}\frac{1}{2\nu}\left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z'}\right] a^\circ(\nu,z) \cdot a^\circ(\nu,z') \right\}_{z=z'}.$$

L'ensemble des opérateurs lagrangiens définis sur Ω est donc une algèbre non commutative $F^\circ(\Omega)$ sur l'algèbre F° des nombres formels de phase nulle ; $F^\circ(\Omega)$ possède un élément unité.

THEOREME 1.1. - (Inverse d'un opérateur lagrangien). - Pour que, dans l'algèbre des opérateurs lagrangiens définis sur Ω , l'opérateur a possède un inverse, il faut et suffit que

(1.7) $$(\forall\ z \in \Omega) \qquad a^{o}(\nu , z) \neq 0 \quad \mathrm{mod}\ \frac{1}{\nu} .$$

Rappelons que, par définition, $a^{o}(\nu , z)$ est la série formelle :

(1.8) $$a^{o}(\nu , z) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^{r}}\, a_{r}(z) ;$$

la condition (1.7) signifie :

$(1.7)^{bis}$ $$(\forall\ z \in \Omega) \qquad a_{o}(z) \neq 0 .$$

Preuve . - Les conditions équivalentes (1.7) et $(1.7)^{bis}$ sont nécessaires, vu (1.5).

Réciproquement, si ces conditions sont vérifiés, une inverse à droite a' de a est un opérateur associé à un élément

$$a'^{o}(\nu , .) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^{r}}\, a'_{r}(.)$$

de $F^{o}(\Omega)$ vérifiant :

(1.9) $$\{ e^{-\frac{1}{2\nu}[\frac{\partial}{\partial z} , \frac{\partial}{\partial z'}]}\, a^{o}(\nu , z)\, a'^{o}(\nu , z')\}_{z=z'} = 1 ,$$

c'est-à-dire :

$(1.10)_{o}$ $$a_{o}(z)\, a'_{o}(z) = 1$$

$(1.10)_{r}$ $$a_{o}(z)\, a'_{r}(z) = c_{r}(z) ,$$

où $c_{r}(z)$ est une combinaison linéaire des

$$[(\frac{\partial}{\partial z})^{s} a_{t}(z)]\ [(\frac{\partial}{\partial z})^{s'} a'_{t'}(z)]$$

tels que $0 \leq |s| = |s'| = r - t - t'$, $t' < r$; ces conditions déterminent a' .

a possède donc inverse à droite et de même un inverse à gauche, qui sont identiques puisque la composition des éléments de $F^{o}(\Omega)$ est associative. D'où le théorème.

La définition des produits scalaires (n° 2 et n° 3) emploiera la

Définition 1.4. - Une décomposition de l'unité est un ensemble $\{a_j\}$ d'opérateurs lagrangiens, définis sur Z, tels que :

$\bigcup_j \operatorname{Supp} a_j = Z$ soit un recouvrement localement fini de Z ;

$$\sum_j a_j = 1 \quad \text{(opérateur unité)} . \tag{1.11}$$

Cette décomposition est dite plus fine qu'un recouvrement ouvert $\bigcup_k \Omega_k = X$ de X quand tout $\operatorname{Supp} a_j$ appartient à au moins l'un des Ω_k.

THEOREME 1.2. - (Décomposition de l'unité). - 1°) Il existe des décompositions de l'unité plus fines qu'un recouvrement ouvert donné de X.

2°) On peut les choisir telles que leurs éléments a_j soient auto-adjoints.

3°) Plus précisement, on peut les choisir telles que chaque a_j soit du type :

$$a_j = b_j^* \circ b_j \,, \quad \operatorname{Supp} b_j = \operatorname{Supp} a_j \,,$$

b_j étant un opérateur lagrangien et b_j^* son adjoint.

Preuve de 1°) et 2°). - Il suffit de prouver le théorème quand on remplace les opérateurs a_j par des fonctions C^∞ $a_j^o : Z \to \mathbb{R}$, indépendantes de ν ; il est alors classique.

Preuve de 3°). - On peut choisir, les $b_j^o : Z \to \mathbb{R}$ étant C^∞ :

$$a_j^o = (b_j^o)^2, \text{ c'est-à-dire } a_j^o(z) = [b_j^o(z)]^2 \text{ dans } \mathbb{R} ;$$

d'où, vu (1.6) et (1.11) :

$$\operatorname{Supp} b_j^o = \operatorname{Supp} a_j^o \,; \quad \sum_j b_j^o \circ b_j^o = \sum_{r \in N} \frac{1}{\nu^{2r}} \beta_r \,, \text{ où } \beta_r : Z \to \mathbb{R} \,, \beta_o = 1 \,.$$

Cherchons

$$c^{o} = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^{2r}} \gamma_r \quad \text{où} \quad \gamma_r : Z \to \mathbb{R} \,, \; \gamma_o = 1 \,,$$

tel que

$$c^{o} \circ c^{o} = \sum_j b_j^{o} \circ b_j^{o} \,,$$

c'est-à-dire tel que

$$\{ \operatorname{ch} \frac{1}{2\nu} [\frac{\partial}{\partial z} , \frac{\partial}{\partial z'}] \sum_{t\,t'} \frac{1}{\nu^{2(t+t')}} \gamma_t(z) \gamma_{t'}(z') \}_{z=z'} = \sum_r \frac{1}{\nu^{2r}} \beta_r \,;$$

cette condition définit γ_r en fonction de β_r et des

$$[(\frac{\partial}{\partial z})^{s} \gamma_t(z)] \, [(\frac{\partial}{\partial z})^{s'} \gamma_{t'}(z)] \quad \text{tels que} \quad 0 \leq |s| = |s'| = 2(r-t-t') \,, 0 < t < r \,;$$

c^{o} existe donc, est unique et a un inverse, vu le théorème 1.1. Donc :

$$\operatorname{Supp} b_j = \operatorname{Supp} a_j \,; \; b_j = b_j^{*} \;\; ; \; c = c^{*} \,;$$

$$\sum_j b_j \circ b_j = c \circ c \,;$$

d'où

$$\sum_j \; (b_j \circ c^{-1})^{*} \circ (b_j \circ c^{-1}) = 1 \,, \; \operatorname{Supp} \; b_j \circ c^{-1} = \operatorname{Supp} a_j \,;$$

ce qui prouve le théorème .

2. FONCTIONS LAGRANGIENNES SUR $\check{V}$. - Soit Z un espace symplectique, muni d'une géométrie 2 - symplectique ; soit V une variété lagrangienne de Z et $\check{V}$ son revêtement universel .

Le théorème 4.1 du Chap. II , § 1 justifie la

<u>Définition</u> 2.1 . - Une <u>fonction lagrangienne</u> $\check{U}$ sur $\check{V}$ est constituée par la donnée, pour chaque 2 - repère R , d'une fonction formelle $\check{U}_R$ sur $V \setminus \Sigma_R$, ces fonctions formelles vérifiant

$$(\forall \, R \,,\, R') \qquad \check{U}_R = R\, R'^{-1} \, \check{U}_{R'} \quad \text{sur} \quad \check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'} \,;$$

$\check{U}_R$ est nommée expression de $\check{U}$ dans le repère R .

Le support de $\check{U}$, Supp $\check{U}$, est la partie de $\check{V}$ définie par la condition

$$(\forall R) \qquad \text{Supp } \check{U}_R = (\check{V} \setminus \check{\sum}_R) \cap \text{Supp } \check{U} \ ;$$

cette définition a un sens puisque $S = R R'^{-1}$ est ponctuel.

L'ensemble des fonctions lagrangiennes sur $\check{V}$ et le sous-ensemble de celles d'entre elles qui sont à support compact sont des espaces vectoriels sur F, notés $F(\check{V})$ et $F_0(\check{V})$. Leur dimension est infinie , comme le prouve le

THEOREME 2.1. - (Existence) . - <u>Tout</u> $\check{U}_{R'} \in F_0(\check{V} \setminus \check{\sum}_{R'}, R')$ <u>est l'expression dans</u> R' <u>d'une fonction</u> $\check{U}$ <u>lagrangienne sur</u> $\check{V}$, <u>à support compact</u> .

<u>Preuve</u> . - Soit R un 2 - repère quelconque ; notons :

$$S = R R'^{-1} \in Sp_2(\ell) \ ; \ \check{U}_R = S\, \check{U}_{R'} \ ;$$

$\check{U}'_R$ est une fonction formelle, définie sur $\check{V} \setminus \check{\sum}_R \cup \check{\sum}_{R'}$, identiquement nulle au voisinage de $\check{\sum}_{R'}$; prolongeons sa définition en convenant que

$$\check{U}_R = 0 \quad \text{sur } \check{\sum}_{R'} \setminus \check{\sum}_R \cap \check{\sum}_{R'} \ ;$$

$\check{U}_R$ devient une fonction formelle définie sur $\check{V} \setminus \check{\sum}_R$; $\check{U} = \{\check{U}_R\}$ est évidemment une fonction lagrangienne.

$$\text{Supp } \check{U} = \text{Supp } \check{U}_{R'} \ .$$

Le théorème 4.2 du Chap. II , § 1 prouve le

THEOREME 2.2 . - (Structure) . - Notons : ψ <u>la phase lagrangienne de</u> $\check{V}$; - <u>une mesure régulière</u> > 0 <u>de</u> V ; $x = \check{R}_x \check{z} \in X$, <u>où</u> $\check{z} \in \check{V}$; <u>convenons que</u> $[\eta]^{\frac{1}{2}} > 0$; <u>munissons</u> $\check{V}$ <u>d'une 2 - orientation</u> ; <u>rappelons que</u> $[d^\ell x]^{\frac{1}{2}}$ <u>est défini, au moyen de l'indice de Maslov, par le Corollaire</u> 3 <u>du Chap</u>. I , § 3.

<u>Nous avons, sur</u> $\check{V} \setminus \check{\sum}_R$:

<u>Note 2.1</u>. - Dans la formule 2.1 , l'exposant $3r + 1/2$ ne peut être diminué ; cf. Chap. III . § 3 .

(2.1) $$\check{U}_R(\nu, \check{z}) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \left(\frac{\eta}{d^{\ell} x}\right)^{3r+1/2} \frac{1}{\nu^r} \beta_{Rr}(\check{z})\, e^{\nu \varphi_R(\check{z})} ,$$

où les β_{Rr} sont des fonctions indéfiniment différentiables : $\check{V} \to \mathbb{C}$.

β_{R0} est indépendant de R, est noté β_o et est nommé : AMPLITUDE LAGRANGIENNE.

Le théorème 6 du Chap. II, § 1 justifie la

Définition 2.2. - Soit Ω un voisinage ouvert de V ; soient a un opérateur lagrangien sur Ω et U une fonction lagrangienne sur V ; soient R et R' des 2-repères ; $S = R R'^{-1} \in Sp_2(\ell)$; nous avons

$$a_R U_R = S(a_{R'} U_{R'}) ;$$

les fonctions formelles $a_R U_R$ constituent donc une fonction lagrangienne, qui sera notée : aU. Donc :

THEOREME 2.3. - L'algèbre des opérateurs lagrangiens a, b définis sur $\Omega \supset V$ opère sur l'espace vectoriel $F(\check{V})$ [et $F_o(\check{V})$] des fonctions lagrangiennes $\check{U}$ [à support compact] définies sur $\check{V}$;

(2.2) $$a(b\check{U}) = (a \circ b)\check{U} ;$$

(2.3) $\operatorname{Supp}(a\check{U}) = \operatorname{Supp}\check{U} \cap \check{\Pi}^{-1} \operatorname{Supp} a$, $\check{\Pi}$ étant la projection de $\check{V}$ sur V.

Définition 2.3. - Le produit scalaire $(.\,\check{|}\,.)$. - Soient $\check{U} \in F_o(\check{V})$ et $\check{U}' \in F_o(\check{V}')$. Supposons d'abord vérifiée la condition suivante :

(2.4) $$\begin{cases} \text{Il existe un 2-repère } R \text{ tel que :} \\ \operatorname{Supp}\check{U} \cap \check{\Sigma}_R = \emptyset , \quad \operatorname{Supp}\check{U}' \cap \check{\Sigma}'_R = \emptyset \end{cases}$$

Cette condition signifie :

$$\check{U}_R \in F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R) ; \quad \check{U}'_R \in F_o(\check{V}' \setminus \check{\Sigma}'_R, R) .$$

Définissons alors :

(2.5) $$(\check{U} \mid \check{U}) = (\check{U}_R \mid \check{U}'_R) \in C$$ pour tout R vérifiant (2.4) ;

le second membre de (2.5) est une classe asymptotique, vu la définition 5 du Chap. II , § 1 ; elle est indépendante de R vu le 4°) du théorème 5.1

Soient $\check{U}$ et $\check{U}'$ ne vérifiant plus (2.4) . Notons

(2.6) $$\sum_j a_j = 1 \ , \sum_{j'} a'_{j'} = 1$$

un couple de décompositions de l'unité (définition 1.3) assez fines (théorème 1.1) pour qu'à tout choix de (j , j') correspondent des 2 - repères $R_{j,j'}$ vérifiant la condition :

(2.7) $$\operatorname{Supp} a_j \cap \Sigma_{R_{j,j'}} = \emptyset \ , \ \operatorname{Supp} a'_{j'} \cap \Sigma_{R_{j,j'}} = \emptyset \ ;$$

$$(\forall\, j , j') \quad (a_j \check{U} \mid a'_{j'} \check{U}') \text{ est donc défini .}$$

Nous définirons

(2.8) $$(\check{U} \mid \check{U}') = \sum_{j,j'} (a_j \check{U} \mid a'_{j'} \check{U}') \in C \ ;$$

le second membre de (2.8) est indépendant du choix des décompositions (2.6) de l'unité : en effet, si

$$\sum_k b_k = 1 \quad , \ \sum_{k'} b'_{k'} = 1$$

est un second choix vérifiant (2.7) , alors :

$$\sum_{j,j'} (a_j \check{U} \mid a'_{j'} \check{U}') = \sum_{j,j'} (a_j \check{U}_{R_{j,j'}} \mid a'_{j'} \check{U}'_{R_{j,j'}})$$

$$\sum_{j,j',k,k'} (a_j \circ b_k \check{U}_{R_{j,j'}} \mid a'_{j'} \circ b'_{k'} \check{U}'_{R_{j,j'}}) = \sum_{k,k'} (b_k \check{U} \mid b'_{k'} \check{U}') \ ,$$

puisque $R_{j,j'}$ peut être remplacé par $R_{k,k'}$.

THEOREME 2.4. - (Produit scalaire). - 1°) Le produit scalaire $(.\check{|}.)$ est une fonction sesquilinéaire sur F°, à valeurs dans C (classe d'équivalence asymptotique), des couples, $\check{U}$ et $\check{U}'$, de fonctions lagrangiennes, sur $\check{V}$ et $\check{V}'$, à supports compacts.

$(\check{U}\check{|}\check{U}')$ et $(\check{U}'\check{|}\check{U})$ sont imaginaires conjugés et ne dépendent que de l'allure de $\check{U}$ et $\check{U}'$ en les couples de points de V et V' se projetant en un même point de $V \cap V'$.

Si $V \cap V' = \emptyset$, alors $(\check{U}\check{|}\check{U}') = 0$

(2.9) $(a\check{U}\check{|}\check{U}') = (\check{U}\check{|}a^{*}\check{U}')$, si les opérateurs lagrangiens a et a^{*} sont adjoints.

2°) Si $V = V'$, ce qui implique $\psi = \psi'$, alors :

$$(2.10) \qquad (\check{U}\check{|}\check{U}') \in F,$$

les phases de $(\check{U}\check{|}\check{U}')$ étant les périodes de ψ (c'est-à-dire les valeurs de $\frac{1}{2}\int_{\gamma}[z, dz]$ sur les lacets γ de V) ;

$$(2.11) \qquad (\check{U} | \check{U}') = \int_{z \in V} \sum_{\check{z},\check{z}'} \beta_{o}(\check{z})\,\overline{\beta'_{o}(\check{z}')}\, e^{\nu[\psi(\check{z}) - \psi(\check{z}')]}\,\eta \quad \mathrm{mod}\ \frac{1}{\nu}$$

où les notations sont celles du théorème 2.2 et où $\check{z}$ et $\check{z}'$ sont les points de Supp $\check{U}$ et Supp $\check{U}'$ se projetant en z sur V. On a

$$(2.12) \qquad 0 \leq (\check{U}\check{|}\check{U}) \in F.$$

La semi-norme de $\check{U}$,

$$0 \leq (\check{U} | \check{U})^{\frac{1}{2}} \in C,$$

vérifie l'inégalité du triangle et celle de Schwarz :

$$|(\check{U}\check{|}\check{U}')| \leq (\check{U}\check{|}\check{U})^{\frac{1}{2}}.(\check{U}' | \check{U}')^{\frac{1}{2}}, \text{ dans } C.$$

3°) Si V et V' sont transverses, alors ($\check{V}$ et $\check{V}'$ étant munies de 2-orientations) :

(2.13) $$\nu^{\ell/2}(\check{U} \,|\, \check{U}) \in F ;$$

(2.14) $$\left(\frac{|\nu|}{2\pi i}\right)^{\ell/2}(\check{U} \,|\, \check{U}') =$$

$$\sum_{z \in V \cap V'} \left|\frac{\eta_o \wedge \eta'_o}{d^{2\ell} z}\right|^{1/2} \sum_{\check{z},\check{z}'} \beta_o(\check{z})\, \overline{\beta'_o(\check{z}')}\, e^{\nu[\psi(\check{z}) - \psi(\check{z}')] - \frac{\pi i}{2} m(\lambda'_4, \lambda_4)} \mod \frac{1}{\nu}$$

où : $\eta_o \wedge \eta'_o$ et $d^{2\ell} z$ sont les mesures de Z définies respectivement par (5.11) et (5.15) (Ch. II, § 1) au point $z \in V \cap V'$;

$\check{z}$ et $\check{z}'$ sont les points de Supp $\check{U}$ et Supp $\check{U}'$ se projetant en z ;

m est l'indice de Maslov défini mod.4 (Ch I, § 3 n° 3) ;

λ_4 et λ'_4 sont les plans lagrangiens 2-orientés tangents à $\check{V}$ et à $\check{V}'$ en $\check{z}$ et $\check{z}$.

Preuve de 1°) . - La définition 2.3, le 1°) du théoréme 5.1 (Ch. II, §1) , le 4°) du théorème 6 (Ch. II , § 1) et la définition 1.2 des opérateus lagrangiens adjoints .

Preuve de (2.10) . - La définition 2.3 et (5.4) (Ch. II § 1) .

Preuve de (2.11) . - Le théorème 5.2 (Ch. II, § 1) et le fait que $a\,\check{U} \mod \frac{1}{\nu}$ est le produit de $\check{U}$ par la fonction a^o_o .

Preuve de (2.12) . - Employons une décomposition de l'unité (3°) du théorème 1.2)

$$\sum_j b^*_j \circ b_j = 1 ,$$

assez fine pour qu'existe (V_j) un repère R_j tel que

$$\text{Supp } b_j \cap \Sigma_{R_j} = \emptyset , \quad \text{Supp } b_j \cap \Sigma'_{R_j} = \emptyset$$

Nous avons :

$$(\check{U} \,|\, \check{U}) = \sum_j (b_j \check{U}_{R_j} \,|\, b_j \check{U}_{R_j}) \geq 0 \text{ (Ch. II , § 1 , Déf. 5) .}$$

Preuve de l'inégalité de Schwarz . - Nous avons, vu la définition 5 du Ch. II , § 1, l'inégalité du triangle et l'inégalité de Schwarz dans R (Ch. II, § 1 , (5.3)) et dans C (Ch. II, § 1, Note 1) :

$$|(\check{U} \,\check{|}\, \check{U}')| = |\sum_j (b_j \check{U}_{R_j} \,\check{|}\, b_j \check{U}'_{R_j})| \leq \sum_j |(b_j \check{U}_{R_j} \,\check{|}\, b_j \check{U}'_{R_j})| \leq$$

$$\sum_j (b_j \check{U}_{R_j} \,\check{|}\, b_j \check{U}_{R_j})^{1/2} . (b_j \check{U}'_{R_j} \,|\, b_j \check{U}'_{R_j})^{1/2} \leq [\sum_j (b_j \check{U}_{R_j} | b_j \check{U}_{R_j})]^{1/2} . [\sum_j (b_j \check{U}'_{R_j} | b_j \check{U}'_{R_j})]^{1/2}$$

$$= (\check{U} \,|\, \check{U})^{\frac{1}{2}} . (\check{U}' \,\check{|}\, \check{U}')^{\frac{1}{2}} .$$

L'inégalité du triangle résulte de celle de Schwarz.

Preuve de 3°) . - Le théorème 5.3 (Ch II , § 1)

Note 2 . 2 - Si $V = V'$, $(\check{U} \,|\, \check{U}')$ est défini par le second membre de (5.4) (Ch II , § 1) sous l'hypothèse

$$\mathrm{Supp}\ \check{U} \cap \check{\Sigma}_R = \emptyset \ , \ \mathrm{Supp}\ \check{U}' \cap \check{\Sigma}_R = \emptyset \ .$$

Si cette hypothèse n'est pas satisfaite, ce second membre est une intégrale divergente vu le théorème 2.2 (structure).

Donc, la définition 2.3 de $(. \,\check{|}\, .)$ donne un sens à cette intégrale divergente.

3. FONCTIONS LAGRANGIENNES SUR V . - Nous nous intéressons, non pas aux fonctions sur $\check{V}$, c'est-à-dire multiformes sur V, mais aux fonctions sur V ; leur définition exigera le choix d'un nombre $\nu_o \in i\,]\,o\,,\infty\,[$.

Le premier groupe d'homotopie $\pi_1[V]$ opère sur $\check{V}$: V est le quotient de $\check{V}$ par $\pi_1[V]$; évidemment :

$$(\forall R)\ \pi_1[V] \text{ laisse } \check{\Sigma}_R \text{ invariant ;}$$

$$(\forall \gamma \in \pi_1[V])\quad \psi(\gamma \check{z}) = \psi(\check{z}) + c_\gamma \ , \ \varphi_R(\gamma \check{z}) = \varphi_R(\check{z}) + c_\gamma \ , \text{ où } c_\gamma = \tfrac{1}{2}\int_\gamma [z\,,dz]\ ;$$

c'est-à-dire :

$$\psi \circ \gamma^{-1} = \psi - c_\gamma \,,\ \varphi_R \circ \gamma^{-1} = \varphi_R - c_\gamma \,.$$

Définition 3.1 . - Le groupe $\pi_1[V]$ d'automorphismes de $F(\check{V})$. - Soient

$$\check{U}_R = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_{R,r}}{\nu^r} e^{\nu \varphi_R} \in F(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R) \ ;\ \gamma \in \pi_1[V] . \tag{3.1}$$

Définissons le transformé de $\check{U}_R$ par γ comme étant, non pas

$$\check{U}_R \circ \gamma^{-1} = e^{-\nu c_\gamma} \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_{R,r} \circ \gamma^{-1}}{\nu^r} e^{\nu \varphi_R} \notin F(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$$

mais

$$\gamma \check{U}_R = e^{(\nu - \nu_o) c_\gamma} \check{U}_R \circ \gamma^{-1} = e^{-\nu_o c_\gamma} \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_{R,r} \circ \gamma^{-1}}{\nu^r} e^{\nu \varphi_R} \in F(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_{R'}, R) . \tag{3.2}$$

Evidemment

$$\gamma'(\gamma \check{U}_R) = (\gamma' \gamma) \check{U}_R \ ;$$

$\pi_1[V]$ est donc un groupe d'automorphismes de $F(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$.

De la définition (3.2) et de la définition de l'opérateur $S \in Sp_2(\ell)$ par le Ch II , § 1 (lemme 1.1, 1°) du théorème 4.1, théorème 4.3) résulte évidemment que S et γ commutent : si

$$\check{U}_{R'} \in F(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_{R'} \cup \check{\Sigma}_R, R') \quad \text{et} \quad R = SR' ,$$

alors :

$$\gamma(S \check{U}_{R'}) = S(\gamma \check{U}_{R'}) .$$

Si les $\check{U}_R$ sont les expressions d'une même fonction $\check{U}$ lagrangienne sur $\check{V}$, alors les $\gamma \check{U}_R$ sont donc les expressions d'une même fonction lagrangienne sur $\check{V}$; nous la notons $\gamma \check{U}$; donc $(\gamma \check{U})_R = \gamma \check{U}_R$ et $\pi_1[V]$ est un groupe d'automorphismes de $F(\check{V})$

Evidemment ($\forall \gamma \in \pi_1[V]$; $\forall \check{U} \in F(\check{V})$; $\forall$ a opérateur lagrangien) :

$$\operatorname{Supp}(\gamma \check{U}) = \gamma \operatorname{Supp} \check{U} \ ; \tag{3.4}$$

γ et a commutent, c'est-à-dire :

$$(3.5) \qquad \gamma\,(a\,\check{U}) = a\,(\gamma\,\check{U})\ ;\ \gamma\, a\, \gamma^{-1} = a\,.$$

<u>Définition</u> 3.2. - Une <u>fonction lagrangienne sur</u> V est une fonction U lagrangienne sur $\check{V}$ et possédant les trois propriétés suivantes, qui sont évidemment deux à deux équivalentes et donc indépendantes du choix du 2-repère R :

i) U est <u>invariante par</u> $\pi_1[V]$, c'est-à-dire :

$$(\forall\ \gamma \in \pi_1[V])\quad \gamma\, U = U \quad [\text{ cf. déf. } 3.1]\,;$$

ii) $(\forall\ r \in \mathbb{N})\quad e^{-\nu_o\, {}^c\gamma}\,\alpha_{R,r} \circ \gamma^{-1}$ <u>est indépendant de</u> $\gamma \in \pi_1[V]$;

iii) la fonction, nommée <u>restriction de</u> U_R <u>à</u> ν_o :

$$(3.6) \qquad U_R^o = \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_{R,r}}{\nu^r}\, e^{\nu_o \varphi_R} = U_R\, e^{(\nu_o - \nu)\varphi_R}$$

prend la même valeur en tous les points de $\check{V}$ ayant même projection sur V et est donc une fonction

$$U_R^o : V \setminus \Sigma_R \to F^o\,.$$

Le support d'une fonction lagrangienne U est invariant par $\pi_1[V]$; c'est donc l'ensemble des points de $\check{V}$ se projetant sur une partie fermée de V, qui sera nommée support de U dans V et notée Supp U ; donc :

$$(\forall\ R)\quad \mathrm{Supp}\ U_R^o = \mathrm{Supp}\ U \setminus \Sigma_R \cap \mathrm{Supp}\ U\,.$$

L'ensemble des fonctions lagrangiennes sur V [et à supports compacts dans V] est un espace vectoriel sur l'algèbre F^o ; il est noté $F(V)$ [et $F_o(V)$].

Evidemment, vu (3.5) :

THEOREME 3.1. - <u>L'algèbre des opérateurs lagrangiens</u> a, b <u>définis sur</u> $\Omega \supset V$ <u>opère sur l'espace</u> $F(V)$ <u>des fonctions lagrangiennes sur</u> V ;

$$(a \circ b)\, U = a\,(b\, U)\ ;\ \mathrm{Supp}\,(a\, U) \subset \mathrm{Supp}\ a \cap \mathrm{Supp}\ U\ .$$

Le produit scalaire des fonctions lagrangiennes sur V sera défini au moyen du lemme et des définitions que voici .

LEMME 3.1 . – Il existe un épimorphisme naturel :

$$F_0\,(\check{V}) \ni \check{U} \mapsto U = \sum_{\gamma \in \pi_1[V]} \gamma\, \check{U} \in F_0\,(V)\ . \tag{3.7}$$

<u>Preuve</u> . – La définition (3.7) a un sens : elle définit $U\,(z)$ par une somme finie, car $(\forall\, \check{z} \in \check{V})$ le nombre des γ tels que $\gamma\, \check{z} \in \mathrm{Supp}\, \check{U}$ est fini . Evidemment, U est indéfiniment différentiable, à support compact .

Pour prouver que (3.7) est un épimorphisme, il suffit, puisque γ commute avec les décompositions de l'unité (Déf. 1.4 ; Théor. 1.2) , de prouver ceci : tout $U \in F_0\,(V)$, de support appartenant à une partie simplement connexe ω de V , est l'image par (3.7) d'un élément $\check{U}$ de $F_0\,(\check{V})$. Voici cette preuve.

La partie de $\check{V}$ qui se projette sur ω a pour composantes connexes les transformées $\gamma\,\check{\omega}$ de l'une quelconque $\check{\omega}$ de ces composantes par les éléments γ de $\pi_1\,[V]$. Soit $\check{U}$ la fonction lagrangienne sur $\check{V}$ nulle hors de $\check{\omega}$, égale à U dans $\check{\omega}$; $\gamma\,\check{U}$ est donc nulle hors de $\gamma\,\check{\omega}$ et égale à $U = \gamma\, U$ dans $\gamma\,\check{\omega}$; d'où :

$$U = \sum_{\gamma \in \pi_1[V]} \gamma\, \check{U}\ .$$

Explicitons la notion de restriction à ν_0 .

<u>Définition</u> 3.3 . – Soit I l'idéal de F qu'engendrent ses éléments

$$e^{\nu\varphi} - e^{\nu_0 \varphi} \qquad (\varphi \in R)\ ;$$

tout élément de I s'écrit de façon unique :

$$\sum_{j \in J} \alpha_j\,(e^{\nu\varphi_j} - e^{\nu_0 \varphi_j}) \qquad (J : \text{fini}\ ;\ \alpha_j \in F^{\circ}\ ;\ \varphi_j \in R)\ ;$$

F est somme directe de I et F° . Nous nommons <u>restriction de</u> F <u>à</u> ν_0 la projection de F sur F^o :

$$F \ni u = \sum_j \alpha_j \, e^{\nu \varphi_j} \mapsto u^o = \sum_j \alpha_j \, e^{\nu_o \varphi_j} \in F^o = F / I.$$

En particulier, si $u \in F(V)$, alors <u>la restriction de</u> $U_R(\nu, \check{z}) \in F$ <u>à</u> ν_o <u>est la valeur</u>, en la projection z de $\check{z}$ sur V, $U_R^o(\nu, z)$, <u>de la restriction</u> U_R^o de U_R à ν_o.

<u>Définition</u> 3.4. – Nommons <u>sous-module</u> de C tout sous-groupe additif M de C ayant les propriétés suivantes :

$$F \subset M \subset C \; ; \; M = \bar{M} \text{ (imaginaire conjugué) } ;$$

la multiplication dans l'algèbre C fait de M un module <u>sur l'algèbre</u> F. En particulier :

$$u \in M, \; \varphi \in \mathbb{R} \text{ impliquent } u \, e^{\nu \varphi} \in M.$$

Soit N le sous-module de M dont les élements sont les

$$\sum_{j \in J} u_j \left(e^{\nu \varphi_j} - e^{\nu_o \varphi_j}\right) \quad (j : \text{fini} \; ; \; u_j \in M ; \varphi_j \in \mathbb{R}).$$

Nous nommons <u>restriction</u> de M <u>à</u> ν_o le quotient :

$$M \to M / N = M^o \; ;$$

M^o est un module sur l'algèbre F^o ; puisque $N = \bar{\mathbf{N}}$, la notion d'<u>éléments conjugués</u> de M^o est induite par celle d'éléments imaginaires conjugués de M.

<u>Exemple</u> 3.1. – Si $M = F$, alors $M^o = F^o$.

<u>Exemple</u> 3.2. – Notons $\frac{1}{|\nu|^s} F$, ... les images de F, ... par le multiplication :

$$C \ni \tilde{f} \to \frac{1}{|\nu|^s} \tilde{f} \in C \quad (s \in \mathbb{R}_+).$$

Si $M = \frac{1}{|\nu|^s} F$, alors $M^o = \frac{1}{|\nu|^s} F^o$.

<u>Définition</u> 3.5. – <u>Le produit scalaire</u> $(\cdot \mid \cdot)$. – Soient V et V' deux

variétés lagrangiennes de Z ; soit M un sous-module de C (Déf. 3.4) tel que

$$(3.8) \qquad (\forall\ \check{U} \in F_o(\check{V})\ ,\ \check{U}' \in F_o(\check{V}'))\quad (\check{U} \mid \check{U}') \in M\ .$$

Quels que soient

$$U \in F_o(V)\ ,\quad U' \in F_o(V')\ ,$$

il existe, vu le lemme 3.1 ,

$$\check{U} \in F_o(\check{V})\ ,\ \check{U}' \in F_o(\check{V}') \quad \text{tels que}\quad U = \sum_{\gamma \in \pi_1[V]} \gamma\, \check{U}\ ,\ U' = \sum_{\gamma' \in \pi_1[V']} \gamma'\, \check{U}'.$$

Par définition, <u>le produit scalaire de</u> U et U' <u>est</u> :

$$(3.9) \qquad (U \mid U') = (\check{U} \mid \check{U}')^{o}\ ,\quad \text{restriction de } (\check{U} \mid \check{U}') \in M \text{ à } \nu_o\ ;$$

ce produit scalaire est donc <u>à valeurs dans</u> M^o.

Cette définition à un sens, vu le

LEMME 3.2 . - $(\check{U} \mid \check{U}')^o$ ne dépend que de U, U' .

<u>Preuve</u> . - Soit une décomposition de l'unité (Déf. 1.4) :

$$\sum_j b_j^* \circ b_j = 1\ ;$$

on a :

$$(\check{U} \mid \check{U}') = \sum_j (b_j \check{U} \mid b_j \check{U}')\ ;$$

il suffit donc de prouver que $(b_j \check{U} \mid b_j \check{U}')^o$ ne dépend que de

$$\sum_{\gamma \in \pi_1[V]} \gamma\, b_j \check{U} = b_j U \quad \text{et} \quad \sum_{\gamma' \in \pi_1[V']} \gamma'\, b_j \check{U}' = b_j U'\ .$$

Vu le théorème 1.2, il suffit donc de prouver le lemme quand les conditions suivantes sont toutes deux vérifiées :

i) il existe un 2 - repère R tel que :

$$\check{U}_R \in F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R\ ,\ R)\ ,\ \check{U}'_R \in F_o(\check{V}' \setminus \check{\Sigma}'_R\ ,\ R)\ ;$$

ii) il existe deux parties ouvertes, simplement connexes ,

ω de V et ω' de V' que R_X projette injectivement dans X et qui contiennent les supports de U et U' :

$$\text{Supp } U \subset \omega \subset V \quad ; \quad \text{Supp } U' \subset \omega' \subset V' .$$

La partie de $\check{V}$ qui se projette sur ω a pour composantes connexes des ouverts de $\check{V}$:

$$\gamma \check{\omega} \ , \quad \text{où} \quad \gamma \in \pi_1 [V] \quad (\text{cf.preuve du lemme } 3.1)$$

Etant donné $x \in \text{Supp } U$, nous notons :

z le point unique de ω tel que $R_X z = x$;

$\check{z}$ le point unique de $\check{\omega}$ se projetant sur V en z .

Vu la définition 2.3, vu, au Ch. II , § 1 , (1.9) et déf 5, on a :

$$(3.10) \qquad (\check{U} \mid \check{U}') = \tilde{\int_X} (\Pi_R \check{U}_R) (\nu , x) \cdot \overline{(\Pi_R \check{U}'_R) (\nu , x)} \, d^{\ell} x \ ;$$

par définition (Ch II, § 1 , théor. 2.1) , si $x \in \text{Supp } (\Pi_R \check{U}_R) = \text{Supp } U$:

$$(\Pi_R \check{U}_R) (\nu , x) = \sum_{\gamma \in \pi_1 [V]} \check{U}_R (\nu , \gamma^{-1} \check{z}) \ ,$$

c'est-à-dire, vu (3.2) :

$$(\Pi_R \check{U}_R) (\nu , x) = \sum_{\gamma \in \pi_1 [V]} e^{(\nu_o - \nu) c_\gamma} \gamma \check{U}_R (\nu , \check{z}) \ ;$$

portons dans (3.10) cette expression de $\Pi_R \check{U}_R$ et l'expression analogue de $\Pi_R \check{U}'_R$; nous obtenons la formule :

$$(3.11) \qquad (\check{U} \mid \check{U}') = \tilde{\int_X} U_R (\nu , \check{z}) \cdot \overline{U'_R (\nu , \check{z}')} \, d^{\ell} x \qquad \text{mod. } N .$$

sous les hypothèses i) et ii) , en employant la définition 3.4 de N .

Cette formule (3.11) prouve le lemme 3.2 et sert à prouver le théorème suivant, dont le 1°) est évident :

THEOREME 3.2. - (Produit scalaire). - 1°) Soient V et V' deux variétés lagrangiennes de Z. Le produit scalaire $(.\,|\,.)$ est une fonction sesquilinéaire sur F^o des couples, U et U', de fonctions lagrangiennes sur V et V'.

$(U \mid U')$ est défini quand $\mathrm{Supp}\, U \cap \mathrm{Supp}\, U'$ est compact ;

$(U \mid U') \in M^o$, module sur F^o dépendant de V et V' ;

$(U \mid U')$ ne dépend que de l'allure de U et U' au voisinage de $\mathrm{Supp}\, U \cap \mathrm{Supp}\, U'$;

$(U \mid U') = 0$ quand $\mathrm{Supp}\, U \cap \mathrm{Supp}\, U' = \emptyset$;

$(U \mid U')$ et $(U' \mid U)$ sont conjugués ;

$(a\,U \mid U') = (U \mid a^* U')$ quand a et a^* sont des opérateurs lagrangiens adjoints

2°) Supposons $V = V'$. Alors :

$(U \mid U') \in F^o$ (algèbre des nombres formels de phase nulle) ;

(3.12) $$0 \leq (U \mid U)\text{, l'égalité impliquant } U = 0 \text{ ;}$$

la norme de U :

(3.13) $$0 \leq \|U\| = (U \mid U)^{\frac{1}{2}} \in F^o$$

vérifie l'inégalité du triangle et celle de Schwarz :

$$\|U + U'\| \leq \|U\| + \|U'\| \quad , \quad |(U \mid U')| \leq \|U\|.\|U'\| \text{ , dans } F^o \text{ ;}$$

si les égalités sont atteintes, alors U et U' sont proportionnelles : ou bien $U = 0$, ou bien il existe $\alpha \in F^o$ tel que $U' = \alpha\, U$: Notons :

(3.14) $$U_R^o(\nu, z) = \alpha_{R,0}(\check{z})\, e^{\nu_o \varphi_R(\check{z})} \quad \mathrm{mod}\ \frac{1}{\nu}\ ,$$

(3.15) $$= \left(\frac{\eta}{d^{\ell}x}\right)^{1/2} \beta_o(\check{z})\, e^{\nu_o \varphi_R(\check{z})} \quad \mathrm{mod}\ \frac{1}{\nu}\ ,$$

$\check{z}$ désignant l'un quelconque des points de $\check{V}$ se projetant en z sur V ; (3.15) suppose $\check{V}$ muni d'une 2-orientation qui définit l'indice de Maslov $m_R(\check{z})$ et $\arg d^{\ell}x$ (Ch. I, § 3, coroll. 3) ; l'amplitude lagrangienne β_o est indépendante du choix de R, mais dépend du choix de η, mesure régulière de V telle que

$\arg \eta = 0$. Alors, des notations analogues étant employées pour U' et x désignant $R_X z$,

$$\alpha_{R,0}(\check{z})\,\overline{\alpha'_{R,0}(\check{z})}\,d^{\ell}x = \beta_o(\check{z})\,\overline{\beta'_o(\check{z})}\,\eta \tag{3.16}$$

est une forme différentielle régulière sur V , indépendante de R et

$$(U \mid U') = \int_V \alpha_{R,0}(\check{z})\,\overline{\alpha'_{R,0}(\check{z})}\,d^{\ell}x = \int \beta_o(\check{z})\,\overline{\beta'_o(\check{z})}\,\eta \mod \frac{1}{\nu} \tag{3.17}$$

3°) Supposons V et V' transverses . Alors :

$$\nu^{\ell/2}(U \mid U') \in F^o ;$$

$$\left(\frac{|\nu|}{2\pi i}\right)^{\ell/2}(U \mid U') =$$

$$= \sum_{z \in V\cap V'} [\mathrm{Hess}(\varphi - \varphi')]^{-1/2}\,\alpha_{R,0}(\check{z})\,\overline{\alpha'_{R,0}(\check{z}')}\,e^{\nu_o[\varphi_R(\check{z}) - \varphi_R(\check{z}')]} \mod \frac{1}{\nu} \tag{3.18}$$

$$= \sum_{z \in V\cap V'} \left|\frac{\eta_o \wedge \eta_o}{d^{2\ell}z}\right|^{1/2} \beta_o(\check{z})\,\overline{\beta'_o(\check{z}')}\,e^{\nu_o[\psi(\check{z}) - \psi'(\check{z}')] - \pi i m(\lambda'_4, \lambda_4)} \mod \frac{1}{\nu} \tag{3.19}$$

dans (3.18) φ et φ' sont définies près de Rz par

$$\varphi(x) = \varphi_R(\check{R}_X^{-1} x \cap \check{V}) \ , \ \varphi'(x) = \varphi'_R(\check{R}^{-1} x \cap V') ;$$

$$\mathrm{Hess}(\varphi - \varphi') = \{\mathrm{Hess}_x[\varphi(x) - \varphi'(x)]\}_{x = R_X z} ;$$

dans (3.19) : ψ est la phase lagrangienne de V ;

$\lambda_4 \in \Lambda_4(Z)$ est le plan lagrangien 2-orienté tangent à $\check{V}$ en $\check{z}$;

m est l'indice de Maslov défini mod 4 (Ch I , §3, n° 3) ;

$\eta_o \wedge \eta'_o$ et $d^{2\ell}z$ sont les mesures de Z définies par (5.11) et (5.15) (Ch. II , § 1) .

Preuve de (3.16). - La formule (5.9) du Ch II, § 1.

Preuve de (3.17). - L'emploi d'une décomposition de l'unité $\sum_j b_j^* \circ b_j = 1$ suffisamment fine montre qu'il suffit de prouver (3.17) sous les hypothèses i) ii) qu'emploie la preuve du lemme 3.2 et qui impliquent (3.11). Puisque $V = V'$, cette formule (3.11) s'écrit

$$(3.20) \qquad (U \mid U') = \int_X U_R^o(\nu, \check{z}) \overline{U'^o_R(\nu, \check{z})} \, d^\ell x \in F^o$$

et prouve donc (3.17).

Preuve de (3.12). - L'emploi de la même décomposition de l'unité montre qu'il suffit de prouver (3.12) dans ce cas où (3.20) vaut ; (3.12) est alors évident, ainsi que la précision suivante : si $U \neq 0$, alors :

$$(U \mid U) = \sum_{r=2s}^{\infty} \frac{\alpha_r}{\nu^r} \quad \text{où} \quad s \in \mathbb{N}, \ \alpha_{2s} > 0 .$$

Preuve de (3.13). - La formule précédente et le 2°) du théorème 2.3, Chap. II, §1.

Preuve de l'inégalité de Schwarz. - Soient U et U' non proportionnels ; il existe donc $\alpha \in F^o$ et $s \in \mathbb{N}$ tels que

$$U = \alpha U' + \frac{1}{\nu^s} U'' ,$$

les amplitudes lagrangiennes β'_o et β''_o de U' et U'' n'étant pas proportionnelles; un calcul classique donne

$$\|U\|^2 . \|U'\|^2 - |(U \mid U')|^2 = \frac{1}{|\nu|^{2s}} [\|U'\|^2 . \|U''\|^2 - |(U' \mid U'')|^2] .$$

Il suffit donc de prouver que le second membre est > 0 dans F^o. Autrement dit, il suffit de prouver que U et U' satisfont à l'inégalité stricte de Schwarz, quand leurs amplitudes lagrangiennes β_o et β'_o ne sont pas proportionnelles ; on a alors, vu (3.17) :

$$\|U\|^2 . \|U'\|^2 - |(U \mid U')|^2 = \int_V |\beta_o(z)|^2 \eta . \int_V |\beta'_o(z)|^2 \eta - \left|\int_V \beta_o(z) \overline{\beta'_o(z)} \eta\right|^2 \quad \text{mod} \ \frac{1}{\nu}$$

donc, d'après l'inégalité de Schwarz classique :

$$\|U\|^2 . \|U'\|^2 - |(U \mid U')|^2 = \alpha_0 \mod \frac{1}{\nu} \quad \text{où} \quad 0 < \alpha_0 \in \mathbb{R} ,$$

donc, vu le théorème 2.3 du Chap. II , § 1 :

$$|(U \mid U')| < \|U\| . \|U'\| .$$

Preuve de l'inégalité du triangle . - L'inégalité de Schwarz.

Preuve de 3°) . - Une décomposition de l'unité montre qu'il suffit de traiter le cas où $(U \mid U')$ a l'expression (3.11) . Alors (3.18) résulte du 3°) du théorème 5.1 (Chap. II, § 1) et (3.19) du théorème 5.3 (Chap. II , § 1) .

Note 3 . - En l'absence de l'hypothèse i) (cf. Preuve du lemme 3.2) l'intégrale figurant au second membre de (3.20) diverge (Cf. Théorème 2.2 , structure des fonctions lagrangiennes). La définition 3.5 de $(. \mid .)$ donne donc un sens à cette intégrale divergente .

4 . LE GROUPE $Sp_2(Z)$ des automorphismes de la géométrie 2 - symplectique de Z (cf. Chap I , § 3 , n° 4) transforme évidemment les opérateurs lagrangiens en opérateurs lagrangiens ; les composés d'un élément de ce groupe et de fonctions lagrangiennes sont des fonctions lagrangiennes, cette composition laissant invariant le produit scalaire.

§ 3 . Systèmes lagrangiens homogènes à une inconnue.

0 . SOMMAIRE. - L'existence de l'inverse a^{-1} d'un opérateur lagrangien a, sous les hypothèses qu'énonce le théorème 1.1 du § 2 , montre que les systèmes lagrangiens homogènes à une (§ 3) ou plusieurs (§ 4) inconnues sont ceux dont l'étude n'est pas banale. Ces § 3 et § 4 amorcent cette étude ; les chapitres III et IV la concluront dans deux cas spéciaux : l'équation de Schrödinger ; l'équation de Dirac, qui est un système à deux inconnues.

1 . LES VARIETES LAGRANGIENNES SUR LEQUELLES SONT DEFINIES LES SOLUTIONS LAGRANGIENNES DE $a\ U = 0$. - Soit a l'opérateur lagrangien associé à la fonction formelle

$$a^o : \Omega \to F^o \quad (\Omega \text{ partie ouverte de } Z),$$

valant en z :

$$a^o(\nu, z) = \sum_{r \in N} \frac{1}{\nu^r} a^o_r(z) .$$

THEOREME 1 . <u>Le support d'une solution</u> U <u>de l'équation</u> $a\ U = 0$ <u>est une variété lagrangienne</u> V <u>sur laquelle</u> $a^o_o = 0$.

<u>Preuve</u> . - Soit un point de V où $a^o_o \neq 0$; remplaçons Ω par un voisinage de ce point sur lequel $a^o_o \neq 0$; alors a^{-1} existe sur Ω et $a\ U = 0$ implique donc $U = 0$ sur Ω.

<u>Nous supposerons</u> que a^o_o <u>est à valeurs réelles</u> et que la partie de Ω où $a^o_o = 0$ est une <u>hypersurface régulière</u>, W, d'équation :

$$W : H(z) = 0 \quad , \quad H_z \neq 0 .$$

V est donc une sous-variété de W telle que :

$$\dim V = \ell \quad ; \quad d\,[\, z\,, dz\,] = 0 \ \text{sur} \ V.$$

V s'étudie en appliquant à la forme de Pfaff $[\, z\,, dz\,]$ la théorie d'E. Cartan des formes différentielles [5].

2. RAPPEL DE LA THEORIE D' E. CARTAN [5] DES FORMES DE PFAFF. - Rappelons d'abord des résultats bien connus, exposés en particulier par le traité de Mme Y. Choquet-Bruhat [6].

Soit ω une forme différentielle définie sur Z, qui, au cours de ce n° 2, pourra être une variété quelconque, indéfiniment différentiable et de dimension finie. E. Cartan exprime localement ω au moyen d'un nombre minimal de fonctions

$$f_1\,, \ldots\,, f_n : Z \to \mathbb{R}\ ;$$

le nombre n de ces fonctions est appelé rang de ω ; ces fonctions sont les intégrales premières (indépendantes et en nombre maximal) d'un système complètement intégrable d'équations de Pfaff, appelé système caractéristique de ω ; E. Cartan explicite ce système.

Autrement dit : ce sytème caractéristique équivaut à

$$d f_1 = \ldots = d f_n = 0\ ;$$

il existe une forme différentielle $\bar{\omega}$ telle que

$$\omega\,(z\,, dz) = \bar{\omega}\,(f\,(z)\,,\ d f\,(z)),\ \text{où}\ \ f = (f_1\,, \ldots\,, f_n)\ .$$

Soit ω une forme de Pfaff définie sur Z (c'est-à-dire une forme différentielle de degré 1 en les différentielles) ; le système caractéristique de $d\omega$ s'écrit, en notant i_ξ le produit intérieur [6] par un vecteur ξ de Z :

$$(2.1) \qquad (\forall\ \xi) \qquad i_\xi\, d\,\omega\ (z\,, dz) = 0\ ;$$

le rang de $d\omega$ est pair ; notons-le $2n$; soit localement

$$f = (f_1\,, \ldots\,, f_{2n})$$

2n intégrales premières indépendantes de (2.1) ; il existe donc une forme différentielle $\bar{\omega}'$ telle que

$$d\,\omega(z\,,d\,z) = \bar{\omega}'\ (f\ (z)\,,df\ (z)) :$$

évidemment $d\,\bar{\omega}' = 0$; donc, localement : $\bar{\omega}' = d\,\bar{\omega}$; autrement dit : <u>il existe</u> localement <u>une forme de Pfaff</u> $\bar{\omega}$, <u>à</u> $2n$ <u>variables, et une fonction</u> f_o telles que

$$(2.2)\qquad \omega\,(z\,,d\,z) = d\,f_o(z) + \bar{\omega}\,(f\ (z)\,,df\ (z)) \quad \text{où}\quad f = (f_1,\dots,f_{2n}) .$$

Le rang de ω est évidemment $2n$ ou $2n+1$ suivant que f_o est fonction composée de $f = (f_1\,,\dots,f_{2n})$ ou non ; dans le premier cas, on peut choisir $\bar{\omega}$ tel que $f_o = 0$.

Enonçons des compléments moins connus qu'E. Cartan [ ] (Chap. XII, Les équations qui admettent un invariant intégral relatif) a apportés à ce résultat et rappelons leurs démonstrations.

LEMME 2 . - Soit ω une forme de Pfaff ; soit $2n$ le rang de $d\,\omega$; il existe localement, sur Z, $2n+1$ fonctions numériques $f_o\,,\dots,f_{2n}$ telles que

$$(2.3)\qquad \omega\,(z\,,d\,z) = d\,f_o(z) + \sum_{j=1}^{n} f_{2j-1}\,(z)\,d\,f_{2j}(z) \ ;$$

$f_1\,,\dots,f_{2n}$ sont $2n$ intégrales premières indépendantes du système caractéristique de $d\,\omega$.

<u>Note</u> 2.1. $f_1\,,\dots,f_{2n}$ n'est pas un système arbitraire d'intégrales premières de ce système caractéristique : voir la note 2.2 .

<u>Preuve</u> . - Soit f_2 une intégrale première du système caractéristique de $d\,\omega$; la restriction de $d\,\omega$ aux hypersurfaces $f_2 =$ const. est de rang pair $< 2n$, donc de rang $\leqq 2\,(n-1)$. Soit f_4 une intégrale première du système caractéristique de cette restriction ;... ; la restriction de $d\,\omega$ aux variétés

$$f_2 = \text{const.}\ ,\dots,\ f_{2j} = \text{const.}$$

est de rang $\leqq 2\,(n-j)$ et est donc nulle pour une valeur J de j telle que $J \leqq n$. Autrement dit :

$$d\,\omega = 0 \ \text{ sur les variétés }\ f_2 = \text{const.}\ ,\dots,\ f_{2J} = \text{const.}$$

Il existe donc une fonction f_o telle que

$$\omega = d f_o \mod (d f_2, \dots, d f_{2J}),$$

c'est-à-dire telle que :

$$\omega = d f_o + \sum_{j=1}^{J} f_{2j-1} \, d f_{2j} .$$

Or $d\omega$ est de rang $2n$; donc : $J = n$; $f_1, \dots, f_{2n}$ sont $2n$ intégrales premières indépendantes du système caractéristique de ω.

E. Cartan a complété ce lemme en employant comme suit la notion de parenthèse de Poisson.

<u>Définition</u> 2. - Soit ω une forme Pfaff, mise sous la forme (2.3) . Soient g et g' deux intégrales premières du sytème caractéristique de $d\omega$; ce sont donc des fonctions composées :

$$z \to g(z) = G[f_1(z), \dots, f_{2n}(z)] \; ; \; z \to g'(z) = G'[f_1(z), \dots, f_{2n}(z)]$$

il existe donc une fonction composée du même type, appelée <u>parenthèse de Poisson</u> de g et g' , notée (g, g') , telle que

$$n\,(d\omega)^{n-1} \wedge dg \wedge dg' = (g, g')\,(d\omega)^n \; ; \tag{2.4}$$

cette parenthèse

$$(g, g') = -(g', g) ,$$

qui est donc bilinéaire et indépendante du choix de $f = \{f_1, \dots, f_{2n}\}$, a l'expression suivante, qui emploie un tel choix :

$$(g, g')(z) = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial G}{\partial f_{2j-1}} \frac{\partial G'}{\partial f_{2j}} - \frac{\partial G'}{\partial f_{2j-1}} \frac{\partial G}{\partial f_{2j}} \right]_{f = f(z)} \; ; \tag{2.5}$$

on en déduit que tout triplet g, g', g'' de telles intégrales premières vérifie <u>l'identité de Jacobi</u> :

$$(g, (g', g'')) + (g', (g'', g)) + (g'', (g, g')) = 0 .$$

g et g' sont dits <u>en involution</u> quand $(g, g') = 0$.

<u>Note</u> 2.2. - Dans l'expression (2.3) de ω , vu (2.5), <u>les couples</u> f_j, f_k $(1 \leqq j \leqq k)$ <u>sont en involution, à l'exception des couples</u> f_{2j-1}, f_{2j} ;

ceux-ci vérifient :

$$(f_{2j-1}, f_{2j}) = 1 .$$

Note 2.3. - Soient $g_1, \dots, g_q$ des intégrales premières indépendantes du système caractéristique de $d\omega$; la restriction de ω à une variété

$$g_1 = \text{const.}, \dots, g_q = \text{const.}$$

réduit le rang de $d\omega$ d'un nombre pair, qu'E. Cartan [ ], Chap. XII, n° 124, a explicité : c'est $2(q-r)$, si toutes les parenthèses de Poisson (g_j, g_k) $(j, k \in \{1, \dots, q\})$ sont fonctions composées de $g_1, \dots, g_q$ et si $2r$ est le rang, sur cette variété, de la forme extérieure

$$\sum_{j,k} (g_j, g_k)\ \xi_j \wedge \xi_k$$

des variables $\xi_1, \dots, \xi_q$.

D'où, en particulier $(q = n, r = 0)$, le théorème suivant, qui éclairera le début de l'étude de l'équation de Schrödinger et permettra d'établir le théorème 3.1, qui éclaire lui aussi cette étude.

THEOREME 2. - Soit ω une forme de Pfaff ; soit $2n$ le rang de $d\omega$.
1) Le système caractéristique de $d\omega$ possède localement des n-uples $\{f_2, f_4, \dots, f_{2n}\}$ d'intégrales premières indépendantes, en involution deux à deux.
2) Etant donné l'un de ces n-uples, une quadrature donne localement $n+1$ fonctions $f_0, f_1, f_3, \dots, f_{2n-1}$ telles que ω ait l'expression (2.3) ; $f_1, f_2, f_3, \dots f_{2n}$ sont des intégrales premières indépendantes du système caractéristique de $d\omega$.

Preuve de 1°). - Le lemme 2 et la note 2.2.

Preuve de 2°). - Par hypothèse

$$df_2 \wedge df_4 \wedge \dots \wedge df_{2n} \neq 0; \qquad (\forall j, k) \qquad (d\omega)^{n-1} \wedge df_{2j} \wedge df_{2k} = 0 ;$$

autrement dit, il existe des formes différentielles Θ_j telles que

$$(d\omega)^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} \Theta_j \wedge df_2 \wedge \ldots \widehat{df_{2j}} \ldots \wedge df_{2n} \; ;$$

($\widehat{\ }$ supprime ce qu'il coiffe) ; cette relation exprime l'existence de formes différentielles θ_j telles que

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} \theta_j \wedge df_{2j} \; ;$$

c'est-à-dire la condition

$$d\omega = 0 \quad \text{mod.} \; (df_2 , \ldots, df_{2n})$$

c'est-à-dire l'existence d'une fonction f_o telle que

$$\omega = df_o \quad \text{pour} \quad f_2 = \text{const.} \; , \ldots , f_{2n} = \text{const.}$$

c'est-à-dire l'existence de $n+1$ fonctions $f_o , f_1 , f_3 , f_{2n-1}$ vérifiant (2.3) .

3. VARIETES LAGRANGIENNES DE L'ESPACE SYMPLECTIQUE Z ET DE SES HYPERSURFACES.-

Notons :

(3.1) $$\omega(z , dz) = \tfrac{1}{2} [z , dz] ,$$

c'est-à-dire, dans un repère R :

(3.2) $$\omega(z , dz) = \tfrac{1}{2} \langle p , dx\rangle - \tfrac{1}{2}\langle dp , x\rangle = \langle p , dx\rangle - \tfrac{1}{2} d\langle p , x\rangle , \text{ où } Rz = (x , p) \; ;$$

$d\omega$ est évidemment de rang 2ℓ : son système caractéristique est $dz = 0$.

<u>Les variétés lagrangiennes</u> V <u>de</u> Z , qui sont les variétés de dimension ℓ sur lesquelles $d\omega = 0$, <u>sont les variétés d'équations locales</u>, hors du contour apparent Σ_R de V :

(3.3) $$p = \varphi_{R , x} (x) ,$$

où φ_R est la phase de V dans R ; φ_R est une fonction arbitraire quand V est arbitraire.

Etant donné $x \in V$, on peut choisir R tel que $x \notin \Sigma_R$ et employer les équations locales (3.3) au voisinage de x .

Mais, si l'on veut employer un seul repère, on devra préciser comme suit le résultat précédent.

x^j et p_j désigneront des coordonnées duales de x et p.

LEMME 3.1. - Les variétés lagrangiennes de Z, dont la projection par $R_X : z \to x$ est une variété de X de dimension $k \leq \ell$ et d'équations

$$x^j = F_j(x^1, \ldots, x^k) \qquad (k+1 \leq j \leq \ell), \tag{3.4}$$

sont les variétés V d'équations locale (3.4) et

$$p_i = \frac{\partial \varphi_R(x^1, \ldots, x^k)}{\partial x^i} - \sum_{j=k+1}^{\ell} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} p_j \quad (1 \leq i \leq k), \tag{3.5}$$

où φ_R est la phase de V dans R et où $x^1, \ldots x^k, p_{k+1}, \ldots, p_\ell$ sont des coordonnées locales de V ; φ_R est une fonction arbitraire de $x^1, \ldots, x^k$ quand V est arbitraire.

Si $k = \ell$, les équations de V se réduisent à (3.3)

Si $k = 0$, V est un plan :

$$x = \text{const.}, \ p \text{ arbitraire} \ ; \ \varphi_R = \text{const.}$$

Preuve. -

$$d\langle p \ dx\rangle = \sum_{i=1}^{k} \left(dp_i + \sum_{j=k+1}^{\ell} \frac{\partial F_j}{\partial x^i} dp_j\right) \wedge dx^i$$

$$= d \sum_{i=1}^{k} \left(p_i + \sum_{j=k+1}^{\ell} \frac{\partial F_j}{\partial x^i} p_j\right) dx^i.$$

La condition $d\omega = 0$ sur V est donc l'existence sur V d'une fonction φ_R de $(x^1, \ldots, x^k)$ vérifiant (3.5). La condition $\dim V = \ell$, est que $(x^1, \ldots, x^k, p_{k+1}, \ldots, p_\ell)$ soient indépendantes sur V.

Notations. - Etant donné une fonction $f : Z \to \mathbb{R}$ et un repère R, f_R désigne la fonction $Z(\ell) \to \mathbb{R}$ telle que : $f_R(x, p) = f(z)$ pour $Rz = (x, p)$, c'est-à-dire $f_R \circ R = f$.

W est une hypersurface de Z d'équation

$$W : H(z) = 0 \ , \ H_z \neq 0 . \tag{3.6}$$

ω_W et f_W sont les restrictions de ω et f à W.

LEMME 3.2 . - (E. Cartan) . - $d\omega_W$ est de rang $2\ell - 2$; son <u>système caractéristique</u> est le <u>système d'Hamilton</u> :

$$(3.7) \qquad (\forall j, k \in \{1, \dots, \ell\}) \frac{dx^j}{H_{R,p_j}(x,p)} = - \frac{dp_k}{H_{R,x^k}(x,p)} \quad \text{sur } W$$

où le vecteur $(H_{R,p}, -H_{R,x})$ est évidemment tangent à W.

<u>Preuve</u> . - La condition

$$(3.8) \qquad (d\omega_W)^{\ell-1} \wedge df_W = 0 \quad \text{sur } W$$

s'écrit

$$\frac{(d\omega)^{\ell-1} \wedge df \wedge dH}{(d\omega)^{\ell}} = 0 \quad \text{sur } W ;$$

vu (2.4) et (2.5) , où l'on choisit $f_{2j-1} = p_j$, $f_{2j} = x^j$ pour identifier (2.3) et (3.2); cette condition (3.8) s'écrit donc

$$(3.9) \qquad \sum_{j=1}^{\ell} (f_{R,p_j} H_{R,x^j} - H_{R,p_j} f_{R,x^j}) = 0 \quad \text{pour } H_R = 0 ;$$

elle n'est pas vérifiée identiquement ; donc $(d\omega_W)^{\ell-1} \neq 0$; or $(d\omega_W)^{\ell} = 0$; donc le rang de $d\omega_W$ est $2(\ell - 1)$ et les relations équivalentes (3.8) et (3.9) expriment que f_W est intégrale première du système caractéristique de $d\omega_W$; ce système est donc le système d'Hamilton (3.7) .

<u>Note</u> 3.1. - Nous emploierons, sur W, comme coordonnées locales $2\ell - 2$ intégrales premières indépendantes du système d'Hamilton (3.7) et une fonction t telle que (3.7) s'écrive :

$$(3.10) \qquad dx = H_{R,p}(x,p)\, dt , \quad dp = - H_{R,x}(x,p)\, dt .$$

<u>Définition</u> 3.1. - Etant donnée une fonction $g : Z \to R$, définissons, en z, $g_z \in Z$ par

$$(3.11) \qquad dg = [dz , g_z] ;$$

autrement dit :

(3.12) $$R g_z = (g_{R,p} , - g_{R,x}) ;$$

le système d'Hamilton (3.10) s'écrit donc :

(3.13) $$dz = H_z \, dt ;$$

vu (2.5), où l'on choisit $f_{2j-1} = p_j$, $f_{2j} = x^j$ pour identifier (2.3) et (3.2) , le crochet de Poisson de g et g' est :

(3.14) $$(g , g') = \langle g'_{R,x} , g_{R,p} \rangle - \langle g_{R,x} , g'_{R,p} \rangle = [g_z , g'_z] .$$

Le vecteur $\varkappa = H_z$ de W est appelé vecteur caractéristique ; les courbes de W tangentes à ce vecteur en chaque point de W, c'est-à-dire solutions du système d'Hamilton (3,7) sont appelées courbes caractéristiques.

Voici le théorème classique qui explicite les variétés lagrangiennes de V , c'est-à-dire la résolution de l'équation non linéaire du premier ordre, dont l'inconnue est une fonction φ :

$$H_R (x , \varphi_x) = 0 .$$

THEOREME 3.1 - 1) Le système d'Hamilton (3.7) possède des $(\ell - 1)$ - uples

$$h_1 , \dots , h_{\ell-1}$$

d'intégrales premières indépendantes, deux à deux en involution, c'est-à-dire telles que :

(3.15) $$(\forall j , k \in \{1, \dots, \ell - 1\}) \qquad (d\omega)^{\ell-2} \wedge dh_j \wedge dh_k = 0 \quad \text{sur } W .$$

Etant donné l'un de ces $(\ell-1)$ - uples, une quadrature définit localement ℓ fonctions

$$g_0 , g_1 , \dots , g_{\ell-1}$$

telles que :

(3.16) $$\omega = dg_0 + \sum_{j=1}^{\ell-1} g_j \, dh_j \quad \text{sur } W .$$

$g_1 , \dots g_{\ell-1} , h_1 , \dots , h_{\ell-1}$ constituent $2(\ell - 1)$ intégrales premières indépendantes du système d'Hamilton (3.7) . Si t est défini par (3.10) ,

(3.17) $$t , h_1 , \dots , h_{\ell-1} , g_1 , \dots , g_{\ell-1}$$

constituent des coordonnées locales de W ; g_o est une fonction de ces coordonnées

2) Les variétés lagrangiennes V de W sont les variétés de V qui localement:

i) sont fibrées par des courbes caractéristiques :

$$t \text{ arbitraire} ;\ h_1 = \text{const} ,\ldots, h_{\ell-1} = \text{const} ,\ g_1 = \text{const} ,\ \ldots,\ g_{\ell-1} = \text{cons}$$

ii) ont pour base B de cette fibration les variétés lagrangiennes de l'espace $Z(\ell-1)$ de coordonnées

(3.18) $$x' = (h_1, \ldots, h_{\ell-1}) ,\ p' = (g_1, \ldots, g_{\ell-1}) .$$

3) Si les coordonnées locales (3.17) sont employées sur W, les équations locales d'une variété lagrangienne V de W sont les suivantes, après avoir convenablement permuté les indices $(1,\ldots, \ell-1)$, choisi $k \in \{0,\ldots,\ell-1\}$ et choisi $\ell-k$ fonctions numériques réelles $F_o, F_{k+1},\ldots, F_{\ell-1}$ de k variables :

(3.19) $$V : \begin{cases} h_j - F_j(h_1,\ldots,h_k) & (k+1 \le j \le \ell-1) \\[2ex] g_i = \dfrac{\partial F_o(h_1,\ldots,h_k)}{\partial h_i} - \displaystyle\sum_{j=k+1}^{\ell-1} \dfrac{\partial F_j}{\partial h_i}\, g_j & (1 \le i \le k) ; \end{cases}$$

$t, h_1, \ldots, h_k, g_{k+1}, \ldots, g_{\ell-1}$ sont des coordonnées locales de V . La phase lagrangienne de V vaut:

(3.20) $$\psi(t, h_1, \ldots, h_k, g_{k+1}, \ldots g_{\ell-1}) =$$
$$g_o(t, h_1, \ldots, h_k, g_{k+1}, \ldots g_{\ell-1}) + F_o(h_1,\ldots,h_k).$$

Si $k = \ell-1$, le sytème (3.19) signifie :

(3.21) $$g_i = \frac{\partial F_o(h_1,\ldots,h_{\ell-1})}{\partial h_i} \quad (1 \le i \le \ell-1) .$$

Si $k = 0$, il signifie :

(3.22) $$h = \text{const.} ,\ g \text{ arbitraire} ;\ F_o = \text{const.}$$

Preuve de 1°) . - Le théorème 2 et le lemme 3.2.

Preuve de 2°) . - La condition que $d\omega = 0$ sur V , équivaut, vu (3.16) à la suivante : l'application

(3.23) $$V \ni z \mapsto (h_1, \dots, h_{\ell-1} ; g_1, \dots, g_{\ell-1}) \in Z(\ell-1)$$

applique V sur une variété B de $Z(\ell-1)$, vérifiant $\sum_j dh_j \wedge dg_j = 0$; B est donc de dimension $\leqq \ell - 1$. Pour que $\dim V = \ell$, il faut et suffit que :

i) $\dim B = \ell - 1$, c'est-à-dire : B est lagrangienne ;

ii) (3.23) applique une courbe caractéristique de V sur chaque point de B .

Preuve du 3°) . - Le lemme 3.1 , où l'on remplace

$$Z \quad , \quad x, p \quad , \qquad V \; , \; d\varphi_R = \langle p, dx \rangle \text{ sur } V$$

par

$$Z(\ell-1) \; , \; x', p'[\text{cf } (3.18)] \; , \; B \; , \; dF_o = \sum_{j=1}^{\ell-1} g_j \, dh_j \text{ sur } B \; ,$$

en sorte que (3.16) donne :

$$\omega = dg_o + dF_o \text{ sur } V \; ; \text{ or } \omega = d\psi \; .$$

Le n° 4 va employer la

Définition 3.2 . - Etant donnée une variété lagrangienne V de W, nommons mesure de V invariante toute mesure régulière η de V invariante par le vecteur caractéristique $\varkappa$ de W ; c'est-à-dire : toute forme différentielle η , définie sur V, homogène de degré ℓ en les différentielles et annulée par la dérivation de Lie [ ] $\mathcal{L}_\varkappa$ dans la direction de $\varkappa$:

(3.24) $$\mathcal{L}_\varkappa \eta = 0 \; ;$$

c'est-à-dire, puisque par définition

$$\mathcal{L}_\varkappa \eta = i_\varkappa d\eta + di_\varkappa \eta \quad \text{et} \quad d\eta = 0 \; ,$$

telle que :

(3.25) $$d(i_\varkappa \eta) = 0 \; .$$

THEOREME 3.2. - 1°) Employons sur $V - \sum_R$ la coordonnée locale $x = R_X z$; la condition que

(3.26) $$\eta\,(z\,,\,dz) = \chi_R(x)\; d^{\ell} x \qquad (\chi_R : V\setminus\sum_R \to \mathbb{R})$$

est une mesure de V invariante s'écrit :

(3.27) $$<\frac{\partial}{\partial x}\;,\; \chi_R\,(x)\; H_{R,p}(x\,,\,\varphi_{R\,,\,x})> = 0\,.$$

Vu (3.10), elle signifie que ; le long des caractéristiques engendrant V ,

(3.28) $$\frac{d\,\chi_R}{d\,t} + \sum_j \frac{\partial\, H_{R\,,\,p_j}(x\,,\,\varphi_{R\,,\,x})}{\partial\, x^j}\;\chi_R = 0\;;$$

c'est-à-dire, plus explicitement :

(3.29) $$\frac{d\,\chi_R}{d\,t} + \Big[\sum_{j=1}^{\ell} H_{R\,,\,x^j p_j}(x,p) + \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{\ell} H_{R,p_j p_k}(x,p)\,\varphi_{R\,,\,x^j x^k}\Big]_{p=\varphi_{R,x}}\;\chi_R = 0\,.$$

2°) Employons sur V les coordonnées locales (3.17) ; la condition que

(3.30) $$\eta = \tau\,(t\,,\,h\,,\,g)\,dt\;\wedge d^{\ell-1} h \wedge d^{\ell-1} g \qquad (\tau : V \to \mathbb{R})$$

est une mesure de V invariante s'énonce :

(3.31) la fonction τ est indépendante de t .

Preuve de 1°) . - Dans les coordonnées choisies, les composantes de $\varkappa$ sont :

$$d\,x = H_{R\,,\,p}\,(x\,,\,\varphi_{R\,x})\;;$$

(3.27) exprime (3.25) .

Preuve de 2°). - Dans les coordonnées choisies, les composantes de $\varkappa$ sont :

$$(d\,t\,,\; d\,h\,,\; d\,g) = (1\,,\,0\,,\,0)\;;$$

(3.31) exprime (3.25) .

4. CALCUL DE $a\,U$. - Explicitons la définition d'un opérateur lagrangien, c'est-à-dire la formule (6.6) du Chap.II, § 1.

Notations 4 . - Soit a un opérateur lagrangien, associé à une fonction formelle

$$a^\circ(\nu,.) = \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r}\, a^\circ_r\,(.)$$

définie sur $\Omega \subset Z$. Soit W une hypersurface de Ω d'équation

$$W : H(z) = 0 \quad , \quad H_z \neq 0 \quad .$$

Soit V une variété lagrangienne de W ; soit φ_R sa phase dans un repère R ; soit une fonction indéfiniment différentiable

$$\alpha : V \setminus \Sigma_R \to \mathbb{C} \quad ;$$

$x = R_X z$ servira de coordonnée locale sur $V \setminus \Sigma_R$.

Soit $\eta = \chi_R d^\ell x$ une mesure de V invariante (n° 3).

THEORÈME 4 . - 1°) On a :

$$(4.1) \qquad a^+_R(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})\;[\alpha(x)e^{\nu\varphi_R(x)}] = \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r}\, e^{\nu\varphi_R(x)} L_r(x,\frac{\partial}{\partial x})\;\alpha(x) \quad ,$$

où L_r est un opérateur différentiel d'ordre $\leq r$, dépendant de a, V et R .

$$(4.2) \qquad L_o(x) = a^o_o(x,\varphi_{R,x}) \quad .$$

2°) Si $a^o = H$, alors :

$$(4.3) \qquad L_o = 0 \;;\; L_1(x,\frac{\partial}{\partial x})\;\alpha = \chi_R^{\frac{1}{2}}\;\frac{d}{dt}(\alpha\, \chi_R^{-\frac{1}{2}}) \quad ,$$

$\frac{d}{dt}$ étant la dérivée le long des courbes caractéristiques de W , [cf.(3.10)], c'est-à-dire la dérivée de Lie L_η .

3°) Plus généralement, supposons que a^o_o s'annule n fois sur W :

$$1 \leq n \leq \infty \quad ;$$

il existe alors un nombre m , entier ou infini, tel que :

$$1 \leq m \leq n \quad ,$$

$$L_o = L_1 = \dots = L_{m-1} = 0 \quad ,$$

$$(4.4) \qquad L_m(x,\frac{\partial}{\partial x})\;\alpha(x) = \chi_R^{\frac{1}{2}}\, M(z,\frac{d}{dt})(\alpha\, \chi_R^{-\frac{1}{2}}) \text{ si } m \neq \infty \quad ;$$

l'opérateur différentiel M dépend de a et W , est indépendant de V et R ; il n'est pas identiquement nul sur W ; son ordre est $\leq m$, l'égalité n'étant atteinte que si $m = n$.

En général $m = 1$. Si $n > 1$, L_1 est donc en général la multiplication par une fonction non nulle.

4°) Si $a^o = H$ et si H_R est un polynome en p , de degré s , de partie principale $H_R^{(s)}$, alors :

$$L_r = 0 \quad \text{pour} \quad r > s ,$$

(4.5)

$$L_s(x,p) = e^{\frac{1}{2} < \frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial p} >} H_R^{(s)}(x,p) .$$

Si $s = 2$, les formules (4.3) et (4.5) explicitent donc a .

Preuve de 1°) . - La formule (6.6) du Chap. II § 1 s'explicite comme suit :

$$(4.6) \qquad a_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})[\alpha(x)\, e^{\nu\,\varphi_R(x)}] = \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r}\, e^{\nu\,\varphi_R(x)}\, \ell_r(\nu,x,\frac{\partial}{\partial x})\, \alpha(x) ,$$

où ℓ_r est l'opérateur différentiel d'ordre r , fonction formelle de ν :

$$(4.7) \qquad \ell_r(\nu,x,\frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{k=o}^{r} \frac{1}{k!} \sum_{I,J_o,\ldots J_k} \frac{2^{-|I|}}{I!J_o!\ldots J_k!}$$

$$a^o_{R,x^I p^{I+J_o+\ldots+J_k}}(\nu,x,\varphi_{R,x})\, \varphi_{R,x^{J_1}} \cdots \varphi_{R,x^{J_k}} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{J_o}$$

la somme $\sum_{I,J_o,\ldots,J_k}$ étant étendue à l'ensemble des $(k+2)$ - uples $I,J_o,\ldots,J_k$ de ℓ-indices vérifiant la condition :

$$(4.8) \qquad |I| + |J_o| + \ldots + |J_k| - k = r \quad , \quad 2 \leq |J_1|,\ldots,\ 2 \leq |J_k| \quad ;$$

cette condition implique évidemment : $k \leq r$.

Ces formules (4.6) et (4.7) impliquent évidemment (4.2) et (4.1), où L_r est indépendant de ν , alors que ℓ_r en dépend.

Preuve de 2°) . - (4.2) donne $L_o = 0$. On a $L_r = \ell_r$;
la condition (4.8) signifie pour $r = 1$:

ou : $k = 0$, $|I| = 0$, $|J_o| = 1$;

ou : $k = 0$, $|I| = 1$, $|J_o| = 0$;

ou : $k = 1$, $|I| = 0$, $|J_o| = 0$, $|J_1| = 2$;

donc :

$$L_1(x,\frac{\partial}{\partial x}) = < \frac{\partial\alpha}{\partial x} , H_{R,p}(x,\varphi_{Rx}) >$$

$$+ \frac{1}{2} [\sum_{j=1}^{\ell} H_{R,x^j p_j}(x,p) + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} H_{R,p_j p_k}(x,p)\, \varphi_{R,x^j x^k}]_{p=\varphi_{R,x}} \alpha \quad ;$$

cette relation équivaut à $(4.3)_2$, vu (3.10) et (3.29).

Preuve de 3°) .- Soit $k \in \mathbb{N}$; il existe une fonction ${}^o b^o : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que :

$$a_o^o = {}^o b^o \,.\, H^{n_o} \quad ,$$

où : $n_o = n$ et ${}^o b^o$ n'est pas identiquement nul sur W , si $n \neq \infty$;

$n_o = k+1$ et ${}^o b^o = 0$ sur W , si $n = \infty$.

Puisque

$$a^o \circ b^o = a^o \,.\, b^o \mod \frac{1}{\nu} \quad [\text{cf. Ch II, § 2, (1.5)}] \quad ,$$

il existe un opérateur lagrangien c tel que :

$$a_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}) - {}^o b_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}) \circ [H_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})]^{n_o} = \frac{1}{\nu}\, c_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}) \quad ;$$

si c_o^o ne s'annule pas sur W , notons ${}^1 b^o = c^o$, $n_1 = 0$;
si c_o^o s'annule sur W , appliquons à c le raisonnement qui vient d'être appliqué à a ;
poursuivons par récurrence ; nous obtenons une décomposition du type De Paris [ ]

$$a_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{j=0}^{h} \frac{1}{\nu^j}\, {}^j b_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}) \circ [H_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})]^{n_j} \mod. \frac{1}{\nu^{k+1}}$$

où : $$h \leqq k \quad ; \quad n_j \geqq 0 \quad ;$$

$$n_j = k+1 \quad \text{quand} \quad {}^j b^o = 0 \quad \text{sur} \quad W \quad .$$

Vu le 1°) du théorème,

$$(4.9) \qquad [H_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})]^{n_j} [\alpha(x)\, e^{\nu\,\varphi_R(x)}] = 0 \mod. \frac{1}{\nu^{n_j}} \quad ;$$

notons :

$$m(k) = \operatorname*{Inf}_{j\in\{0,\ldots,k\}} (j + n_j) \quad ;$$

si $m(k) > k$, on a donc :

$$a_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})\, [\alpha(x)\, e^{\nu\,\varphi_R(x)}] = 0 \mod. \frac{1}{\nu^{k+1}} \quad .$$

Si $m(k) > k$ pour tout k , on a donc :

$$(\forall r) \quad L_r = 0 \quad ;$$

le théorème vaut avec $m = \infty$.

Sinon, nous choisissons k tel que :

$$m(k) \leqq k \quad ;$$

nous définissons $m = m(k)$; nous notons J l'ensemble des j tels que :

$$j + n_j = m \quad .$$

Vu 1°) , ${}^j b_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})$ est mod. $\frac{1}{\nu}$ la multiplication par la fonction ${}^j b^o$;

la décomposition de De Paris donne donc, vu (4.9) :

$$a_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})\, [\alpha(x)\, e^{\nu\,\varphi_R(x)}] =$$

$$\sum_{j\in J} \frac{1}{\nu^j}\, {}^j b^o(z)\, [H_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})]^{m-j} [\alpha(x)\, e^{\nu\,\varphi_R(x)}] \mod \frac{1}{\nu^{m+1}}$$

où : $$1 \leqq m \leqq n \quad ;$$

J est fini, non vide ; $0 \in J$ si et seulement si $m = n$;
${}^j b^o$ n'est pas nul sur W .

Vu $(4.3)_2$, les relations (4.4) valent donc, avec :

$$L_m\alpha = \sum_{j\in J} {}^j b^o(z)\, \chi_R^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{dt}\right)^{m-j} \left(\alpha\chi_R^{-\frac{1}{2}}\right) \quad ;$$

L_m n'est pas nul ; son ordre est $\leqq m$; cet ordre est m si et seulement si $m = n$.

En général c_o^o ne s'annule pas sur W , donc $n_1 = 0$, $m(k) = 1$, $m = 1$

<u>Preuve de</u> 4°) . - $a^o = H$; donc $\ell_r = L_r$; vu (4.7) où $a^o = H$, on peut compléter la condition (4.8) par la relation :

$$|I| + |J_o| + \ldots + |J_k| = k + r \leqq s \quad .$$

Si $r > s$, elle ne peut être satisfaite ; donc $L_r = 0$.

Si $r = s$, elle exige $k = 0$, (4.8) devient

$$|I| + |J_o| = s$$

et (4.7) s'écrit donc :

$$L_s(x,p) = \sum_I \frac{2^{-|I|}}{I!} H^{(s)}_{R,\, x^I p^I}(x,p) \quad ,$$

la somme étant étendue à l'ensemble des ℓ-indices I tels que :

$$|I| \leqq s \quad ;$$

autrement dit :

$$L_s(x,p) = \sum_{j=0}^{s} \frac{2^{-j}}{j!} < \frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial p} >^j H_R^s(x,p) \quad ,$$

où l'on peut remplacer $\sum_{j=0}^{s}$ par $\sum_{j=0}^{\infty}$, ce qui donne (4.5).

5. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION LAGRANGIENNE $a\,U = 0$. -

Vu le théorème 1 , les solutions de cette équation sont définies sur des sous-variétés lagrangiennes V de la variété d'équation $a_o^o = 0$.

<u>Notations</u> 5 . - Nous supposons que cette équation

$$a_o^o = 0$$

définit <u>une hypersurface</u> de Z ; soit W l'une de ses parties régulières. Soit

$$U_R = \sum_r \alpha_{R,r} \, e^{\nu \varphi_R}$$

l'expression dans un repère R d'une solution U définie sur une variété lagrangienne V de W. Nous employons les notations 4.

Vu le théorème 4.1, la condition que $a\,U = 0$ sur $V \setminus \Sigma_R$ s'écrit $(\forall r \in \mathbb{N})$:

$$(5.1)_r \qquad M(z,\tfrac{d}{dt})\,[\chi_R^{-\frac{1}{2}}(x)\,\alpha_{R,r}(x)] + \chi_R^{-\frac{1}{2}} \sum_{s=1}^{r} L_{m+s}(x,\tfrac{\partial}{\partial x})\,\alpha_{R,r-s}(x) = 0 \quad ;$$

la première de ces équations s'écrit :

$$(5.1)_o \qquad M(z,\tfrac{d}{dt})\,\beta(z) = 0 \quad , \qquad \text{où} \qquad \beta(z) = \chi_R^{-\frac{1}{2}}(x)\,\alpha_{R,r}(x)$$

est l'amplitude lagrangienne de U ; elle est indépendante de R.

Le théorème 2.2 du Chap II, § 2 complète comme suit ces équations (5.1) :

$$(5.2) \qquad \chi_R^{-3r-1/2}\,\alpha_{R,r} \quad \text{est indéfiniment différentiable sur } \Sigma_R \quad ;$$

rappelons que $\chi_R^{-1} = 0$ sur Σ_R.

<u>Note</u> 5.1. - Si le nombre de fois que a_o^o s'annule sur W est $n > 1$, alors, <u>en général</u>, l'opérateur M est le produit par une fonction $M : W \to C$ non nulle ; les équations (5.1) impliquent donc que le support de U est une sous-variété lagrangienne de la variété de Z d'équations :

$$H(z) = M(z) = 0 \quad .$$

L'étude de ce cas exige que les n° 3 et 4 soient généralisés : il faut construire les sous-variétés lagrangiennes V d'une variété donnée W de Z quand la codimension de W est > 1 ; il faut expliciter $a\,U$, quand U est défini sur une telle variété lagrangienne V. Nous n'étudierons pas ce cas et l'excluons.

Montrons comment les conditions (5.1) et (5.2) permettent de <u>résoudre l'équation</u> $a\,U = 0$ <u>en employant un seul repère</u> R.

LEMME 5. - Soit K un arc d'une caractéristique engendrant V ; supposons que l'ordre de M est > 0 et que le coefficient principal de M ne s'annule pas sur K.

1°) Soit $z' \in K$; soit U' une solution de l'équation lagrangienne $a\,U' = 0$, définie au voisinage de z' dans V.

Il existe alors un voisinage de K dans V sur lequel l'équation $a\,U = 0$ possède une unique solution U telle que $U = U'$ au voisinage de z' .

2°) Soit R un repère tel que Σ_R soit transverse à K et que x_R^{-1} ne s'annule pas une infinité de fois sur $K \cap \Sigma_R$; pour que U_R soit au voisinage de K l'expression dans R d'une solution lagrangienne U de l'équation $a\,U = 0$, il faut et suffit que U_R vérifie (5.1) et (5.2).

<u>Preuve ; notations</u> . - V_K est un voisinage de K du type :

$$V_K = B \times I \quad (B : \text{boule } |b| \leq 1 \text{ de } \mathbb{R}^n \; ; \; I : \text{segment } |t| \leq \text{const. de } \mathbb{R}) \; ;$$

les segments $b \times I$ sont des caractéristiques ;

$0 \times I$ est la caractéristique donnée K ; $z' = (0,0)$;

$\bigcup_j I_j = I$ est un recouvrement fini de I ; $V_j = B \times I_j$.

<u>Preuve de</u> 1°) . - Faisons un choix des V_K et V_j ayant les propriétés suivantes :

U' est défini sur V_0 ;

à chaque V_j est associé un repère R_j tel que : $V_j \cap \Sigma_{R_j} = \emptyset$;

I_j est le segment $j - 1 \leq t \leq j + 1$.

Si U a été défini sur $V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_{j-1}$ $(j > 0)$, alors l'emploi de (5.1) dans le repère R_j permet de prolonger à V_j successivement les définitions de $\alpha_{R_j,0}, \ldots, \alpha_{R_j,r}, \ldots, U_{R_j}$, U ; ces prolongements sont uniques.

<u>Preuve de</u> 2°) . - L'expression U_R d'une fonction lagrangienne U définie au voisinage de K vérifie (5.1) et (5.2). Il s'agit de prouver la réciproque.

Soient un repère R , un voisinage V_K de K et une fonction formelle

$$(5.3) \qquad U_R = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} \alpha_{R,r}\, e^{\nu \varphi_R}$$

définie sur $V_K \setminus \Sigma_R \cap V_K$, vérifiant (5.1) et (5.2).

Il s'agit de prouver que U_R est, au voisinage de K , l'expression dans R d'une fonction lagrangienne.

Soit $z' \in K$; vu 1°) , il existe une unique fonction lagrangienne U définie au voisinage de K , dont l'expression dans R est U_R au voisinage de z' ; il s'agit de prouver que cette expression est U_R au voisinage de K .

Puisque cette expression vérifie, comme U_R , (5.1) et (5.2) , il suffit de prouver le théorème d'unicité que voici : si la fonction formelle (5.3) est nulle au voisinage d'un point de K , alors elle est nulle au voisinage de K .

Choisissons des V_K et V_j ayant les propriétés suivantes :

$U_R = 0$ sur V_o ;

I_j est le segment : $j - 1 \leq t \leq j$;

$V_K \cap \Sigma_R = \bigcup_j B_j$, où $B_j = I_j \cap I_{j+1} = B \times j$.

Supposons prouvé que :

$$U_R = 0 \quad \text{sur} \quad V_o \cup V_1 \cup \ldots \cup (V_j \setminus B_j) \; (j > 0) \quad ;$$

vu (5.2) , $\chi_R^{-1} \alpha_{R,r}$ possède sur B_j une infinité de dérivées, toutes nulles ; (5.1) donne donc successivement :

$$\alpha_{R,0} = 0 \;, \; \alpha_{R,1} = 0 \;, \; \ldots \;, \; \alpha_{R,r} = 0 \;, \; \ldots \;, \; U_R = 0 \quad \text{sur} \quad V_{j+1} \setminus B_{j+1} \quad .$$

<u>Ce lemme énonce de surprenantes propriétés des opérateurs différentiels</u> M <u>et</u> L_r ; mais nous ne retiendrons que la conséquence suivante du 2°) de ce lemme :

THÉORÈME 5 . - <u>Soit</u> V <u>une variété lagrangienne de l'hypersurface</u> W , <u>où</u> $a_o^o = 0$. <u>Soit</u> R <u>un repère</u>. <u>Soit</u> $\eta = \chi_R \, d^\ell x$ <u>une mesure invariante de</u> V ; <u>supposons que</u> χ_R^{-1} <u>ne s'annule pas une infinité de fois sur</u> Σ_R ; <u>supposons</u> Σ_R <u>transverse aux caractéristiques de</u> W <u>qui engendrent</u> V . <u>Alors, pour que</u>

$$\check{U}_R = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} \alpha_{R,r} \, e^{\nu \varphi_R}$$

<u>soit l'expression dans</u> R <u>d'une fonction lagrangienne</u> $\check{U}$ <u>définie sur le revêtement universel</u> $\check{V}$ <u>de</u> V , <u>il faut et suffit que</u> $\check{U}_R$ <u>vérifie</u> (5.1) <u>et</u> (5.2).

<u>Note</u> 5.2 . - Le lemme 5 et le théorème 5 s'appliquent évidemment aux solutions $\check{U}$, définies mod $\frac{1}{\nu^s}$ sur $\check{V}$, de l'équation

$$a \, \check{U} = 0 \quad \text{mod.} \; \frac{1}{\nu^{m+s}} \qquad (s \in \dot{\mathbb{N}}) \quad .$$

6. SOLUTIONS À AMPLITUDE LAGRANGIENNE POSITIVE DE L'ÉQUATION LAGRANGIENNE $a\,U = 0 \mod 1/\nu^2$: QUANTIFICATION DE MASLOV. - Définition 6.1 . - Nommons hamiltonien toute fonction indéfiniment différentiable

$$H : \Omega \to \mathbb{R} \qquad (\Omega : \text{partie ouverte de } Z)$$

telle que $H_z \neq 0$ sur l'hypersurface W d'équation :

$$W : H(z) = 0 \; .$$

On sait qu'en mécanique classique le système d'Hamilton (3.7) régit le mouvement des particules et plus généralement, celui des mécanismes holonomes.

Soit a l'opérateur lagrangien associé à un hamiltonien H ; la résolution de l'équation

$$a\,\check{U} = 0 \mod 1/\nu^2$$

est la recherche des variétés lagrangiennes de W possédant une mesure invariante, que nous supposerons choisie > 0 .

En effet l'équation $(5.1)_o$ s'écrit, vu (4.3) :

$$\frac{d\beta}{dt} = 0$$

et signifie donc ceci : l'amplitude lagrangienne de $\check{U}$ est constante sur chacune des caractéristiques engendrant V ; autrement dit : $\beta\eta$ est invariante.

Nous lui imposerons d'être $\geqq 0$; autrement dit, nous imposerons à l'amplitude lagrangienne β de $\check{U}$ la condition

(6.1) $$\beta \geqq 0 \; .$$

(Rappelons que c'est le cas en physique, où l'amplitude doit varier plus lentement que $e^{\nu\varphi_R}$) .

La définition 3.2 (Chap.II, § 2) des fonctions lagrangiennes sur V exige la donnée d'un nombre imaginaire pur ν_o , que le chapitre III notera :

(6.2) $$\nu_o = \frac{i}{\hbar} \; , \qquad (\hbar > 0) \; ,$$

car la physique quantique choisit $2\pi\hbar$ égal à la constante de Planck.

Puisque

$$\alpha_{R,o} = \beta\left(\frac{\eta}{d^\ell x}\right)^{1/2} \; , \quad \text{où} \quad \beta \geqq 0 \; ,$$

la condition que $\check{U}$ soit lagrangien sur V mod. $\frac{1}{\nu}$ sera réduit à celle-ci :

$$\left(\frac{\eta}{d^{\ell} x}\right)^{1/2} e^{\nu_o \varphi_R}$$

est défini (c'est-à-dire : uniforme) sur V ; vu les définitions de $(d^{\ell}x)^{1/2}$ et $\eta^{1/2}$ (Chap. I, § 3, Coroll. 3 ; Chap II, § 2, Théor. 2), cette condition est la suivante :

<u>Définition</u> 6.2 . - Une variété lagrangienne V vérifie <u>la condition quantique de Maslov</u> quand la fonction

$$\frac{\nu_o}{2\pi i} \varphi_R - \frac{1}{4} m_R \qquad , \text{ où } \nu_o = i/\hbar \quad ,$$

est définie mod. 1 sur V ; cette condition est indépendante du choix du repère R .

<u>Note</u> 6 . - Si V est orientée, au sens euclidien, alors m_R est défini mod. 2 sur V ; la condition quantique de Maslov impose alors à chaque période

$\frac{1}{4\pi\hbar} \oint_\gamma [z,dz]$ de ψ , c'est-à-dire à chaque période $\frac{1}{2\pi\hbar} \oint_\gamma \langle p,dx \rangle$ de φ_R

d'avoir, mod. 1 ; l'une des deux valeurs : 0, 1/2 .

Si V était 2-orientée, m_R serait défini sur V mod. 4 et cette condition imposerait à φ_R et ψ d'être définis sur V mod. $2\pi\hbar$; ce ne sera pas le cas dans les applications que donne le Chap. III.

Nous venons de prouver ceci :

THÉORÈME 6.-1°) <u>Soit</u> a <u>l'opérateur associé à un hamiltonien</u> H . <u>La condition qu'une solution lagrangienne</u> U , <u>à amplitude lagrangienne</u> ≧ 0 , <u>de l'équation</u>

(6.3) $$a\,U = 0 \qquad \text{mod. } 1/\nu^2$$

<u>puisse être définie</u>, mod. $1/\nu$, <u>sur une variété</u> V <u>est que</u> V <u>possède simultanément les trois propriétés suivantes</u> :

i) V <u>est une variété lagrangienne de l'hypersurface</u> W : H(z) = 0 ;

ii) V <u>possède une mesure invariante</u> (par le vecteur caractéristique de H) ;

iii) V <u>satisfait la condition quantique de Maslov</u>.

2°) <u>La donnée de</u> V , <u>possédant ces trois propriétés, définit</u> U <u>à un facteur constant près si et seulement si la mesure invariante de</u> V <u>est unique</u> ; <u>c'est-à-</u>

<u>dire si toute fonction indéfiniment différentiable sur</u> V <u>et constante sur chacune des caractéristiques engendrant</u> V <u>est constante sur</u> V .

Le § 2 du Chap. III, appliquera ce théorème.

7 . SOLUTION DE CERTAINS SYSTÈMES LAGRANGIENS À UNE INCONNUE . - Les théorèmes 7.1 et 7.2 précisent le théorème 6 ; ils sont respectivement appliqués par le § 1 et le § 3 du chap. III.

THEOREME 7.1 . - Soient $a^{(j)}$ $(j = 1, \dots, \ell)$ les opérateurs lagrangiens associés à ℓ hamitoniens :

$$H^{(j)} : \Omega \to R \qquad (\Omega : \text{partie ouverte de } Z) \quad ,$$

indépendants et DEUX A DEUX EN INVOLUTION ; c'est-à-dire tels que :

$$(7.1) \quad dH^{(1)} \wedge \dots \wedge dH^{(\ell)} \neq 0 \quad ; \quad (\forall j,k) : (d\omega)^{\ell-2} \wedge dH^{(j)} \wedge dH^{(k)} = 0 \quad , \quad \text{où} \quad \omega = \frac{1}{2}[z,dz] \; .$$

1°) La condition que le système :

$$(7.2) \qquad a^{(1)}U = \dots = a^{(\ell)}U = 0 \qquad \text{mod } 1/\nu^2$$

possède une solution lagrangienne U définie, mod. $1/\nu$, sur la variété connexe V est que V vérifie simultanément les deux propriétés suivantes :

i) V est une composante connexe de la variété de Z d'équations :

$$(7.3) \qquad H^{(1)}(z) = \dots = H^{(\ell)}(z) = 0 \quad ,$$

variété qui est lagrangienne ;

ii) V satisfait la condition quantique de Maslov (défin. 6.2).

L'amplitude lagrangienne de U est alors constante, quand on choisit pour mesure de V

$$(7.4) \qquad \eta = \frac{d^{2\ell}z}{dH^{(1)} \wedge \dots \wedge dH^{(\ell)}} \qquad (\text{Cf. Note 7}) \; ;$$

V choisi, U est donc défini à un facteur numérique constant près.

2°) Les dérivées de Lie $\mathcal{L}_{\varkappa^j}$ suivant les vecteurs caractéristiques $\varkappa^j$ des $H^{(j)}$ commutent ; si V est compact, V est donc un tore, dont le groupe des translations est engendré par les transformations infinitésimales $\mathcal{L}_{\varkappa^j}$.

Note 7 . - Rappelons que $d^{2\ell}z$ est défini par (5.15), Chap.II, § 1 ; (7.4) signifie que η est la restriction à V de toute forme η_Z de Z telle que

$$dH^{(1)} \wedge \dots \wedge dH^{(\ell)} \wedge \eta_Z = d^{2\ell}z \quad ;$$

η est évidemment indépendant du choix de η_Z .

Preuve de 1°) - D'après le théorème 1 , le support de U appartient à l'une des composantes connexes V de la variété d'équations (6.6).

Réciproquement, soit V l'une de ces composantes ; $d\omega$ est de rang 2ℓ , car son système caractéristique est $dz = 0$; vu le théorème 2 (E. Cartan), il existe localement des fonctions $g_o, \ldots, g_2$ telles que :

$$\omega = dg_o + \sum_{j=1}^{\ell} g_j \, dH^{(j)} \quad ;$$

la restriction ω_V de ω à V vérifie donc :

$$d\omega_V = 0 \quad ;$$

or : $\dim V = \ell$; V est donc une variété lagrangienne.

Ce résultat pourrait d'ailleurs être déduit du théorème 3.1, 3°), (3.22).

Soit R un repère de Z ; soit $(x,p) = Rz$; la condition que $H^{(j)}$ et $H^{(k)}$ sont en involution s'énonce :

$$< \frac{\partial H^{(j)}}{\partial x} \, , \, \frac{\partial H^{(k)}}{\partial p} > - < \frac{\partial H^{(k)}}{\partial x} \, , \, \frac{\partial H^{(j)}}{\partial p} > = 0 \quad ;$$

c'est-à-dire :

$$\text{(7.5)} \qquad \mathcal{L}_{\varkappa^j} H^{(k)} = 0 \quad ,$$

en notant $\mathcal{L}_{\varkappa^j}$ la dérivée de Lie suivant la direction caractéristique de $H^{(j)}$:

$$\varkappa^j = \left(\frac{\partial H^{(j)}}{\partial p} \, , \, - \frac{\partial H^{(j)}}{\partial x} \right) .$$

De (7.5) résulte :

$$\mathcal{L}_{\varkappa^j} \, dH^{(k)} = 0 \quad ;$$

d'autre part la définition de la dérivée de Lie donne :

$$\mathcal{L}_{\varkappa^j} \, d^{2\ell} z = 0 \quad ;$$

d'où, vu la définition (7.3) de η :

$$(V_j) : \qquad \mathcal{L}_{\varkappa^j} \eta = 0 \; .$$

Vu le théorème 4 2°), la condition qu'une fonction lagrangienne $\check{U}$ définie sur $\check{V}$ vérifie :

$$a^{(1)} \check{U} = \dots = a^{(\ell)} \check{U} = 0 \quad \text{mod. } 1/\nu^2$$

est donc que son amplitude lagrangienne β vérifie

(V_j) : $$\mathcal{L}_{\varkappa^j} \beta = 0 \ ;$$

puisque les $H^{(j)}$ sont indépendants, c'est-à-dire vérifient $(7.1)_1$, cette condition s'énonce :

$$\beta \text{ est constant sur } V \ .$$

La condition que la fonction $\check{U}$ soit, mod. $1/\nu$, lagrangienne sur V équivaut donc, vu le n° 6, à la condition quantique de Maslov.

<u>Preuve de</u> 2°). - Vu le chap. II, § 2, (1.1) , le commutateur de $a^{(j)}$ et $(a^{(k)}$:

$$[a^{(j)} , a^{(k)}] = a^{(j)} \circ a^{(k)} - a^{(k)} \circ a^{(j)} \ ,$$

est l'opérateur associé à la fonction formelle :

$$- \left\{ \operatorname{sh} \frac{1}{2\nu} [\frac{\partial}{\partial z} , \frac{\partial}{\partial z'}] \, H^{(j)}(z) \, H^{k}(z') \right\}_{z = z'} \ ;$$

la condition que $H^{(j)}$ et $H^{(k)}$ sont en involution est que cette fonction formelle est nulle mod. $1/\nu^2$; c'est une fonction impaire de ν ; elle est donc nulle mod. $1/\nu^3$; d'où :

(7.6) $$[a^{(j)} , a^{(k)}] = 0 \qquad \text{mod. } 1/\nu^3 \ ;$$

or, vu le théorème 4 2°) :

$$a_R^{(j)} (\alpha \, e^{\nu \varphi_R}) = \frac{1}{\nu} e^{\nu \varphi_R} \, \chi_R^{1/2} \, \mathcal{L}_{\varkappa^j} (\alpha \, \chi_R^{-1/2}) \qquad \text{mod. } 1/\nu^2 \ ;$$

donc

$$[a_R^{(j)} , a_R^{(k)}](\alpha \, e^{\nu \varphi_R}) = \frac{1}{\nu^2} e^{\nu \varphi_R} \, \chi_R^{1/2} [\mathcal{L}_{\varkappa^j} , \mathcal{L}_{\varkappa^k}](\alpha \chi_R^{-1/2}) \qquad \text{mod. } 1/\nu^3 \ ;$$

donc, vu (7.6)

$$[\mathcal{L}_{\varkappa^j} , \mathcal{L}_{\varkappa^k}] = 0 \ ;$$

les transformations infinitésimales $\mathcal{L}_{\varkappa^1} , \dots , \mathcal{L}_{\varkappa^\ell}$ engendrent donc un groupe abélien d'homéomorphismes de V , si V est compact ; d'où 2°).

Complétons ce théorème 7.1 :

THEOREME 7.2 . - Soient ℓ operateurs lagrangiens $a^{(j)}$ $(j = 1, \dots, \ell)$, COMMUTANT L'UN A L'AUTRE et égaux, mod. $\frac{1}{\nu^2}$, aux opérateurs associés à ℓ hamiltoniens $H^{(j)}$ indépendants [c'est-à-dire : vérifiant $(7.1)_1$] ; ces hamiltoniens sont donc en involution [c'est-à-dire : vérifient $(7.1)_2$]. Posons le problème : définir sur une variété connexe V, mod. $1/\nu^{r+1}$, une solution lagrangienne U du système :

$$(7.7)_r \qquad a^{(1)}U = \dots = a^{(\ell)}U = 0 \qquad \text{mod } 1/\nu^{r+2} \qquad (r \geqq 1) .$$

Supposons vérifiées les conditions, i) et ii) dont le théorème 7.1 prouve la nécessité ; alors ce problème a une solution U si et seulement si, en outre, les deux conditions suivantes sont simultanément vérifiées :

iii) une solution de $(7.7)_{r-1}$ existe sur V ; (nous la supposerons explicitée) ;

iv) une fonction $\check{V} \to \mathbb{C}$, que définissent l'intégration d'une forme de Pfaff définie et fermée sur $V \setminus \Sigma_R$ et la condition d'avoir des singularités polaires sur Σ_R, est une fonction $V \to \mathbb{C}$; (la connaissance de cette fonction résout explicitement le problème) .

Quand i) ii) iii) iv) sont vérifiées, alors, sur V, la solution U de $(7,7)_r$ est définie à un facteur près, qui est un nombre formel de phase nulle.

Préliminaire à la preuve . - Soit R un repère de Z ; soit V vérifiant i) ; énonçons comme suit le théorème 4 1°) 2°) : soit $\beta : V \setminus \Sigma_R \to \mathbb{C}$;

$$(7.8) \qquad a_R^{(j)+}\left(\nu, x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\chi_R^{1/2}(x)\,\beta(x)\,e^{\nu\varphi_R(x)}\right) =$$

$$\chi_R^{1/2}(x)\, e^{\nu\varphi_R(x)} \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r}\, M_r^j\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \beta(x) ,$$

où M_r^j est un opérateur différentiel d'ordre $\leqq r$, dépendant de $a^{(j)}$ et V ;

$$M_1^j = \mathcal{L}_x^j .$$

L'hypothèse que les opérateurs $a^{(j)}$ commutent s'énonce :

$$(7.9) \qquad (\forall r) \sum_{s=0}^{r} [M_{s+1}^j , M_{r-s+1}^k] = 0$$

<u>Preuve</u> . — Soit U une fonction lagrangienne, définie sur V , d'amplitude lagrangienne $\beta_o = 1$; notons son expression dans le repère R :

$$U_R(\nu,x) = \chi_R^{1/2}\, e^{\nu\varphi_R(x)} \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r}\, \beta_r(x) \quad ,$$

où : $\beta_o = 1$, $\beta_r : V \setminus \Sigma_R \to \mathbb{C}$.

Supposons que U est donné mod. $\frac{1}{\nu^r}$ et vérifie $(7.7)_{r-1}$:

$\beta_o , \ldots , \beta_{r-1}$ sont donnés et, vu (7.8); vérifient :

$$(7.10) \qquad \sum_{t=1}^{s} M_t^j \; \beta_{s-t} = 0 \quad \text{pour} \quad j = 1 ,\ldots, \ell \quad , \quad s = 1 ,\ldots, r \quad .$$

La condition que U vérifie $(7.7)_r$ est que :

$$(7.11) \quad (\forall_j) \qquad \sum_{s=1}^{r+1} M_s^j \; \beta_{r+1-s} = 0 \quad ;$$

cette condition est un système de ℓ équations, qui définit $(\forall_j)\ M_1^j\, \beta_r$, c'est-à-dire : $(\forall_j)\ \mathscr{L}_{\varkappa^j}\, \beta_r$; c'est-à-dire $d\beta$, en fonction de $\beta_o ,\ldots, \beta_{r-1}$; la condition d'intégrabilité locale de ce système, c'est-à-dire la condition que l'expression de $d\beta$ qu'il donne soit une forme de Pfaff fermée, s'énonce, puisque les $M_1^j = \mathscr{L}_{\varkappa^j}$ commutent :

$$(\forall_j,k) \qquad M_1^j \circ \sum_{s=2}^{r+1} M_s^k\, \beta_{r+1-s} \; - \; M_1^k \circ \sum_{s=2}^{r+1} M_s^j\, \beta_{r+1-s} = 0$$

c'est-à-dire, en remplaçant s par $s+1$:

$$(7.12) \qquad \sum_{s=1}^{r} [M_1^j \, , \, M_{s+1}^k]\, \beta_{r-s} + \sum_{s=1}^{r} [M_{s+1}^j \, , \, M_1^k]\, \beta_{r-s} \; +$$

$$\sum_{s=1}^{r} (M_{s+1}^k \circ M_1^j - M_{s+1}^j \circ M_1^k)\, \beta_{r-s} = 0 \quad .$$

Or (7.10) implique

$$\sum_{s=1}^{r} M_{s+1}^k \circ M_1^j\, \beta_{r-s} + \sum_{s,t} M_{s+1}^k \circ M_{t+1}^j\, \beta_{r-s-t} = 0 \quad ,$$

où $\sum\limits_{s,t}$ signifie $\sum\limits_{s=1}^{r-1}\ \sum\limits_{t=1}^{r-s}$; autrement dit, cette somme est étendue à l'ensemble des couples d'entiers (s,t) tels que :

$$1 \leqq s \ , \ 1 \leqq t \ , \ s+t \leqq r \ ;$$

autrement dit, (7.10) implique :

$$\sum_{s=1}^{r} M^k_{s+1} \circ M^j_1 \, \beta_{r-s} + \sum_{s=2}^{r}\sum_{t=1}^{s-1} M^k_{s-t+1} \circ M^j_{t+1} \, \beta_{r-s} = 0$$

et de même :

$$\sum_{s=1}^{r} M^j_{s+1} \circ M^k_1 \, \beta_{r-s} + \sum_{s=2}^{r}\sum_{t=1}^{s-1} M^j_{t+1} \circ M^k_{s-t+1} \, \beta_{r-s} = 0 \ .$$

La condition d'intégrabilité locale (7.12) s'écrit donc :

$$\sum_{s=1}^{r}\sum_{t=0}^{s} [M^j_{t+1} \ , M^k_{s-t+1}] \, \beta_{r-s} = 0 \ ;$$

elle est donc vérifiée, vu l'hypothèse de commutativité (7.9).

Le système (7.11) définit donc une fonction

$$\beta_r : \check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \to C \ ,$$

à l'addition près d'une fonction localement constante sur $\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R$. Avec ce choix de β_r , U_R est localement, sur $\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R$, l'expression dans R d'une solution lagrangienne de $(7.7)_r$.

Vu le lemme 5, 1°), qui vaut mod. $1/\nu^{r+2}$, il existe donc une solution lagrangienne de $(7.7)_2$ sur $\check{V}$, dont l'expression dans R est U_R , à l'addition près à β_r d'une fonction constante sur chaque composante de $\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R$; vu le théorème 5, l'addition à $\check{\beta}_r$ de l'une de ces fonctions fait que $\chi_R^{-3r}\,\beta_r$ est indéfiniment différentiable sur $\check{V}$; β_r est donc alors défini à l'addition près d'une fonction constante sur V .

Vu l'hypothèse ii) la condition de Maslov est vérifiée ; vu le n° 6, pour que U soit lagrangienne sur V mod. $1/\nu^{r+1}$ il est nécessaire et suffisant que β_r soit une fonction : $V \to \mathbf{C}$. D'où le théorème.

CONCLUSION . - <u>V.P. Maslov</u> [ ] <u>nomme "asymptotiques"</u> <u>les</u> "<u>solutions définies</u> mod. $1/\nu$" <u>étudiées</u> n° 6 <u>et</u> 7. <u>Elles n'ont pourtant aucune raison d'être égales</u>

mod. $1/\nu$ à une solution lagrangienne U de l'équation $a\,U = 0$ (cf. théorème 7.2 et du chap. III, § 3) ; et une expression U_R d'une telle solution U n'a aucune raison d'être le développement asymptotique d'une solution de l'opérateur différentiel ou pseudo-différentiel que a_R peut définir formellement : les exemples traités au chap. III le montrent.

Le caractère le plus évident de cette analyse lagrangienne, suggérée par l'étude de V.P. Maslov [ ], est son originalité propre.

Elle est formelle ; du point de vue physique, c'est donc aux grandeurs non observables de la physique quantique qu'il n'est pas absurde de l'appliquer.

§ 4 . Les systèmes lagrangiens homogènes : $a\,U = 0$.

§ 4. SYSTEMES LAGRANGIENS HOMOGENES A PLUSIEURS INCONNUES.

Généralisons les résultats les plus simples du § 3 : ses théorèmes 4,5,6 et 7.1.

1. CALCUL DE $\sum_{m=1}^{\mu} a_n^m \; U_m$. - Etendons un résultat de [8], n° 8, en explicitant sa preuve ; nous généraliserons ainsi le théorème 4 du § 3 .

Notations 1. - Soit a une $\mu \times \mu$ matrice, dont les éléments a_n^m $(m, n = 1, \dots, \mu)$ sont des opérateurs lagrangiens, associés à des fonctions formelles de phases nulles, éléments d'une matrice

$$a^\circ = \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} \; a_r^\circ \,, \text{ où } a_r^\circ : \Omega \to \mathbb{C}^{\mu^2} .$$

Soit W une hypersurface de Ω, d'équation

$$W : H(z) = 0 , \quad \text{où} \quad H_z \neq 0 \quad \text{sur } W .$$

Soit V une variété lagrangienne de W ; soit φ_R sa phase dans un repère R ; notons

(1.1) $\qquad b(x, p) = a_\circ^\circ(z), \quad c(x, p) = a_1^\circ(z) \quad$ pour $\quad (x, p) = Rz$;

Soit $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu\}$ un vecteur, dont les composantes sont des fonctions indéfiniment différentiables

$$\alpha_m : V \setminus \Sigma_R \to \mathbb{C} ;$$

x servira de coordonnée locale sur $V \setminus \sum_R$.

Soit $\eta = \chi_R \; d^\ell x$ une mesure de V invariante (§ 3, n° 3) .

THEOREME 1 . - 1) <u>On a</u> :

(1.2) $\quad a_R^+ \left(\nu, x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right) \left[\alpha(x) \, e^{\nu\varphi_R(x)} \right] = \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} \, e^{\nu\,\varphi_R(x)} \; L_r\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \alpha(x) ,$

où L_r est une $\mu \times \mu$ matrice, dont les éléments sont des opérateurs différentiels d'ordre $\leqq r$, dépendant de V, a et R.

$$L_o(x) = b(x, \varphi_{R,x}) . \tag{1.3}$$

2°) Supposons dét $b = H$. Il existe deux μ- vecteurs non nuls, f et g, fonctions de $(x, p) \in W$ tels que :

$$b\,f = 0 , \quad {}^t b\,g = 0 , \text{ c'est-à-dire : } \sum_{m=1}^{\mu} b_n^m f_m = 0 , \sum_{n=1}^{\mu} g^n b_n^m = 0 ; \tag{1.4}$$

choisissons-les, ce qui est possible, tels que sur W :

$f_m g^n$ soit le mineur de b_n^m dans la matrice b,

c'est-à-dire tels que :

$$dH = \sum_{m,n} f_m g^n db_n^m \quad \text{mod. } H . \tag{1.5}$$

Notons

$$<g, u> = \sum_{n=1}^{\mu} g^n u_n \quad \text{pour tout vecteur } u = (u_1, \dots, u_\mu) .$$

Evidemment, vu (1.3) et (1.4) :

$$<g(x, \varphi_{R,x}), L_o(x)\,\alpha(x)> = 0 . \tag{1.6}$$

Cette formule est complétée par la suivante, où γ est une fonction arbitraire : $V \setminus \Sigma_R \to \mathbb{C}$ et où $\frac{d}{dt}$ est la dérivée le long des courbes caractéristiques de W c'est-à-dire la dérivée de Lie $\mathcal{L}_\varkappa$:

$$<g(x, \varphi_{R,x}), L_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)[\gamma(x) f(x, \varphi_{R,x})]> = \tag{1.7}$$

$$\chi_R^{1/2} \frac{d}{dt}(\gamma\, \chi_R^{-1/2}) + J(x, \varphi_{R,x})\, \gamma(x) ,$$

où $J(x, p)$ est défini sur W par la formule :

$$J = -\tfrac{1}{2} \sum_{m,n} [(g^n, b_n^m) f_m + b_n^m (g^n, f_m) + g^n (b_n^m, f_m)] + \sum_{m,n} g^n c_n^m f_m \tag{1.8}$$

dans laquelle $(.\,,\,.)$ désigne la parenthèse de Poisson, définie par (3.14), § 3

Voici des propriétés de J, évidentes sauf la première :

Note 1.1. - J ne dépend que de b, c et des restrictions de f et g à W.

Note 1.2. - La multiplication de f par $h : W \to C \setminus \{0\}$ multiplie g par h^{-1} et ajoute $\frac{1}{h}\frac{dh}{dt}$ à J.

Note 1.3. - Si la matrice b est symétrique et la matrice c antisymétrique, alors $J = 0$, car on peut choisir $f = g$.

Note 1.4. - Supposons les matrices b et ic self-adjointes ; c'est en particulier le cas quand la matrice a est self-adjointe, c'est-à-dire quand

$$(\forall : m , n) \qquad a^m_n = (a^n_m)^* \ ;$$

alors les valeurs de J sont imaginaires pures, car on peut choisir $g = \bar{f}$.

Preuve du théorème. - 1°) résulte du théorème 4, § 3. Pour prouver 2°), notons :

$$a = a_R\,,\ \varphi = \varphi_R(x)\,,\ b^m_n = b^m_n(x, \varphi_x)\,,\ b^m_{nx} = \left.\frac{\partial b^m_n(x,p)}{\partial x}\right|_{p=\varphi_x}\,,\ \text{etc.}$$

en sorte que, x^i et p_j étant les composantes de x et p $(i, j = 1, \ldots, \ell)$:

$$(1.9) \qquad \frac{\partial b^m_n}{\partial x^i} = b^m_{nx^i} + \sum_{j=1}^{\ell} b^m_{np_j}\, \varphi_{x^i x^j}\,.$$

Vu la définition (6.3) - (6.6), § 1, de a^+ :

$$a^{+m}_n\left(\nu, x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\alpha_m e^{\nu\varphi}\right] = e^{\nu\varphi} b^m_n(x, \varphi_x)\,\alpha_m +$$

$$\frac{e^{\nu\varphi}}{\nu}\left[\sum_j b^m_{np_j}\frac{\partial\alpha_m}{\partial x^j} + \left(\tfrac{1}{2}\sum_{i,j} b^m_{np_i p_j}\,\varphi_{x^i x^j} + \tfrac{1}{2}\sum_j b^m_{nx^j p_j} + c^m_n\right)\alpha_m\right] \bmod. \frac{1}{\nu^2}\ ;$$

d'où, vu (1.9) et la définition (1.2) de L_1 :

$$<g\,,\ L_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\alpha> =$$

$$\sum_{j,m,n} g^n \, b^m_{n\,p_j} \frac{\partial \alpha_m}{\partial x^j} + \sum_{m,n} g^n \Big(\tfrac{1}{2} \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} b^m_{n\,p_j} + c^m_n \Big) \alpha_m \ ;$$

d'où, en choisissant $\alpha_m = \gamma f_m$, vu (1.5) :

$$\langle g , L_1 (\gamma f) \rangle = \sum_j H_{p_j} \frac{\partial \gamma}{\partial x^j} +$$

$$\Big[\tfrac{1}{2} \sum_{j,m,n} g^n \, b^m_{n\,p_j} \frac{\partial f_m}{\partial x^j} + \tfrac{1}{2} \sum_{j,m,n} g^n \frac{\partial}{\partial x^j} \big(b^m_{n\,p_j} \, f_m \big) + \sum_{m,n} g^n \, c^m_n \, f_n \Big] \gamma \ ;$$

donc, vu (1.5) et la définition de $\frac{d}{dt}$ sur W :

$$\langle g , L_1 (\gamma f) \rangle = \frac{d\gamma}{dt} + \tfrac{1}{2} \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} \big(H_{p_j} \big) \gamma + J \gamma , \tag{1.10}$$

où

$$J = \tfrac{1}{2} \sum_{j,m,n} g^n \, b^m_{n\,p_j} \frac{\partial f_m}{\partial x^j} - \tfrac{1}{2} \sum_{j,m,n} \frac{\partial g^n}{\partial x^j} b^m_{n\,p_j} f_m + \sum_{m,n} g^n \, c^m_n \, f_m \ . \tag{1.11}$$

Or, vu (3.28) § 3 :

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} \big(H_{p_j} \big) = - \frac{1}{\chi_R} \frac{d \chi_R}{dt} \ ;$$

(1.10) équivaut donc à (1.7). D'autre part, vu (1.4) :

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \Big(\sum_n g^n \, b^m_n \Big) = \frac{\partial}{\partial x^j} \Big(\sum_m b^m_n \, f_m \Big) = 0 \ ;$$

(1.11) peut donc s'écrire :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{j,m,n} \begin{vmatrix} f_m & -b_n^m & g^n \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x^j} & \dfrac{\partial b_n^m}{\partial x^j} & \dfrac{\partial g^n}{\partial x^j} \\ f_{m\,p_j} & b^m_{n\,p_j} & g^n_{p_j} \end{vmatrix} + \sum_{m,n} g^n c_n^m f_m ,$$

c'est-à-dire, vu (1.9) :

$$(1.12) \quad J = \frac{1}{2} \sum_{j,m,n} \begin{vmatrix} f_m & -b_n^m & g^n \\ f_{m\,x^j} & b^m_{n\,x^j} & g^n_{p_j} \\ f_{m\,p_j} & b^m_{n\,p_j} & g^n_{p_j} \end{vmatrix} + \sum_{m,n} g^n c_n^m f_m ,$$

car

$$\sum_{i,j,m,n} \begin{vmatrix} f_m & -b_n^m & g^n \\ f_{m\,p_i} & b^m_{n\,p_i} & g^n_{p_i} \\ f_{m\,p_j} & b^m_{n\,p_j} & g^n_{p_j} \end{vmatrix} \varphi_{x^i x^j} = 0 ,$$

puisque le déterminant ci-dessus est une fonction anti-symétrique de (i , j). Or (1.12) équivaut évidemment à (1.8).

<u>Preuve de la Note</u> 1.1. - (1.8) s'écrit :

$$J = -\frac{1}{2} \sum_{m,n} [(g^n, b_n^m f_n) + g^n (b_n^m , f_m)] + \sum_{m,n} g^n c_n^m f_m ;$$

or, vu (1.4), il existe des fonctions régulières F_n telles que :

$$\sum_m b_n^m \ f_m = H \ F_n \ ;$$

donc, sur W où $H = 0$:

$$J = - \tfrac{1}{2} \left[\sum_n F_n \frac{dg^n}{dt} + \sum_{m,n} g^n \, (b_n^m , f_m) \right] + \sum_{m,n} g^n \, b_n^m \, f_m \ ;$$

donc J ne dépend que de b, c, f et de la restriction de g à W.

2. RESOLUTION DU SYSTEME LAGRANGIEN $a\,U = 0$, QUAND LES ZEROS DE det $\overset{\circ}{a}_o$ SONT SIMPLES .- Alors le n° 5 du § 3 s'étend aisément .

Notations 2 . - Conservons les notations 1. Vu le théorème 1 1°), les solutions du système

$$\sum_{m=1}^{\mu} a_n^m \ U_m = 0 \tag{2.1}$$

sont définies sur les variétés lagrangiennes V de l'hypersurface W d'équation

$$W : H = 0, \quad \text{où} \quad H = \text{dét. } b \ ; \ (\text{par hypothèse : } H_z \neq 0 \quad \text{sur } W.) \tag{2.2}$$

Soit

$$U_R = \sum_r \frac{1}{\nu^r} \ \alpha_{R,r} \ e^{\nu \varphi_R}$$

l'expression, dans un repère R, d'une solution

$$U = (U_1 , \ldots, U_\mu)$$

du système (2.1) , qui s'écrira :

$$a\,U = 0 \ ;$$

les U_m sont des fonctions lagrangiennes définies sur $V \subset W$; les $\alpha_{R,r}$ sont des fonctions : $V \setminus \Sigma \to \mathbb{C}^\mu$. Vu le théorème 1, la condition $a\,U = 0$ sur $V \setminus \Sigma_R$ s'écrit : ^{R} $(\forall \ r \in \mathbb{N})$

$$L_o \, (x) \ \alpha_{R,r}(x) + \sum_{s=1}^{r} L_s \left(x , \frac{\partial}{\partial x}\right) \alpha_{R,\,r-s}(x) = 0 \ ; \tag{2.3$_r$}$$

vu (1.6), elle implique :

$$(2.4)_r \qquad < g\,(x\,,\varphi_{R\,,\,x})\,,\sum_{s=1}^{r} L_s\,(x\,,\frac{\partial}{\partial x})\,\alpha_{R,r-s}\,(x) > = 0\,.$$

Notons M_o l'une des matrices $V \to \mathbb{C}^{\mu\times\mu}$ telles que la relation

$$L_o\,(x)\,\alpha\,(x) = \alpha'\,(x)\,,\ \text{où}\ < g\,(x\,,\varphi_{R\,,\,x})\,,\alpha'\,(x)> = 0\,,\ [\alpha\,(x),\alpha'(x)\in\mathbb{C}^{\mu}]$$

équivaut à l'existence de $\gamma : V \setminus \sum_R \to \mathbb{C}$ tel que :

$$\alpha\,(x) + \gamma\,(x)\,f\,(x\,,\varphi_{R\,,\,x}) = M_o\,(x)\,\alpha'\,(x)\ ;$$

sous la condition $(2.4)_r$, l'équation $(2.3)_r$ s'écrit donc :

$$(2.5)_r \qquad \alpha_{R\,,\,r}\,(x) + \gamma_{R\,,\,r}(x)\,f\,(x\,,\varphi_{R\,,\,x}) + \sum_{s=1}^{r} M_o\,(x)\,L_s\,(x\,,\frac{\partial}{\partial x})\,\alpha_{R\,,\,r-s}\,(x) = 0$$

et, vu (1.7), l'équation $(2.4)_{r+1}$ s'écrit :

$$(2.6)_r\ \frac{d}{dt}(\gamma_{R,r}\,\chi_R^{-1/2}) + \mathbf{J}\,\gamma_{R,r}\,\chi_R^{-\frac{1}{2}} + < g(x,\varphi_{R,x}),\sum_{s=1}^{r} L_{s+1}\,(x,\frac{\partial}{\partial x})\,\alpha_{R,r-s}\,(x) > \chi_R^{-1/2} = 0\,.$$

Le théorème 2.2 du § 2 complète comme suit ces équations $(2.5)_r$ et $(2.6)_r$ $(r \in \mathbb{N})$:

$(2.7)_r$ $\alpha_{R,r}\,\chi_R^{-3r-1/2}$ et donc $\gamma_{R,r}\,\chi_R^{-3r-1/2}$ est indéfiniment différentiable sur $\sum_R$; rappelons que $\chi_R^{-1} = 0$ sur $\sum_R$.

Le lemme 5 du § 3 s'étend aisément : il montre que <u>les conditions</u> $(2.5)_r$, $(2.6)_r$ <u>et</u> $(2.7)_r$ <u>permettent de résoudre le sytème</u> a U = 0 <u>en employant un seul repère</u> R ; plus précisément (cf. § 3, théorèmes 5 et 6) :

THEOREME 2.1. - <u>Soit</u> V <u>une variété lagrangienne de l'hypersurface</u> W <u>définie par</u> (2.2) ; <u>soit</u> $\check{V}$ <u>son revêtement universel</u>. <u>Soit</u> R <u>un repère</u>.

Soit $\chi_R \, d^{\ell} x$ une mesure invariante de V ; supposons que χ_R^{-1} ne s'annule pas une infinité de fois sur Σ_R ; supposons Σ_R transverse aux caractéristiques de W qui engendrent V. Alors, pour que

$$U_R = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} \alpha_{R,r} \, e^{\nu \varphi_R}$$

soit l'expression dans R_p d'une solution lagrangienne $U = (U_1, \ldots, U_\mu)$, définie sur $\check{V}$ [ou sur V], du sytème $a\,U = 0$, il faut et suffit que $(\forall r \in \mathbb{N})$ les vecteurs $\alpha_{R,r} : \check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \to \mathbb{C}^\mu$ et les fonctions $\gamma_{R,r} : \check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \to \mathbb{C}$ vérifient les conditions :

$(2.5)_r$, $(2.6)_r$, $(2.7)_r$ [et que $\gamma_{R,r} \, e^{\nu_o \varphi_R} : V \setminus \Sigma_R \to \mathbb{C}$].

Note 2. - Ce théorème s'applique aux solutions, définies mod. $\frac{1}{\nu^{s+1}}$, à l'addition près de $\frac{\alpha}{\nu^s} f \, e^{\nu \varphi_R}$, où $\alpha \, e^{\nu_o \varphi_R} : \check{V} \to \mathbb{C}^\mu$ [ou $V \to \mathbb{C}^\mu$], du système :

$$a\,U = 0 \mod \frac{1}{\nu^{s+1}} .$$

Evidemment :

THEOREME 2.2. (Réduction mod. $\frac{1}{\nu^2}$ d'un système à une équation). - Conservons les hypothèses du théorème 1. 2°), qui définit H et J. L'existence sur $V \subset W$ [ou sur $\check{V}$] d'une solution du système lagrangien

$$(2.1)_2 \qquad a\,U = 0 \mod \frac{1}{\nu^2}, \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \sum_m a_n^m \, U_m = 0 \mod \frac{1}{\nu^2},$$

équivaut à l'existence sur V [ou $\check{V}$] d'une solution de l'équation lagrangienne

$$(2.8) \qquad a' \, U' = 0 \mod \frac{1}{\nu^2} ,$$

où a' est l'opérateur lagrangien associé à la fonction formelle

$$H + \frac{1}{\nu} J .$$

A toute solution U du système $(2.1)_2$ correspond une solution U' de l'équation (2.8) telle que :

$$U = U' f \mod \frac{1}{\nu} .$$

Le chapitre IV emploiera, dans le cas particulier de l'équation de Dirac, un théorème de réduction analogue au précédent.

3. UN SYSTEME LAGRANGIEN PARTICULIER $a\,U = 0$, POUR LEQUEL LES ZEROS DE dét. a_o° SONT MULTIPLES. - Le chapitre IV emploiera l'extension suivante du théorème 7.1 du § 3. (Le théorème 7.2 de ce § 3 admet une extension analogue).

THEOREME 3. - Soient $a^{(k)}$ $(k = 1,\dots,\ell)$ des $\mu \times \mu$ - matrices dont les éléments sont des opérateurs lagrangiens ; supposons $a^{(k)}$ associé mod $\frac{1}{\nu^2}$ à la matrice

$$H^{(k)}\,E + \frac{1}{\nu}\,J^{(k)},$$

où E est la $\mu \times \mu$ - matrice unité, $H^{(k)} : \Omega \to C$ et $J^{(k)}$ est une $\mu \times \mu$ matrice : $\Omega \to \mathbf{C}^{\mu^2}$. Notons V la variété d'équation

$$(3.1) \qquad V : H^{(1)}(z) = \dots = H^{(\ell)}(z) = 0 .$$

Supposons que les $a^{(k)}$ commutent mod. $\frac{1}{\nu^3}$ et que

$$dH^{(1)} \wedge \dots \wedge dH^{(\ell)} \neq 0 \quad \text{au voisinage de } V.$$

Alors :

1°) Les hamiltoniens $H^{(k)}$ sont deux à deux en involution : V est une variété lagrangienne ; sa mesure

$$\eta = \left.\frac{d^{2\ell} z}{dH^{(1)} \wedge \dots \wedge dH^{(\ell)}}\right|_V$$

est $(\forall k)$ invariante par le vecteur caractéristique $\varkappa^{(k)}$ de $H^{(k)}$, qui est tangent à V. Si V est compact, V est donc un tore, dont les transformations infinitésimales $\mathcal{L}_{\varkappa^{(k)}}$ engendrent le groupe des translations.

2°) Soit $U = (U_1, \dots, U_\mu)$ un vecteur, dont les composantes U_m sont des fonctions lagrangiennes ; pour qu'il vérifie le sytème lagrangien

$$(3.2) \qquad (\forall k) \quad a^{(k)} U = 0 \quad \text{mod.} \frac{1}{\nu^2},$$

il faut et suffit que U soit défini sur V et que les amplitudes lagrangiennes $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_\mu)$ de ses composantes vérifient le système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre :

$$(3.3) \qquad (H^{(k)}, \beta) + J^{(k)} \beta = 0 \quad \text{où} \ (H^{(k)}, \beta) = \mathcal{L}_{\varkappa^{(k)}} \beta$$

et où $(.\,,.)$ est la parenthèse de Poisson (3.14) du § 3 ; ce système équivaut à un sytème de Pfaff complètement intégrable

$$(3.4) \qquad d\beta = \omega\beta, \quad \text{c'est-à-dire} \quad d\beta_n = \sum_m \omega_n^m \beta_m,$$ où les éléments ω_n^m

de la $\mu \times \mu$ matrice ω sont des formes de Pfaff définies sur V ; β doit vérifier, outre (3.3), la « condition quantique » :

$$(3.5) \qquad \left(\frac{\eta}{d^\ell x}\right)^{\frac{1}{2}} \beta\, e^{\nu_0 \varphi_R} : V \setminus \sum_R \to C^\mu .$$

Note 3. - La condition que (3.3) est complétement intégrable s'énonce :

$$(3.6) \qquad d\omega = \omega \wedge \omega,$$ où $\omega \wedge \omega$ est la matrice d'éléments $\sum_{h=1}^{\mu} \omega_n^h \wedge \omega_h^m$;

elle est donc vérifiée ; elle équivaut à :

$$(3.7) \quad (\forall i, k) \quad (H^{(i)}, J^{(k)}) - (H^{(k)}, J^{(i)}) + J^{(i)} J^{(k)} - J^{(k)} J^{(i)} = 0,$$ où

$(H^{(i)}, H^{(k)}) = 0$, en notant, dans un repère arbitraire R :

$$(H^{(i)}, J^{(k)}) = \sum_{j=1}^{\ell} H^{(i)}_{p_j} J^{(k)}_{x^j} - \sum_{j=1}^{\ell} H^{(i)}_{x^j} J^{(k)}_{p_j} .$$

(3.6) ou (3.7) équivaut à la commutatibilité des $a^{(j)}$ mod. $\frac{1}{\nu^3}$.

Preuve de 1°). - Soient U_m $(m = 1, \dots, \mu)$ des fonctions lagrangiennes définies sur V, d'amplitudes lagrangiennes β_m ; soit $U = (U_1, \dots, U_\mu)$,

$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Vu le théorème 4 du § 3 :

(3.8) $$a_R^{+(k)}\left(\nu, x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right) U = \frac{1}{\nu} \chi_R^{1/2} e^{\nu\varphi_R} L^{(k)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \beta \mod. \frac{1}{\nu^2} ,$$

où $L^{(k)}$ est une $\mu \times \mu$ matrice, dont les éléments sont des opérateurs différentiels d'ordre 1 ; la partie principale de $L^{(k)}$ est $\mathcal{L}_{\varkappa^{(k)}} E$, $\mathcal{L}_{\varkappa^{(k)}}$ étant la dérivée de Lie suivant le vecteur caractéristique $\varkappa^{(k)}$ de $H^{(k)}$ et E la $\mu \times \mu$ matrice unité. Par hypothèse, les $a^{(k)}$ commutent mod. $\frac{1}{\nu^3}$; donc les $L^{(k)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ commutent ; leurs parties principales $\mathcal{L}_{\varkappa^{(k)}}$ commutent donc ; les $\varkappa^{(k)}$ sont donc tangents à la variété V d'équation (3.1) .

D'où 1°) (Cf la preuve du théorème 7.1 1°) , § 3 .)

Preuve de 2°) . - Le système (3.2) équivaut, vu (3.8), au système :

(3.9) $$(\forall k) \quad L^{(k)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \beta = 0 ;$$

puisque les $\mathcal{L}_{\varkappa^{(k)}}$ commutent, on peut trouver sur V des coordonnées locales $t_1, \ldots, t_\ell$ telles que

(3.10) $$\mathcal{L}_{\varkappa^{(k)}} = \frac{\partial}{\partial t_k} ;$$

vu le théorème 4 du n° 3 :

(3.11) $$L^{(k)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t_k} + J^{(k)} ;$$

le système (3.9) , d'inconnue $\beta : \check{V} \to \mathbb{C}^k$ devant vérifier (3.5), équivaut donc au système de Pfaff sur $\check{V}$:

$$d\beta + \omega\beta = 0 ,$$

où

$$\omega = \sum_{k=1}^{\ell} J^{(k)} \, dt_k$$

est une $\mu \times \mu$ matrice, dont les éléments sont des formes de Pfaff. Puisque les $a^{(k)}$ commutent, les $L^{(k)}$ définis par (3.8) commutent, ce qui s'énonce, vu (3.11) :

$$\frac{\partial J^{(k)}}{\partial t_i} - \frac{\partial J^{(i)}}{\partial t_k} + J^{(i)} J^{(k)} - J^{(k)} J^{(i)} = 0 , \tag{3.13}$$

ou encore, vu (3.6) : $d\omega = \omega \wedge \omega$. C'est la condition d'intégrabilité complète du système (3.4) ; vu (3.13) et (3.10) cette condition est aussi exprimée par (3.7).

CHAPITRE III

Équations de Schrödinger et de Klein-Gordon, pour l'atome à un électron, dans un champ magnétique.

INTRODUCTION . - Sommaire . - Les problèmes les plus intéressants de la théorie des équations aux dérivées partielles, linéaires et homogènes, sont les problèmes de valeurs propres ; leur caractère essentiel est de n'avoir de solution qu'exceptionnellement. Ce chapitre III donne des exemples de problèmes lagrangiens ayant ce même caractère ; ces problèmes supposent :

$$\ell = 3 \quad ; \quad Z(3) = X \oplus X^* \quad ; \quad X = X^* = E^3 \quad \text{(espace euclidien)} ;$$

ils concernent l'opérateur lagrangien a associé à un hamiltonien H, de type approprié : le système d'Hamilton qu'il définit possède deux intégrales premières définies sur $Z(3)$: la longueur L et l'une des composantes M du vecteur $x \wedge p$ de E^3.

Cet hamiltonien peut être celui de l'électron, non-relativiste ou relativiste, soumis à l'action simultanée du champ électrique d'un noyau atomique fixe et d'un champ magnétique constant (effet Zeeman) ; alors H dépend d'un paramètre : le niveau d'énergie E de l'électron ; a est l'opérateur de Schrödinger ou (cas relativiste) celui de Klein-Gordon ; les niveaux d'énergie pour lesquels nos problèmes lagrangiens ont une solution coïncident avec ceux que définissent les problèmes qu'il est classique d'étudier à propos de ces opérateurs.

L'intérêt du point de vue lagrangien est sa simplicité : par application du théorème 7.1 (Chap. II, § 3), le § 1 obtient ces niveaux d'énergie par une quadrature ; elle se calcule aisément par la méthode des résidus dans les cas Schrödinger et Klein-Gordon.

Le § 1 cherche les solutions, définies mod. $1/\nu$ sur une variété lagrangienne compacte, du système lagrangien :

$$(1) \qquad a\,U = (a_{L^2} - \text{const.})\,U = (a_M - \text{const.})\,U = 0 \qquad \text{mod. } 1/\nu^2 ,$$

où a_{L^2} et a_M sont les opérateurs lagrangiens associés aux intégrales premières L^2 et M : il applique le théorème 7.1. Les équations possédant des solutions (en particulier les niveaux d'énergie) et ces solutions sont caractérisées par 3 entiers, qu'introduit la quantification de Maslov :

$$\ell \ , \ m \ , \ n \quad \text{tels que} \quad |m| \leq \ell < n \ ;$$

ce sont les 3 nombres quantiques de Schrödinger ; les variétés lagrangiennes sur lesquelles ces solutions sont définies sont des tores $T(\ell,m,n)$ de dimension 3 (cf. théorème 7.1, 2°)), d'équations

$$T(\ell,m,n) : \ H(x,p) = L^2(x,p) - \text{const.} = M - \text{const.} = 0 \ ,$$

ces constantes ayant les mêmes valeurs que dans (1) et dépendant de (ℓ,m,n) .

Le § 2 cherche les solutions, définies mod. $1/\nu$ sur une variété lagrangienne compacte V et à amplitude lagrangienne > 0 , de l'équation lagrangienne

$$(2) \qquad a\,U = 0 \quad \text{mod. } 1/\nu^2 \ .$$

Il s'agit donc d'un problème formellement analogue au problème aux limites qu'il est classique d'étudier à propos de l'équation de Schrödinger, la condition d'allure à l'infini de ce problème classique étant remplacée par la condition que V est compacte. En général, la condition d'existence est la même : un triplet d'entiers quantiques la définit : mais la solution correspondant à ce triplet n'est plus nécessairement unique.

Le § 3 cherche les solutions, définies sur une variété lagrangienne compacte, du système lagrangien

$$(3) \qquad a\,U = (a_{L^2} - \text{const.})\,U = (a_M - \text{const.})\,U = 0 \ ,$$

les constantes étant des nombres formels, réels mod. $1/\nu^2$, H étant l'hamiltonien de l'électron, relativiste ou non ; alors a , a_{L^2} , et a_M commutent ; le théorème 7.2 s'applique ; les solutions sont encore caractérisées par le triplet d'entiers quantiques (ℓ, m, n) ; les solutions du problème (1) sont, mod. $1/\nu$, celles du problème (3).

Le § 4 rappelle le problème qu'il est classique de se poser à propos des équations de Schrödinger et Klein-Gordon : trouver une fonction

$$u : E^3 \to \mathbb{C}$$

de carré sommable ainsi que son gradient, vérifiant l'équation aux dérivées partielles

(4) $$a\,u = 0 \;;$$

le § 3 rappelle la résolution de ce problème, pour montrer qu'elle diffère essentiellement de celle des problèmes précédents : nous constatons, sans l'expliquer, que tous ces problèmes définissent les mêmes niveaux d'énergie.

Les difficultés que rencontre le § 2 et la longueur des calculs qu'emploie le § 3 contrastent avec la simplicité du § 1 ; ce § 1 justifie la conclusion suivante :

CONCLUSION . - Appliquée à l'atome à un électron, placé dans un champ magnétique constant, la quantification de Maslov (Chap. II, § 3, n° 6 et 7) donne aux grandeurs observables (c'est-à-dire aux niveaux d'énergie) les mêmes valeurs que la mécanique ondulatoire ; mais cette quantification de Maslov est directement apparentée à la mécanique corpusculaire, donc, à la première théorie quantique ; néanmoins elle n'en a pas les défauts : elle a une justification logique (Chap. I et II) ; elle n'exige pas la détermination des trajectoires de l'électron non-quantifié, mais seulement la connaissance des intégrales premières classiques, L et M , du système d'Hamilton définissant ces trajectoires.

L'interprétation probabiliste de cette quantification est la suivante : dans l'état défini par un choix du triplet d'entiers quantiques (ℓ, m, n) , le point (x,p) représentant à la fois la position x et la quantité de mouvement p de l'électron appartient à un tore $T(\ell, m, n)$ à 3 dimensions de l'espace à 6 dimensions : $Z(3) = E^3 \oplus E^3$; la probabilité que (x,p) appartienne à une partie de $T(\ell, m, n)$ est définie par la mesure invariante η de ce tore $T(\ell, m, n)$ (cf. § 1).

Note . - Soient 2 triplets distincts d'entiers quantiques :

$$(\ell, m, n) \neq (\ell', m', n') \;;$$

ils définissent (§ 1) des tores dont l'intersection est vide :

$$T(\ell, m, n) \cap T(\ell', m', n') = \emptyset \;;$$

soient U et U' deux fonctions lagrangiennes définies respectivement sur

$$T(\ell, m, n) \quad \text{et} \quad T(\ell', m', n') \;;$$

leur produit scalaire est donc (Chap. II, § 2, théorème 3.2, 3°)) :

$$(U/U') = 0 \;.$$

Historique . - V.P. Maslov n'a pas explicité cet emploi de sa quantification ; il n'a étudié que le cas de nombres quantiques tendant vers l'infini, c'est-à-dire "le principe de correspondance" de la mécanique quantique.

§ 1. Un hamiltonien H , auquel s'applique commodément le théorème 7.1(Ch. II,§ 3). Les niveaux d'énergie, avec effet Zeeman, de l'atome à un électron.

Le théorème 7.1 du chap. II, § 3 suppose données, sur $\Omega \subset Z(\ell)$, ℓ fonctions, 2 à 2 en involution. Ce chapitre III choisit $\ell = 3$ et un triplet classique de telles fonctions.

1 . QUATRE FONCTIONS, DONT TOUS LES COUPLES SAUF UN, SONT EN INVOLUTION SUR $E^3 \oplus E^3$. - Notons $X = X^* = E^3$ l'espace euclidien de dimension 3 ; appliquons le chapitre II à

$$\ell = 3 \quad , \quad Z(3) = E^3 \oplus E^3 \quad ,$$

un repère R_o de Z étant donc choisi : le théorème 5 du chap. II, § 3 nous évite d'en employer d'autre.

Par contre, dans E^3 , nous employons non seulement un repère orthonormé fixe (I_1 , I_2 , I_3) , mais aussi un repère orthonormé mobile. Notons :

$$x \in X = E^3 \quad , \quad p \in X^* = E^3 \quad ,$$

(x_1 , x_2 , x_3) et (p_1 , p_2 , p_3) les coordonnées de x et p dans (I_1 , I_2 , I_3) :

$$x = \sum_{j=1}^{3} x_j \, I_j \quad , \quad p = \sum_{j=1}^{3} p_j \, I_j \quad .$$

Définissons par

$$(1.1) \quad \begin{aligned} &R(x) = |x| \quad , \quad P(p) = |p| \quad , \quad Q(x,p) = \langle p,x \rangle \quad , \quad L(x,p) = |x \wedge p| \quad , \\ &M(x,p) = x_1 \, p_2 - x_2 \, p_1 \quad \text{(troisième composante de } x \wedge p) \quad , \end{aligned}$$

cinq fonctions de (x,p) , évidemment liées par les relations

$$(1.2) \qquad L^2 + Q^2 = P^2 \, R^2 \quad ; \quad |M| \leqq L \quad ; \quad 0 \leqq P \quad ; \quad 0 \leqq R \quad .$$

Le vecteur I_3 a donc un rôle priviligié ; (ce sera, par exemple, la direction du champ magnétique produisant l'effet Zeeman).

Dans $E^3 \oplus E^3$, le système caractéristique de $d \langle p,dx \rangle$ est

$$dx = dp = 0 \quad :$$

toute fonction $E^3 \oplus E^3 \to R$ en est intégrale première ; la parenthèse de Poisson (. , .) (définition 2 du chap. II, § 3) de deux telles fonctions est donc définie; vu la formule (2.5) (ibid.)

$$(1.3) \qquad (L,M) = (L,Q) = (L,R) = (M,Q) = (M,R) = 0 \quad , \quad (Q,R) = R \quad .$$

D'après le théorème 2 (E. Cartan) du chap. II, § 3, une quadrature définit localement sur $E^3 \oplus E^3$ quatre fonctions numériques réelles

$$f_o \quad , \quad f_1 \quad , \quad f_3 \quad , \quad f_5$$

telles que :

$$(1.4) \qquad < p, dx > = df_o + f_1 \, dL + f_3 \, dM + f_5 \, dQ \quad .$$

Explicitons ces fonctions f_j . Notons (J_1 , J_2 , J_3) le repère mobile orthonormé, défini pour $L \neq 0$, tel que :

$$(1.5) \qquad x = R \, J_1 \quad , \quad x \wedge p = L \, J_3 \quad ,$$

ce qui implique :

$$(1.6) \qquad p = QR^{-1} \, J_1 + LR^{-1} \, J_2 \quad , \quad P \neq 0 \quad , \quad R \neq 0 \quad .$$

Notons $\omega_1 , \omega_2 , \omega_3$ les composantes infinitésimales du déplacement relatif de ce repère (G. Darboux -E. Cartan) ; ce sont les formes de Pfaff

$$\omega_1 = < J_3 , dJ_2 > = - < J_2 , dJ_3 > \quad , \quad \omega_2 = < J_1 , dJ_3 > \quad , \quad \omega_3 = < J_2 , dJ_1 >$$

telles que :

$$(1.7) \; dJ_1 = \omega_3 \, J_2 - \omega_2 \, J_3 \quad , \quad dJ_2 = \omega_1 \, J_3 - \omega_3 \, J_1 \quad , \quad dJ_3 = \omega_2 \, J_1 - \omega_1 \, J_2 \quad ;$$

rappelons que la différentiation extérieure de ces relations donne les équations (qui sont les équations de structure du groupe orthogonal) :

$$(1.8) \qquad d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2 \quad , \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3 \quad , \quad d\omega_3 = \omega_2 \wedge \omega_1 \quad .$$

La différentiation de $(1.5)_1$ donne, vu (1.7) :

$$(1.9) \qquad dx = (dR) \, J_1 + R \, \omega_3 \, J_2 - R \, \omega_2 \, J_3 \quad ;$$

d'où, vu (1.5)

$$(1.10) \qquad < p, dx > = QR^{-1} \, dR + L \, \omega_3 \quad .$$

Pour transformer cette formule en une formule du type (1.4), introduisons les angles d'Euler Φ , Ψ , Θ ; ce sont les paramètres du repère (J_1 , J_2 , J_3) définis comme suit, pour

$$J_3 \neq \pm I_3 \quad , \quad \text{c'est-à-dire : } |M| < L \quad :$$

une rotation de Φ autour de I_3 transforme (I_1, I_2, I_3) en (I_1', I_2', I_3) tels que

$$< I_2', I_3 \wedge J_3 > = 0 \quad ;$$

une rotation de Θ autour de I_2' transforme (I_1', I_2', I_3) en (I_1'', I_2', J_3) ;
une rotation de Ψ autour de J_3 transforme (I_1'', I_2', J_3) en (J_1, J_2, J_3).
Evidemment :

$$M = L \cos \Theta \quad ; \tag{1.11}$$

on peut faire en sorte que

$$0 < \Theta < \pi \quad ;$$

Φ et Ψ sont alors définis mod. 2π . On a les formules classiques :

$$\begin{aligned} J_1 &= (\cos \Phi \cos \Psi \cos \Theta - \sin \Phi \sin \Psi)\, I_1 + \\ &\quad + (\sin \Phi \cos \Psi \cos \Theta + \cos \Phi \sin \Psi)\, I_2 - \cos \Psi \sin \Theta\, I_3 \quad ; \\ J_2 &= (-\cos \Phi \sin \Psi \cos \Theta - \sin \Phi \cos \Psi) I_1 + \\ &\quad + (-\sin \Phi \sin \Psi \cos \Theta + \cos \Phi \cos \Psi) I_3 + \sin \Psi \sin \Theta\, I_3 \\ J_3 &= \cos \Phi \sin \Theta\, I_1 + \sin \Phi \sin \Theta\, I_2 + \cos \Theta\, I_3 \quad . \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\cos \Psi \sin \Theta\, d\Phi + \sin \Psi\, d\Theta \quad ; \\ \omega_2 &= \sin \Psi \sin \Theta\, d\Phi + \cos \Psi\, d\Theta \quad ; \\ \omega_3 &= \cos \Theta\, d\Phi + d\Psi \quad . \end{aligned} \tag{1.13}$$

L'expression explicite de la formule (1.10) est, vu (1.11) et $(1.13)_3$:

$$< p, dx > = Q \frac{dR}{R} + L\, d\Psi + M\, d\Phi \quad ; \tag{1.14}$$

cette formule fondamentale est du type (1.4), conformément au théorème d'E. Cartan qui nous guide.

Formules complémentaires . - La différentiation de (1.6) donne, vu (1.7) :

$$dp = [d(QR^{-1}) - LR^{-1}\omega_3]J_1 + [d(LR^{-1}) + QR^{-1}\omega_3]J_2 + [LR^{-1}\omega_1 - QR^{-1}\omega_2]J_3 \quad . \tag{1.15}$$

Vu (1.9) $d^3x = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ vaut :

(1.16) $$d^3x = R^2(dR) \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \quad ;$$

D'où, vu (1.15) :

$$d^3x \wedge d^3p = L\,\frac{dR}{R} \wedge dQ \wedge dL \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \quad ,$$

c'est-à-dire, en substituant aux ω_j leurs expressions (1.13) et en éliminant Θ grâce à (1.11) :

(1.17) $$d^3x \wedge d^3p = dL \wedge dM \wedge dQ \wedge \frac{dR}{R} \wedge d\Phi \wedge d\Psi \quad .$$

Notons Ω^6 <u>une partie ouverte de</u> $Z(3) = E^3 \oplus E^3$ sur laquelle :

$$|M| < L \quad ;$$

sur Ω^6 nous pouvons donc employer les coordonnées

$$L\ ,\ M\ ,\ Q\ ,\ R\ ,\ \Phi\ ,\ \Psi\ ,$$

Φ et Ψ étant définis mod. 2π .

<u>Note</u> 1 . - Sur Ω^6 , $L \neq 0$; donc, vu $(1.2)_1$: $P \neq 0$, $R \neq 0$.

LEMME 1 . - Soit V une variété lagrangienne de Ω^6 ; (dim V = 3) ; remplaçons chacune des fonctions et des formes différentielles précédentes par sa restriction à V .

1°) <u>Le contour apparent</u> Σ_{R_o} <u>de</u> V est la surface de V où :

(1.18) $$\Sigma_{R_o}\ :\ dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = 0 \quad \text{sur} \quad V \quad .$$

2°) Au voisinage d'un point de Σ , il existe sur V une forme différentielle $\overline{\omega}$ de degré 3 , nulle part nulle, telle que sur Σ_{R_o} :

(1.19) $$dQ \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 / \overline{\omega} \geqq 0 \ ;\ dL \wedge dR \wedge \omega_2 / \overline{\omega} \geqq 0 \ ;\ dR \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 / \overline{\omega} \geqq 0 \ ,$$

les trois premiers membres étant trois fonctions non simultanément nulles ; il existe une constante c telle que, au voisinage de ce point de V , l'indice de Maslov m_{R_o} de V ait la valeur :

(1.20) $$\begin{aligned} m_{R_o} &= c \quad \text{pour} \quad dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 / \overline{\omega} < 0 \ , \\ &= 1 + c \ \text{pour} \quad dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 / \overline{\omega} > 0 \ . \end{aligned}$$

<u>Preuve de</u> 1°) . - L'expression (1.16) de d^3x .

<u>Preuve de</u> 2°) .- Calculons le saut de m_{R_o} à travers Σ en appliquant le théorème 3.2 du chap. I, § 3. Vu (1.9), (1.15), et (1.18), les composantes d_jx et d_jp de dx et dp dans le repère (J_1, J_2, J_3) vérifient sur V en les points de Σ :

$$d_1p \wedge d_2x \wedge d_3x = R^2[d(QR^{-1}) - LR^{-1}\omega_3] \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = R\, dQ \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \quad ;$$

$$d_1x \wedge d_2p \wedge d_3x = -\, R\, dR \wedge [d(LR^{-1}) + QR^{-1}\omega_3] \wedge \omega_2 = dL \wedge dR \wedge \omega_2 \quad ;$$

$$d_1x \wedge d_2x \wedge d_3p = (dR) \wedge \omega_3 \wedge [L\,\omega_1 - Q\,\omega_2] = L\, dR \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 \quad .$$

D'où, vu ce théorème 3.2 (chap. I, § 3), l'existence de $\overline{\omega}$ vérifiant (1.19) et (1.20).

2. CHOIX D'UN HAMILTONIEN H . -

Soit une fonction indéfiniment différentiable

$$H : \Omega^6 \to R \quad ;$$

<u>en involution avec</u> L <u>et</u> M , c'est-à-dire, vu (1.14) , fonction composée des fonctions L , M , Q , R :

$$H(x,p) = H[L(x,p) \ , \ M(x,p) \ , \ Q(x,p) \ , \ R(x)] \quad ; \tag{2.1}$$

$H[.]$ est une fonction indéfiniment différentiable, définie sur une partie ouverte Ω^4 de l'espace R^4 de coordonnées L , M , Q , R ; nous supposons sur Ω^4 :

$$0 < R \ , \ |M| < L \ , \ (H_Q \ , \ H_R) = \emptyset \quad \text{pour} \quad H = 0 \quad ; \tag{2.2}$$

H_Q désigne la fonction valant $\dfrac{\partial H[L\ ,\ M\ ,\ Q\ ,\ R]}{\partial Q}$.

Vu (1.3), <u>les trois fonctions</u> H , L , M <u>de</u> (x,p) <u>sont deux à deux en involution</u>, ce qui permet d'appliquer explicitement le chap. II, § 3 à <u>l'opérateur lagrangien</u> a <u>associé à</u> H .

D'après le théorème 2 (<u>E. Cartan</u>) du chap. II, § 3 , une quadrature définit localement, sur Ω^6 , quatre fonctions numériques réelles

$$g_0 \ , \ g_1 \ , \ g_2 \ , \ g_3$$

telles que

$$(2.3) \qquad < p \ , \ dx > \; = dg_0 + g_1 \, dL + g_2 \, dM + g_3 \, dH \ ;$$

nous emploierons cette formule pour $H = 0$; le lemme qui suit l'explicite pour $H = 0$;

vu (1.14), la quadrature est la définition de Ω par (2.8).

<u>Notations</u> . - Soit (cf. chap. II, § 3) W l'hypersurface de Ω^6 d'équation

$$W : \quad H(x,p) = 0$$

Notons $(L_o \ , \ M_o)$ tout couple de nombres réels tel que $|M_o| < L_o$; notons $V[L_o \ , \ M_o]$ toute composante connexe de la partie de W d'équations

$$(2.4) \qquad V[L_o \ , \ M_o] : H(x,p) = 0 \quad , \quad L(x,p) = L_o \quad , \quad M(x,p) = M_o \ .$$

W est la réunion des $V[L_o \ , \ M_o]$; vu le théorème 7.1, $V[L_o \ , \ M_o]$ est une variété lagrangienne ; elle est le produit topologique

- du tore de dimension 2 et de coordonnées Φ et Ψ mod. 2π ;
- d'une courbe connexe $\Gamma[L_o \ ; \ M_o]$ du demi-plan ouvert de coordonnées $(Q \ , \ R > 0)$ l'équation de cette courbe est

$$(2.5) \qquad \Gamma[L_o \ , \ M_o] \ : \quad H[L_o \ , \ M_o \ , \ Q \ , \ R] = 0 \ ;$$

cette courbe n'a pas de point singulier, vu $(2.2)_3$.

Sur W définissons, à l'addition près d'une fonction de (L, M), une fonction numérique réelle t par la condition :

$$(2.6) \qquad dt = \frac{dR}{R H_Q [L, M, Q, R]} = - \frac{dQ}{R H_R [L, M, Q, R]} \quad \text{sur } \Gamma[L, M]$$

quand la courbe $\Gamma[L, M]$ est fermée, alors t est défini mod. $c[L, M]$, où

$$(2.7) \qquad c[L, M] = \oint_{\Gamma[L, M]} \frac{dR}{R H_Q} = - \oint_{\Gamma[L, M]} \frac{dQ}{R H_R} \quad ;$$

t est monotone sur Γ ; (L, M, t, Φ, Ψ) constitue un sytème de coordonnées locales de W.

Définissons sur W, à l'addition près d'une fonction de (L, M), une autre fonction numérique réelle Ω par :

$$(2.8) \qquad d\Omega = Q \frac{dR}{R} \quad \text{sur } \Gamma[L, M] ;$$

quand la courbe $\Gamma[L, M]$ est fermée, alors Ω est défini mod. $2\pi N[L, M]$ où

$$(2.9) \qquad N[L, M] = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma[L, M]} Q \frac{dR}{R} > 0 ;$$

Ω n'est pas monotone sur Γ. Notons sa différentielle :

$$(2.10) \qquad d\Omega[L, M, t] = Q \frac{dR}{R} + \lambda[L, M, t]\, dL + \mu[L, M, t]\, dM ;$$

le § 2 précisera les propriétés des fonctions λ et μ ainsi définies.

Nous pouvons maintenant expliciter la restriction de (2.3) à W :

LEMME 2. - 1°) La restriction à W de la forme de Pfaff

$$\omega = \langle p, dx \rangle$$

est :

$$(2.11) \qquad \omega_W = d(\Omega + L\Psi + M\Phi) - (\lambda + \Psi)\, dL - (\mu + \Phi)\, dM .$$

2°) Le système caractéristique de $d\omega_W$ est <u>le système d'Hamilton</u> :

$$\text{(2.12)} \qquad \frac{dx}{H_p(x,p)} = - \frac{dp}{H_x(x,p)}, \quad H(x,p) = 0 .$$

Ses intégrales premières sont les fonctions composées des fonctions :

$$\text{(2.13)} \qquad L, M, \lambda + \Psi, \mu + \Phi ;$$

L et M sont en involution ; $\lambda + \Psi$ et $\mu + \Phi$ aussi.

3°) Sur les courbes solution de ce système, c'est-à-dire sur les courbes caractéristiques de H, nous avons

$$\text{(2.14)} \quad dt = \frac{dx}{H_p(x,p)} = - \frac{dp}{H_x(x,p)} = \frac{dR}{RH_Q[L,M,R,Q]} = \frac{d\Psi}{H_L[\,.\,]} = \frac{d\Phi}{H_M[\,.\,]} = - \frac{dQ}{RH_R[\,.\,]} .$$

4°) Sur W :

$$\text{(2.15)} \qquad \left.\frac{d^3x \wedge d^3p}{dH}\right|_W = dL \wedge dM \wedge dt\, d\Phi \wedge d\Psi .$$

<u>Preuve de 1°)</u>. - L'expression (1.14) de $<p, dx>$ dans Z et l'expression (2.10) de $Q\,dR/R$ sur W.

<u>Preuve de 2°)</u>. - Le lemme 3.2 (E. Cartan) du Chap. II, § 3 prouve que $d\omega_W$ a pour système caractéristique (2.12) et est de rang 4 ; or, vu (2.11) :

$$d\omega_W = dL \wedge d(\lambda + \Psi) + dM \wedge d(\mu + \Phi) ;$$

donc (définition d'E. Cartan du sytème caractéristique, Chap. II, § 3, n° 2), les 4 fonctions (2.13) sont intégrales premières de ce système ; les couples L, M et $\lambda + \Psi, \mu + \Phi$ sont en involution vu la Note 2.2 du Chap. II, § 3.

<u>Preuve de 3°)</u>. - Ce même lemme (E. Cartan) et l'expression (1.14) de $<p, dx>$ prouvent que $d\omega_W$ a pour système caractéristique :

$$\frac{dR}{RH_Q[L,M,Q,R]} = \frac{d\Psi}{H_L[\,.\,]} = \frac{d\Phi}{H_M[\,.\,]} = - \frac{dQ}{RH_R[\,.\,]} = \frac{dL}{0} = \frac{dM}{0}, \quad H = 0 .$$

Evidemmment :

$$\frac{dx}{H_p(x,p)} = \frac{<x, dx>}{<x, H_p(x,p)>} = \frac{R\,dR}{<x, L_p> H_L + <x, M_p> H_M + <x, Q_p> H_Q};$$

or, puisque $x \wedge (p + sx)$ est indépendant de la variable réelle s,

$$<x, L_p> = <x, M_p> = 0 ;$$

d'autre part

$$<x, Q_p> = R^2 ;$$

les quatre relations précédentes impliquent:

$$\frac{dx}{H_p(x,p)} = \frac{dR}{RH_Q[L, M, Q, R]} = \frac{d\Psi}{H_L} = \frac{d\Phi}{H_M} = -\frac{dQ}{RH_R},$$

donc (2,14), vu (2.6) et (2.12).

<u>Preuve de 4°)</u>. - La formule (1.17) s'écrit :

$$d^3x \wedge d^3p = dL \wedge dM \wedge dH \wedge \frac{dR}{RH_Q} \wedge d\Phi \wedge d\Psi,$$

où, pour $H = 0$, vu (2.14) :

$$\frac{dR}{RH_Q} = dt \mod. (dL, dM, d\Phi, d\Psi):$$

d'où (2.15), dont le sens est le suivant :

$\left.\frac{d^3x \wedge d^3p}{dH}\right|_W$ désigne la restriction ϖ_W à W des formes de degré 5, ϖ, telles que $dH \wedge \varpi = d^3x \wedge d^3p$; ϖ_W est évidemment indépendant du choix de ϖ.

3. LES TORES QUANTIFIES $T(\ell, m, n)$ CARACTERISANT LES SOLUTIONS, DEFINIES mod. $1/\nu$ SUR DES VARIETES COMPACTES, DU SYSTEME LAGRANGIEN :

(3.1) $$aU = (a_{L^2} - L_0^2)U = (a_M - M_0)U = 0 \mod. 1/\nu^2 ;$$

a, a_{L^2} et a_M désignent <u>les opérateurs lagrangiens associés</u> respectivement <u>aux hamiltoniens en involution</u> :

$$H, L^2, M ;$$

L_o et M_o sont deux constantes réelles telles que : $|M_o| < L_o$.

D'après le théorème 7.1 du chap. II , § 3 , les solutions de ce système sont les fonctions lagrangiennes U , à amplitude lagrangienne constante, définies mod. $1/\nu$ sur celles des variétés $V[L_o, M_o]$, compactes ou non, définies par (2.4), qui vérifient la condition quantique de Maslov (chap. II , § 3, déf. 2.6) ; $V[L_o, M_o]$ est choisi connexe ; la mesure η de V, invariante par les vecteurs caractéristiques de H , $L^2 - L_o^2$ et $M - M_o$, qui sert à définir l'amplitude lagrangienne, est

(3.2) $$\eta = dt \wedge d\Phi \wedge d\Psi ,$$

vu (2.15) et la formule (7.4) du chap. II, § 3 .

Rappelons l'énoncé de cette condition quantique de Maslov : la fonction

(3.3) $$\frac{1}{2\pi\hslash}\varphi_{R_o} - \frac{1}{4} m_R. \qquad - \left(\text{où } \hslash = \frac{i}{\nu_o} \text{ est réel}\right)$$

est uniforme sur V mod. 1

La phase φ_{R_o} de $V[L_o, M_o]$ (définie chap. I, § 2, n° 9 ; § 3, n° 1), vu (2.11) où $L = L_o$, $M = M_o$, est :

(3.4) $$\varphi_{R_o} = \Omega + L_o\Psi + M_o\Phi .$$

Calculons l'indice de Maslov de $V[L_o, M_o]$:

LEMME 3 . - 1°) Le contour apparent Σ_{R_o} de $V[L_o, M_o]$ est la réunion $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ de deux surfaces de $V[L_o, M_o]$ d'équations

$$\Sigma_1 : \Psi = 0 \text{ mod. } \pi \ ; \ \Sigma_2 : H_Q[L, M, Q, R] = 0 .$$

2°) L'indice de Maslov m_{R_o} de $V[L_o, M_o]$ est, à l'addition près d'un entier constent :

(3.5) $$m_{R_o} = \left[\frac{1}{\pi}\Psi\right] - \left[\frac{1}{\pi} \text{ arc tg} \frac{H_Q}{H_R}\right] \text{ sur } \check{V}[L_o, M_o] ;$$

[...] désigne la partie entière de ....

Preuve . - Appliquons le lemme 1. Sur $V[L_o, M_o]$, vu (1.11) et (1.13) :

$$\omega_1 = -\cos\Psi \sin\Theta \, d\Psi , \; \omega_2 = \sin\Psi \sin\Theta \, d\Psi , \; L_o \, \omega_3 = L_o \, d\Psi + M_o \, d\Phi ;$$

donc, vu (2.6) :

$$(3.6) \qquad dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = - R H_Q \sin\Psi \sin\Theta \; dt \wedge d\Psi \wedge d\Phi ,$$

$$(3.7) \qquad dQ \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = R H_R \sin\Psi \sin\Theta \; dt \wedge d\Psi \wedge d\Phi ,$$

$$(3.8) \qquad dR \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 = - R H_Q \cos\Psi \sin\Theta \; dt \wedge d\Psi \wedge d\Phi ,$$

où $R \sin\Theta \neq 0$, vu $(2.2)_1$ et $(2.2)_2$.

Vu le lemme 1. 1°) , $\sum_{R_o}$ a pour équation

$$H_Q \sin\Psi = 0 ;$$

d'où le 1°) du lemme 3.

Au voisinage d'un point de $\sum_1 \setminus \sum_1 \cup \sum_2$, $H_Q \cos\Psi \neq 0$; nous pouvons donc dans le lemme 1.2°) choisir :

$$\bar{\omega} = dR \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 , \; dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 / \bar{\omega} = \operatorname{tg} \Psi ;$$

d'où, vu ce lemme :

$$(3.9) \qquad m_{R_o} = [\, \frac{1}{\pi} \Psi \,] + \text{const} .$$

Au voisinage d'un point de $\sum_2 \setminus \sum_1 \cup \sum_2$, $H_R \sin\Psi \neq 0$ vu $(2.2)_3$; nous pouvons donc dans le lemme 1.2°) choisir :

$$\bar{\omega} = dQ \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 , \; dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 / \bar{\omega} = - H_Q / H_R ; \text{ d'où :}$$

$$(3.10) \qquad m_{R_o} = \text{const.} - [\, \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{H_Q}{H_R} \,] .$$

L'expression globale de m_{R_o} résulte des deux expressions locales (3.9) et (3.10) .

<u>La condition quantique de Maslov</u> (3.3) s'énonce, vu (3.4) et (3.5) : la fonction

$$\frac{1}{\hbar}\ \frac{\Omega}{2\pi} + \frac{1}{4\pi}\ \text{arc}\ \ \text{tg}\,\frac{H_Q}{H_R} + \left(\frac{L_o}{\hbar} - \frac{1}{2}\right)\frac{\Psi}{2\pi} + \frac{M_o}{\hbar}\ \frac{\Phi}{2\pi}$$

est définie mod. 1 sur $V[L_o\,,\,M_o]$.

Si $V[L_o\,,\,M_o]$ <u>est compacte</u>, c'est-à-dire si la courbe $\Gamma\,[L_o\,,M_o]$ est fermée, cette condition est la suivante, vu (2.9) :

$$\frac{1}{\hbar}\,N\,[L_o\,,M_o] + \tfrac{1}{2}\,,\ \frac{1}{\hbar}\,L_o - \tfrac{1}{2}\,,\ \frac{1}{\hbar}\ M_o$$

sont 3 entiers ; notons-les, pour retrouver les notations classiques en physique quantique :

$$n - \ell \quad , \quad \ell \quad , \quad m \quad ;$$

puisque $N > 0$ et $M_o < L_o$, nous avons

$$|m| \leq \ell < n.$$

<u>Si</u> $V\,[L_o\,,\,M_o]$ <u>n'est pas compacte</u>, cette condition quantique de Maslov se réduit à la suivante :

$$\frac{1}{\hbar}\ L_o - \tfrac{1}{2} = \ell\,,\ \frac{1}{\hbar}\ \ M_o = m$$

sont deux entiers tels que $|m| \leq \ell$.

La conclusion de ce n°3 est donc le

THEOREME 3 . - <u>Les variétés connexes sur lesquelles sont définies les solutions du système lagrangien</u> (3.1) <u>sont</u> :

1°) <u>Les variétés</u> $V\,[L_o\,,\,M_o]$ COMPACTES, <u>définies par</u> (2.4), <u>et telles qu'existent</u> 3 <u>entiers</u> :

$$\ell\ ,\ m\ ,\ n\ ,$$

<u>vérifiant les conditions</u> :

$$|m| \leq \ell < n\ , \tag{3.11}$$

$$L_o = \hbar\,(\ell + \tfrac{1}{2})\,,\ M_o = \hbar\ \ m\ ,\ L_o + N\,[L_o\,,\,M_o] = \hbar\ \ n\ ; \tag{3.12}$$

$V\,[L_o\,;\,M_o]$ <u>est alors un tore, qui sera noté</u> $T\,(\ell\,,m\,,n)$: ses coordonnées sont

$$t \text{ mod } c\,[L_o\ ,\ M_o],\ \underline{\text{défini par}}\ (2.7)\ ;\ \Psi \text{ mod. } 2\,\pi\ ;\ \Phi \text{ mod. } 2\,\pi. \tag{3.13}$$

2°) Les variétés $V[L_o , M_o]$ NON-COMPACTES, définies par (2.4), et telles qu'existent 2 entiers

$$\ell , m$$

vérifiant les conditions :

$$|m| \leq \ell ; \tag{3.14}$$

$$L_o = \not{h}\,(\ell + \tfrac{1}{2}) , \; M_o = \not{h}\, m ; \tag{3.15}$$

$V[L_o , M_o]$ est alors le produit

- d'un tore de dimension 2 , de coordonnées Ψ mod. 2π, Φ mod. 2π ;
- et d'une droite, demi-droite ou segment de coordonné t.

Munissons $V[L_o, M_o]$, compacte ou non, de la mesure invariante par les vecteurs caractéristiques de H, $L^2 - L_o^2$, $M - M_o$:

$$\eta = dt \wedge d\Phi \wedge d\Psi ; \tag{3.16}$$

alors les solutions de (3.1) définies sur V sont les fonctions lagrangiennes à amplitude lagrangienne constante.

Note 3.1 . - Nous nous limiterons désormais à l'étude des variétés lagrangiennes compactes ; (par exemple : de l'électron appartenant à un atome) .

Note 3.2. - Les vecteurs caractéristiques de $L^2 - L_o^2$ et $M - M_o$ sont respectivement :

$$\varkappa_{L^2 - L_o^2} : dL = dM = dt = o , \; d\Psi = 2 L_o , \; d\Phi = o ; \tag{3.17}$$

$$\varkappa_{M - M_o} : dL = dM = dt = \quad d\Psi = o \quad , d\Phi = 1 . \tag{3.18}$$

L'on vérifie de suite que ces vecteurs laissent η_V invarariant.

Preuve de (3.17) . - $\varkappa_{L^2 - L_o^2}$ est le vecteur tangent à $V[L_o , M_o]$ tel que vu $(1.2)_1$, puis $(1.5)_1$ et (1.6) , puis $(1.5)_1$ et (1.12) :

$$dx = 2 L L_p = 2 (R^2 p - Qx) = 2 L R J_2 = 2L \frac{\partial x (L, M, t, \Psi, \Phi)}{\partial \Psi}$$

ce qui prouve (3.17) .

Preuve de (3.18) . - $\varkappa_{M - M_o}$ est le vecteur tangent à $V[L_o , M_o]$ tel que, vu (1.1) , puis $(1.5)_1$ et (1.12) :

$$d\,x = (-x_2\,,\ x_1\,,\ o) = \frac{\partial x\,(L\,,\,M\,,\,t\,,\,\Psi\,,\,\Phi)}{\partial\,\Phi}\ .$$

Note 3.3. - Le vecteur caractéristiques de H [cf. (2.14)]:

(3.19) $$\varkappa\ :\ d\,L = d\,M = o\ ,\ d\,t = 1,\ d\,\Psi = H_L\ ,\ d\,\Phi = H_M$$

et ceux de $L^2 - L_o^2$ et $M - M_o$ engendrent, conformément au théorème 7.1. 2°) du Chap. II , §3, un groupe de translations de la variété $V[L_o\,,\,M_o\,]$, quand elle est compacte, donc un tore : les translations, en coordonnées [cf. (2.7) et § 2, (1.5)] :

$$t \quad \text{mod.}\,c[L_o,M_o]\ ,\ \Psi + \lambda\,[t,L_o,M_o] - \frac{N_L[L_o,M_o]}{c\,[L_o,M_o]}\,t \quad \text{mod.}\,2\,\pi\ ,\ \Phi + \pi - \frac{N_M}{c}\,t \quad \text{mod.}\ 2\ \pi$$

4. EXEMPLES : LES OPERATEURS DE SCHRÖDINGER ET KLEIN - GORDON. -

Choisissons :

(4.1) $$H\ (x\,,\,p) = \tfrac{1}{2}\ [p^2 - \frac{K[\,R\,,\,M]}{R^2}\ ]\ ,$$

$K\ :\ \mathbb{R}_+ \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étant une fonction donnée. Autrement dit :

(4.2) $$H\ [\,L,\,M\,,\,Q\,,\,R\,] = \frac{1}{2\,R^2}\ [\ L^2 + Q^2 - K\ [\,R\,,\,M\,]]\ .$$

L'application du théorème 3 est immédiate.

La condition que (2.4) définisse au moins une hypersurface compacte $V\ [\ L_o\,,\,M_o\ ]$, qui est un tore, est la suivante : la fonction

$$\mathbb{R}_+ \ni R \mapsto K\ [\,R\,,\,M_o\,] - L_o^2 \in \mathbb{R}$$

est positive entre deux zéros consécutifs, R_1 et R_2 $(0 < R_1 < R_2)$;

alors (2.9) définit :

(4.3) $$N\ [\ L_o\,,\,M_o\ ] = \frac{1}{\pi}\int_{R_1}^{R_2} \sqrt{K\,[R\,,\,M_o\,] - L_o^2}\ \frac{d\,R}{R} > 0\ .$$

Note 4.1. - Si K est fonction affine de M, alors, vu (4.1) :

(4.4) $$< \frac{\partial}{\partial\,x}\ ,\ \frac{\partial}{\partial\,p} > H\ (x\,,\,p\,) = 0$$

et par suite [Chap. II , § 1 , Déf. 6.2 et (6.3)] , l'opérateur associé à H a pour expression dans R_o :

(4.5) $$a = \frac{1}{2\nu^2}\,\Delta - \frac{1}{2R^2}\,K\,\left[R, \frac{1}{\nu}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\right]$$

où : $\Delta = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$; l'opérateur $\frac{1}{\nu}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$ et le produit par toute fonction de R commutent.

Exemple 4.1 . - Nommons opérateur de Schrödinger - Klein - Gordon l'opérateur associé à l'hamiltonien :

(4.6) $$H(x,p) = \tfrac{1}{2}\left[P^2 + A(M) - \frac{2B(M)}{R} + \frac{C(M)}{R^2}\right],$$

où $A, B, C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données. Notons :

$$A_o = A(M_o),\; B_o = B(M_o),\; C_o = C(M_o).$$

La condition qu'existe au moins une variété compacte $V[L_o, M_o]$ définie par (2.4) s'explicite comme suit :

(4.7) $$A_o > 0,\; L_o^2 + C_o > 0,\quad B_o > \sqrt{A_o}\,\sqrt{L_o^2 + C_o}\,;$$

quand elle est satisfaite, $V[L_o, M_o]$ est unique et, vu (4.3) :

$$N[L_o, M_o] = \frac{1}{2\pi}\oint \sqrt{-A_o R^2 + 2B_o R - L_o^2 - C_o}\;\frac{dR}{R},$$

l'intégrale étant calculée le long d'un lacet de $\mathbb{C}$ entourant la coupure $[R_1, R_2]$; le calcul de deux résidus, en $R = \infty$ et $R = 0$, donne :

(4.8) $$N[L_o, M_o] = \frac{B_o}{\sqrt{A_o}} - \sqrt{L_o^2 + C_o} > 0.$$

L'énoncé du théorème 3 devient donc le suivant :

THEOREME 4.1. - Soit a l'opérateur de Schrödinger - Klein - Gordon, c'est-à-dire l'opérateur associé à l'hamiltonien (4.6) ; soient a_{L^2} et a_M les opérateurs associés aux hamiltoniens L^2 et M. Alors le système lagrangien

$$(4.9) \qquad a\,U = (a_{L^2} - L_o^2)\,U = (a_M - M_o)\,U = 0 \quad \text{mod. } 1/\nu^2$$

possède des solutions définies sur une variété COMPACTE si et seulement s'il existe un triplet d'entier (ℓ, m, n) tel que :

$$(4.10) \qquad L_o = \hbar\,(\ell + 1/2)\ , \quad M_o = \hbar\, m\ ,$$

$$(4.11) \qquad \begin{cases} |m| \leqq \ell < n\ , \quad (\ell + 1/2)^2 + C_o \hbar^{-2} > 0\ , \\ A_o = B_o^2\, \hbar^{-2} \left[n - \ell - 1/2 + \sqrt{(\ell + 1/2)^2 + C_o \hbar^{-2}} \right]^{-2} . \end{cases}$$

Si cette condition est réalisée, cette variété compacte est unique : c'est le tore $T(\ell, m, n)$ d'équations

$$(4.12) \qquad T(\ell, m, n) : H(x, p) = L(x, p) - L_o = M(x, p) - M_o = 0\ .$$

Munissons ce tore de la mesure invariante (3.16) ; alors les solutions de (4.9) définies mod. $1/\nu$ sur $T(\ell, m, n)$ sont les fonctions lagrangiennes à amplitude lagrangienne constante.

Notations, concernant la physique et employées seulement par la fin de ce n° 4. - Donnons-nous, dans E^3, un potentiel électrique $\mathcal{A}_o : X \to R$ et un potentiel-vecteur magnétique $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3) : X \to R^3$, indépendants du temps et vérifiant la loi physique :

$$(4.13) \qquad \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{A}_j}{\partial x_j} = 0 \quad ;$$

on sait que les trajectoires dans E^3 de l'électron, non-relativiste ou relativiste, de masse μ, de charge électrique $-\epsilon < 0$, sont les solutions du système d'Hamilton défini par l'hamiltonien valant dans le cas non-relativiste :

$$(4.14) \qquad H(x,p) = \frac{1}{2\mu} \sum_{j=1}^{3} [p_j + \frac{\epsilon}{c} \mathcal{A}_j(x)]^2 - E - \epsilon \mathcal{A}_o(x) \quad ,$$

dans le cas relativiste :

$$(4.15) \quad H(x,p) = \frac{1}{2\mu} \sum_{j=1} [p_j + \frac{\epsilon}{c} \mathcal{A}_j(x)]^2 - \frac{1}{2\mu c^2} [E + \epsilon \mathcal{A}_o(x)]^2 + \frac{1}{2} \mu c^2 \quad ;$$

c est la vitesse de la lumière ;
E est une constante, qui est l'énergie des électrons dont la position x et la quantité de mouvement p vérifient $H(x,p)=0$;(énergie incluant la masse au repos μc^2 dans le cas relativiste).

Vu (4.13)

$$< \frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial p} > \; H(x,p) = 0 \quad ;$$

vu le chap. II, § 1, (6.3) et déf. 6.2, l'opérateur associé à H est donc, dans le cas non-relativiste l'opérateur de Schrödinger :

$$(4.16) \quad a = \frac{1}{2\mu} [\frac{1}{\nu^2} \Delta + \frac{2\epsilon}{c} \sum_j \mathcal{A}_j(x) \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\epsilon^2}{c^2} \sum_j \mathcal{A}_j^2(x)] - E - \epsilon \mathcal{A}_o(x) \quad ,$$

dans le cas relativiste l'opérateur de Klein-Gordon :

$$(4.17) \quad a = \frac{1}{2\mu} [\frac{1}{\nu^2} \Delta + \frac{2\epsilon}{c} \sum_j \mathcal{A}_j \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\epsilon^2}{c^2} \sum_j \mathcal{A}_j^2] - \frac{1}{2\mu c^2} [E + \epsilon \mathcal{A}_o]^2 + \frac{\mu c^2}{2} \quad .$$

Particularisons comme suit ces hamiltoniens et ces opérateurs : $\mathcal{A}_o$ est le potentiel électrique du noyau de nombre atomique Z, placé à l'origine ; le champ magnétique est constant, parallèle au troisième axe de coordonnées et d'intensité $\mathcal{H}$.

Autrement dit :

$$\mathcal{A}_0(x) = \frac{\varepsilon Z}{R} \; , \; \mathcal{A}_1(x) = -\frac{1}{2}\mathcal{H} x_2 \; , \; \mathcal{A}_2(x) = \frac{1}{2}\mathcal{H} x_1 \; , \; \mathcal{A}_3 = 0 \; . \tag{4.18}$$

Négligeons, comme en physique, les termes en $\mathcal{H}^2$; les hamiltoniens (4.14) et (4.15) de l'électron deviennent des hamiltoniens du type (4.6) : dans le cas non-relativiste

$$H(x,p) = \frac{1}{2\mu}\left[P^2 + \frac{\varepsilon}{c}\mathcal{H} M - 2\mu E - \frac{2\mu\,\varepsilon^2 Z}{R}\right] \; ; \tag{4.19}$$

dans le cas relativiste

$$H(x,p) = \frac{1}{2\mu}\left[P^2 + \frac{\varepsilon}{c}\mathcal{H} M + \mu^2 c^2 - \frac{E^2}{c^2} - \frac{2\varepsilon^2 ZE}{c^2 R} - \frac{\varepsilon^4 Z^2}{c^2 R^2}\right] \; . \tag{4.20}$$

L'opérateur de Schrödinger devient :

$$a = \frac{1}{2\mu}\left[\frac{1}{\nu^2}\Delta + \frac{\varepsilon\mathcal{H}}{c\nu}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right) - 2\mu E - \frac{2\mu\,\varepsilon^2 Z}{R}\right] \; ; \tag{4.21}$$

l'opérateur de Klein-Gordon devient :

$$a = \frac{1}{2\mu}\left[\frac{1}{\nu^2}\Delta + \frac{\varepsilon\mathcal{H}}{c\nu}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right) - \frac{E^2}{c^2} - \frac{2\varepsilon^2 ZE}{c^2 R} - \frac{\varepsilon^4 Z^2}{c^2 R^2}\right] \; . \tag{4.22}$$

La relation $(4.11)_3$ définit E en fonction de (ℓ, m, n) ; ce calcul fait apparaître les constantes classiques :

$\alpha = \frac{\varepsilon^2}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$, "constante de structure fine", sans dimension,

$\beta = \frac{\varepsilon\hbar}{2\mu c}$, "magnéton de Bohr" , ($\beta\mathcal{H}$ a la dimension de l'énergie),

et la fonction valant :

$$F(n,k) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha Z}{n - k + \sqrt{k^2 - \alpha^2 Z^2}}\right)^2}} \; . \tag{4.23}$$

L'énoncé du theorème 4.1 devient le suivant :

THÉORÈME 4.2 . - Soit a l'opérateur de Schrödinger (4.21) ou l'opérateur de Klein-Gordon (4.22), H étant (4.19) ou (4.20) ; soient a_{L^2} et a_M les opérateurs associés à L^2 et M . Pour certaines valeurs des constantes E , L_o , M_o le système lagrangien :

$$(4.9) \qquad a\,U = (a_{L^2} - L_o^2)\,U = (a_M - M_o)\,U = 0 \qquad \text{mod. } 1/\nu^2$$

possède des solutions définies mod. $1/\nu$ sur des variétés COMPACTES ; ces valeurs de E , L_o , M_o s'expriment, en fonction des triplets d'entiers (ℓ, m, n) , tels que :

$$|m| \leqq \ell < n \quad \text{et, dans le cas Klein-Gordon,} \quad \ell + 1/2 \geqq \alpha Z \ ;$$

ces expressions de E , L_o , M_o sont les suivantes :

$$(4.24) \qquad E = -\mu c^2 \frac{\alpha^2 Z^2}{2n^2} + \beta \mathscr{H} m \quad \text{dans le cas Schrödinger,}$$

$$(4.25) \qquad E^2 = \mu c^2 (\mu c^2 + 2\beta \mathscr{H} m)\, F^2(n, \ell + 1/2) \quad \text{dans le cas Klein-Gordon,}$$

$$(4.26) \qquad L_o = \hbar(\ell + 1/2) \quad , \quad M_o = \hbar m \ .$$

Ces solutions de (4.9) sont définies sur les tores (4.12). Munissons ces tores de la mesure invariante (3.16) ; alors ces solutions sont les fonctions lagrangiennes, définies sur ces tores, d'amplitude lagrangienne constante.

Note 4.2 . - Les physiciens, négligeant β^2 et $\beta\alpha^2$, simplifient (4.25) comme suit :

$$\pm E \simeq \mu c^2 F(n, \ell + 1/2) + \beta \mathscr{H} m \ ;$$

le signe $-$ concerne l'anti-matière $(\mu < 0)$.

Note 4.3 . - Les niveaux d'énergie (4.24) et (4.25) sont ceux que donne l'étude de l'équation aux dérivées partielles

$$a\,u = 0 \ ,$$

la fonction $u : E^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ et son gradient étant de carrés sommables (Chap. III , § 4).

§ 2. L'équation lagrangienne $a\, U = 0 \bmod. 1/\nu^2$;

(a associé à H ; U à amplitude lagrangienne $\geqq 0$, définie sur V compacte).

0. INTRODUCTION. - Sommaire. - Le § 1 a étudié le problème (1) (Introduction du chap. III), c'est-à-dire un système de trois équations lagrangiennes. Ce § 2 étudie la première de ces trois équations et, plus précisément, le problème (2) (Ibid.).

Toute solution du problème (1) est solution du problème (2), vu le théorème 3 du § 1. Dans le cas exceptionnel où l'hamiltonien H est indépendant de M (par exemple : Schrödinger et Klein-Gordon sans champ magnétique), une même rotation de E^3 opérant sur x et p transforme évidemment les solutions du problème (1) en solutions du problème (2) qui ne sont plus solutions du problème (1). Sans se placer dans ce cas exceptionnel, le théorème 1 de ce § 2 construit des solutions du problème (2) qui ne sont pas solutions du problème (1) : une solution du problème (2) définie sur un tore $T(\ell, m, n)$ (§ 1, théor. 3) n'est pas, en général, unique à un facteur multiplicatif constant près.

Par contre, le théorème 2 montre que, même si H dépend de paramètres, ces tores $T(\ell, m, n)$ sont en général les seules variétés lagrangiennes compactes V sur lesquelles sont définies des solutions du problème (2). Le théorème 3.1. précise même que, dans le cas Schrödinger et Klein-Gordon, les problèmes (1) et (2) définissent les mêmes niveaux d'énergie : les niveaux classiques.

Note. - Le théorème 1 de ce § 2 n'a pas de signification physique : son critère est le caractère rationnel ou non de nombres qui, dans le cas de Schrödinger et Klein-Gordon, dépendent de grandeurs physiques.

CONCLUSIONS. - Appelons "problème bien posé" un problème qui, posé pour l'équation de Schrödinger - Klein-Gordon, a les caractères essentiels du problème classique (4)

(Introduction au Chap. III) : le problème (1) (Ibid.) est bien posé, vu le § 1, théorème 4.2 ; vu la note qui précède, ce § 2 montre que le problème (2) (Ibid) n'est pas bien posé.

1. LES SOLUTIONS DE L'EQUATION $a\,U = 0 \mod. 1/\nu^2$, À AMPLITUDE LAGRANGIENNE $\geqq 0$, DEFINIES SUR LES TORES $V[L_o, M_o]$. - Le § 1, n° 2 a choisi H et défini les variétés :

$$W : H = 0 \quad ; \quad V[L_o, M_o] : H = L - L_o = M - M_o = 0 .$$

Toute variété lagrangienne compacte V de W est réunion de caractéristiques K de H (dont le paramètre t varie de $-\infty$ à $+\infty$) ; V est donc réunion d'adhérences compactes $\bar{K}$ de telles caractéristiques.

Propriétés d'une caractéristique K de H à adhérence compacte $\bar{K}$. - Une telle caractéristique K, vu § 1 (2.13), appartient à un tore $V[L_o, M_o]$ et a pour équations dans ce tore :

$$(1.1) \qquad K : \Psi - \Psi_o + \lambda[L_o, M_o, t] = \Phi - \Phi_o + \mu[L_o, M_o, t] = 0 \quad (\Phi_o, \Psi_o : \text{cons}^t)$$

Rappelons que les coordonnées de $V[L_o, M_o]$:

$$(\Psi, \Phi, t)$$

sont définies

$$(\text{mod. } 2\pi, \text{ mod. } 2\pi, \text{ mod } c_o), \text{ où } c_o = c[L_o, M_o].$$

Plus explicitement : soit R^3 de coordonnées (Ψ, Φ, t) ; soit $\mathbf{Z}^3$ le groupe additif des triplets d'entiers (ξ, η, ζ) opérant comme suit sur R^3 :

$$\mathbf{Z}^3 \ni (\xi, \eta, \zeta) : (\Psi, \Phi, t) \longmapsto (\Psi + 2\pi\xi, \Phi + 2\pi\eta, t + c_o\zeta) :$$

le quotient de R^3 par ce groupe $\mathbf{Z}^3$ est $V[L_o, M_o]$; il existe une application naturelle :

$$(1.2) \qquad R^3 \to R^3/\mathbf{Z}^3 = V[L_o M_o].$$

Etant donnée une fonction

$$F : (L, M, t) \to F[L, M, t] \in R,$$

notons :

$$\Delta_t F[L,M,t] = F[L,M,t+c[L,M]] - F[L,M,t];$$

évidemment :

(1.3) $$\Delta_t R = \Delta_t Q = o ;$$

vu, au § 1, les définitions (2.8) de Ω et (2.9) de N :

(1.4) $$\Delta_t \Omega[L,M,t] = 2\pi N[L,M] ;$$

vu (1.3) et au § 1 la définition (2.10) de λ et μ :

$$2\pi\, d N[L,M] = \Delta_t \lambda [L,M,t]\, dL + \Delta_t \mu [L,M,t]\, dM,$$

c'est-à-dire :

(1.5) $$\Delta_t \lambda = 2\pi N_L , \quad \Delta_t \mu = 2\pi N_M .$$

Notons :

$$N_{L_o} = N_L[L_o, M_o], \quad N_{M_o} = N_M[L_o, M_o] .$$

Nous pouvons maintenant expliciter $\bar{K}$:

LEMME 1.1. - 1) Supposons N_{L_o} et N_{M_o} rationnels :

(1.6) $$N_{L_o} = -\frac{L_1}{N_1}, \quad N_{M_o} = -\frac{M_1}{N_1}, \text{ où } (L_1, M_1, N_1) \in \mathbf{Z}^3, \text{ P.G.C.D. } (L_1, M_1, N_1) = 1 ;$$

(c'est-à-dire : L_1, M_1, N_1 sont des entiers, de plus grand commun diviseur 1). Alors $K = \bar{K}$ <u>est une courbe fermée</u>, d'équations (1.1).

Plus précisément les équations (1.1) définissent une courbe ouverte $\tilde{R}^1$ (c'est-à-dire homéomorphe à R^1) de R^3 ; vu (1.5) et (1.6), le sous-groupe $\tilde{\mathbf{Z}}^1$ de $\mathbf{Z}^3$ engendré par (L_1, M_1, N_1) laisse $\tilde{R}^1$ invariant ; on a :

(1.7) $$K = \bar{K} = \tilde{R}^1 / \tilde{Z}_1 .$$

2°) Supposons N_{L_o} <u>et</u> N_{M_o} <u>liés par une unique relation affine</u>

(1.8) $L_1 N_{L_o} + M_1 N_{M_o} = N_1$, où $(L_1, M_1, N_1) \in \mathbb{Z}^3$, P.G.C.D. $(L_1, M_1, N_1) = 1$.

Alors $\bar{K}$ <u>est le tore</u> T^2, de dimension 2 , défini dans $V[L_o, M_o]$ par l'équation :

(1.9) $L_1 \{\Psi - \Psi_o + \lambda [L_o, M_o, t]\} + M_1 \{\Phi - \Phi_o + \mu [L_o, M_o, t]\} = 0$.

Plus précisément, l'équation (1.9) définit une surface $\tilde{\mathbb{R}}^2$ de $\mathbb{R}^3$ homéomorphe à $\mathbb{R}^2$; vu (1.5) et (1.8), le sous-groupe $\tilde{\mathbb{Z}}^2$ de $\mathbb{Z}^3$ d'équation :

(1.10) $$\tilde{\mathbb{Z}}^2 : \ L_1 \xi + M_1 \eta + N_1 \zeta = 0$$

opère sur $\tilde{\mathbb{R}}^2$; on a :

(1.11) $$T^2 = \tilde{\mathbb{R}}^2 / \tilde{\mathbb{Z}}^2 .$$

Pour expliciter des générateurs de $\tilde{\mathbb{Z}}^2$, notons :

(1.12) $L_2 =$ P.G.C.D (M_1, N_1) , $M_2 =$ P.G.C.D. (L_1, N_1), $N_2 =$ P.G.C.D. (L_1, M_1) ;

M_2 et N_2 divisent L_1 ; P.G.C.D $(M_2, N_2) = 1$ vu $(1.8)_3$; il existe donc L_3 et de même M_3 , N_3 , entiers tels que :

(1.13) $$L_1 = L_3 M_2 N_2 , \quad M_1 = L_2 M_3 N_2 , \quad N_1 = L_2 M_2 N_3 .$$

$\tilde{\mathbb{Z}}^2$ est engendré par ses trois éléments :

(1.14) $$(0, M_2 N_3, -M_3 N_2), \ (-L_2 N_3, 0, L_3 N_2), \ (L_2 M_3, -L_3 M_2, 0),$$

que lie évidemment la relation

(1.15) $$L_3 (0, M_2 N_3, -M_3 N_2) + M_3 (-L_2 N_3, 0, L_3 N_2) + N_3 (L_2 M_3, -L_3 M_2, 0) = 0 .$$

3°) Supposons qu'<u>aucune relation affine à coefficients entiers ne lie</u> N_{L_o} <u>et</u> N_{M_o} .

Alors $\bar{K}$ <u>est le tore</u> $V[L_o, M_o]$.

Preuve. - La partie de R^3 dont K est l'image naturelle dans $V[L_o, M_o]$ est définie par la condition :

$$\left(\frac{\Psi - \Psi_o + \lambda\,[L_o, M_o, t]}{2\pi}, \frac{\Phi - \Phi_o + \mu\,[L_o, M_o, t]}{2\pi}\right) \in G$$

où G est l'image de $\mathbf{Z}^3$ dans le groupe additif R^2 par le morphisme :

$$\mathbf{Z}^3 \ni (\xi, \eta, \zeta) \mapsto (\xi + N_{L_o}\,\zeta, \eta + N_{M_o}\,\zeta) \in R^2 .$$

Donc $\bar{K}$ est l'image naturelle dans $V[L_o, M_o]$ de la partie fermée de R^3 définie par la condition

$$(1.16) \qquad \left(\frac{\Psi - \Psi_o + \lambda\,[L_o, M_o, t]}{2\pi}, \frac{\Phi - \Phi_o + \mu\,[L_o, M_o, t]}{2\pi}\right) \in \bar{G}$$

où $\bar{G}$ est l'adhérence de G ; $\bar{G}$ un sous-groupe fermé de R^2.

Trois cas se présentent :

1) G est discret ; 2) dim $\bar{G} = 1$; 3) $\bar{G} = R^2$.

1) G est discret, c'est-à-dire : $\bar{G} = G$. La condition qu'il en soit ainsi s'énonce : N_{L_o} et N_{M_o} sont rationnels

(Cf. rapidité de convergence vers un nombre irrationnel des réduites de son développement en fraction continue). Sous l'hypothèse (1.6), qui exprime cette condition, $\bar{K} = K$ et le sous-groupe $\tilde{Z}^1$ de Z^3 qui laisse invariant la courbe $\tilde{R}^1 \subset R^3$ d'équations (1.1) a pour éléments les $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbf{Z}^3$ tels que :

$$N_1\,\xi = L_1\,\zeta , \; N_1\,\eta = M_1\,\zeta ;$$

vu $(1.6)_3$, N_1 divise ζ ; $\tilde{Z}^1$ est donc engendré par $(L_1, M_1, N_1) \in \mathbf{Z}^3$.

2) dim $\bar{G} = 1$. - $\bar{G}$ est alors l'ensemble des $(\theta, \tau) \in R^2$ vérifiant une condition :

$$(1.17) \qquad L_1\,\theta + M_1\,\tau \in \mathbf{Z}, \; (L_1, M_1 \in R) ;$$

vu la définition de G, la condition que $\bar{G}$ est le sous-groupe (1.17) de R^2 s'énonce :

(1.8) est vérifié ; G n'est pas discret ;

vu 1°), elle s'énonce donc :

N_{L_o} et N_{M_o} <u>sont liés par une unique relation affine à coefficients entiers, qui est</u> (1.8) .

Sous cette hypothèse, vu la définition (1.16) de $\bar{K}$ et la définition (1.17) de $\bar{G}$, $\bar{K}$ est l'image par (1.2) de la variété $\tilde{R}^2$ de $\mathbf{R}^3$ d'équation (1.9) . Le sous-groupe $\tilde{\mathbf{Z}}^2$ de $\mathbf{Z}^3$ qui laisse invariant $\tilde{R}^2$ est évidemment défini par (1.10), qui implique, vu $(1.8)_3$ et (1.12) :

(1.18) $\qquad L_2, M_2, N_2$ divisent respectivement ξ, η, ζ.

Vu (1.13), $\tilde{\mathbf{Z}}_2$ contient les trois éléments (1.14). D'une part $(1.14)_1$ engendre le sous-groupe de $\tilde{\mathbf{Z}}_2$ d'équation :

$$\xi = 0 ,$$

car P.G.C.D. $(M_2 N_3 , M_3 N_2) = 1$, vu $(1.12)_1$, $(1.13)_2$ et $(1.13)_3$. Donc P.G.C.D. $(N_3, M_3) = 1$, ce qui implique que, sur le sous-groupe de $\tilde{\mathbf{Z}}_2$ engendré par ses éléments $(1.14)_2$ et $(1.14)_3$, ξ prend toutes valeurs multiples de L_2 . Les trois éléments (1.14) de $\tilde{\mathbf{Z}}_2$ engendrent donc $\tilde{\mathbf{Z}}_2$, vu (1.18).

3°) $\bar{G} = R^2$. - Vu 1°) et 2°), la condition que $\bar{G} = R^2$ s'énonce :

N_{L_o} et N_{M_o} ne sont liés par aucune relation affine à coefficients entiers.

Si $\bar{G} = R^2$, alors $\bar{K}$ est l'image de R^3 par (1.2) ; donc $\bar{K} = V[L_o , M_o]$.

<u>Mesures de $V[L_o , M_o]$ invariantes</u>. - Rappelons que $V[L_o , M_o]$ possède une mesure > 0, invariante par le vecteur caractéristique $\varkappa$ de H (§ 1 , (3.2)) :

$$\eta_V = dt \wedge d\Phi \wedge d\Psi .$$

Toute mesure de $V[L_o , M_o]$ invariante par $\varkappa$ est le produit de η_V par une fonction $V[L_o , M_o] \to R$ invariante par $\varkappa$, c'est-à-dire constante sur les adhérences $\bar{K}$ des caractéristiques K de H appartenant à $V[L_o, M_o]$.

Le lemme suivant est donc une conséquence évidente du lemme 1.1 :

LEMME 1.2. - 1°) Supposons que N_{L_o} <u>et</u> N_{M_o} <u>sont les nombres rationnels</u> (1.6). Alors les caractéristiques de H appartenant à $V[L_o, M_o]$ sont les courbes fermées d'équations :

$$K(c_1, c_2) : \Psi + \lambda[L_o, M_o, t] = c_1 \quad \Phi + \mu[L_o, M_o, t] = c_2 ,$$

où c_1 et c_2 sont des constantes définies respectivement

$$\text{mod. } 2\pi\frac{M_2}{N_1} = \frac{2\pi}{L_2 N_3} , \qquad \text{mod. } 2\pi\frac{L_2}{N_1} = \frac{2\pi}{M_2 N_3} ;$$

$$L_2 = \text{P.G.C.D.}(M_1, N_1) , \quad M_2 = \text{P.G.C.D.}(L_1, N_1) .$$

Les <u>mesures de</u> $V[L_o, M_o]$ <u>invariantes</u> par le vecteur caractéristique $\varkappa$ de H valent :

$$F(\Psi + \lambda[L_o, M_o, t] , \Phi + \mu[L_o, M_o, t]) \eta_V , \tag{1.19}$$

$F(.,.)$ étant <u>une fonction arbitraire de périodes</u> respectives $2\pi\frac{M_2}{N_1}$ et $2\pi\frac{L_2}{N_1}$ en ses deux arguments.

2°) Supposons N_{L_o} <u>et</u> N_{M_o} <u>liés par l'unique relation affine</u> (1.8). Alors les adhérences $\bar{K}$ des caractéristiques K de H appartenant à $V[L_o, M_o]$ sont les tores d'équations :

$$T^2(c_o) : L_1\{\Psi + \lambda[L_o, M_o, t]\} + M_1\{\Phi + \mu[L_o, M_o, t]\} = c_o , \tag{1.20}$$

c_o étant une constante définie mod. 2π. Les <u>mesures</u> <u>de</u> $V[L_o, M_o]$ <u>invariantes</u> par le vecteur caractéristique $\varkappa$ de H valent :

$$F[L_1(\Psi + \lambda) + M_1(\Phi + \lambda)] \eta_V , \tag{1.21}$$

$F[.]$ étant <u>une fonction arbitraire de période</u> 2π.

3°) Supposons qu'<u>aucune relation affine à coefficients entiers ne lie</u> N_{L_o} <u>et</u> N_{M_o} ;

alors toute caractéristique K de H appartenant à $V[L_o, M_o]$ a pour adhérence $\bar{K} = V[L_o, M_o]$. Toute mesure de $V[L_o, M_o]$ invariante par le vecteur caractéristique $\varkappa$ de H vaut :

$$\text{const. } \eta_V . \tag{1.22}$$

Il est aisé de conclure :

THEOREME 1. - 1°) Les tores $V[L_o, M_o]$ sur lesquels peut être définie mod. $1/\nu$ une solution lagrangienne U, à amplitude lagrangienne $\geqq 0$, de l'équation

$$a\, U = 0 \text{ mod. } 1/\nu^2 \qquad (a : \text{opérateur associé à } H)$$

sont définis par la condition (3.11), (3.12) du § 1 : il existe trois entiers :

$$\ell, m, n,$$

tels que :

$$|m| \leqq \ell < n,$$

$$L_o = \hbar\,(\ell + 1/2), \quad M_o = \hbar\, m, \quad L_o + N[L_o, M_o] = \hbar\, n.$$

2°) Pour que la solution U, définie sur un tel tore, soient unique, à un facteur constant près, il faut et suffit que les dérivées de N :

$$N_L[L_o, M_o],\ N_M[L_o, M_o]$$

ne soient liées par aucune relation affine à coefficients entiers.

Preuve. - Vu le théorème 6 du chap. II, § 3 : la condition d'existence d'une telle solution sur $V[L_o, M_o]$ est la condition quantique de Maslov ; la condition de son unicité est celle de l'unicité de la mesure invariante η de $V[L_o, M_o]$ (à un facteur constant près). Le § 1, n° 3 a donné à la condition quantique de Maslov l'énoncé (3.11) - (3.12). Le lemme 1.2 donne la condition d'unicité de la mesure invariante.

2. VARIETES LAGRANGIENNES COMPACTES V, AUTRES QUE LES TORES $V[L_o, M_o]$, SUR LESQUELLES EXISTENT DES SOLUTIONS DE L'EQUATION : $a\,U = 0$ mod. $1/\nu^2$, A AMPLITUDE LAGRANGIENNE $\geqq 0$. - Montrons que de telles variétés V n'existent qu'exceptionnellement.

Le calcul de leur indice de Maslov (lemme 2.3 et 2.4) emploiera les propriétés suivantes :

<u>Autres propriétés des caractéristiques</u> K <u>de</u> H <u>à adhérence compacte</u>. –
La différentiation de la définition (2.10) (Chap. III, §1) de λ et μ donne :

$$\frac{1}{R}\, d\,Q \wedge d\,R + d\,\lambda \wedge d\,L + d\,\mu \wedge d\,M = 0\,,$$

où L, M, Q, R sont des fonctions de (L,M,t) vérifiant $H[L,M,Q,R] = 0$; donc :

$$H_L\, d\,L + H_M\, d\,M + H_Q\, d\,Q + H_R\, d\,R = 0\,;$$

d'où, par élimination de $d\,Q$:

$$\left[\frac{H_L}{RH_Q}\, dR + d\lambda\right] \wedge d\,L + \left[\frac{H_M}{RH_Q}\, d\,R + d\,\mu\right] \wedge d\,M = 0\,;$$

il existe donc trois fonctions numériques réelles ρ, σ, τ de (L, M, t) ; définies pour $H_Q \neq 0$, telles que :

$$d\,\lambda = -\frac{H_L}{RH_Q}\, d\,R + \rho\, d\,L + \sigma\, d\,M\,,$$

(2.1)

$$d\,\mu = -\frac{H_M}{RH_Q}\, d\,R + \sigma\, d\,L + \tau\, d\,M\,;$$

vu l'expression (1.5) de $\Delta_t\lambda$ et $\Delta_t\mu$, puis, au § 1, la définition (2.6) de t, ces relations impliquent :

(2.2) $$\Delta_t\rho = 2\pi N_{L^2}\,,\ \Delta_t\,\sigma = 2\,\pi\, N_{LM}\,,\ \Delta_t\,\tau = 2\pi N_{M^2}\,,$$

(2.3) $$\lambda_t\,[L, M, t] = -H_L\,[L, M, Q, R]\,,\ \mu_t = -H_M\,.$$

Explicitons <u>la partie singulière</u>, pour $H_Q = 0$, de ρ, σ, τ et $\rho\,\tau - \sigma^2$: vu (2.1),

(2.4) $$\rho = \frac{R_L\, H_L}{R\ \ H_Q} + \lambda_L\,,\ \sigma = \frac{R_M\, H_L}{R\ \ H_Q} + \lambda_M = \frac{R_L\, H_M}{R\ \ H_Q} + \mu_L\,,\ \tau = \frac{R_M\, H_M}{R\ \ H_Q} + \mu_M\,;$$

donc :

$$\rho\,\tau - \sigma^2 = \frac{1}{R\,H_Q}\,[R_L\,H_L\,\mu_M - R_M\,H_L\,\mu_L - R_L\,H_M\lambda_M + R_M\,H_M\,\lambda_L] + \lambda_L\,\mu_M - \lambda_M\,\mu_L\,.$$

Or, puisque $H\,[L\,,M\,,Q\,,R\,] = 0$:

$$H_R\,R_L + H_L + H_Q\,Q_L = H_R\,R_M + H_M + H_Q\,Q_M = 0\;;$$

quand $H_R \neq 0$, ces relations permettent d'éliminer R_L et R_M des expressions précédentes de $\rho\,,\sigma\,,\tau\,,\rho\,\tau-\sigma^2$; vu, au § 1, l'hypothèse (2.2) :

$$H_R \neq 0 \text{ pour } H_Q = 0\;;$$

donc :

LEMME 2.1. - Les fonctions

$$\rho + \frac{H_L^2}{R\,H_Q\,H_R}\quad,\ \sigma + \frac{H_L\,H_M}{R\,H_Q\,H_R}\quad,\ \tau + \frac{H_M^2}{R\,H_Q\,H_R}\quad,$$

(2.5)

$$\rho\,\tau - \sigma^2 + \frac{1}{R\,H_Q\,H_R}\,[\,H_L^2\,\mu_M - H_L\,H_M\,(\,\mu_L + \lambda_M) + H_M^2\,\lambda_L\,]$$

sont bornées au voisinage des points où $H_Q = 0$.

Propriétés des variétés lagrangiennes compactes V de W. - V est engendré par des caractéristiques de H, à adhérence compacte, appartenant donc à des tores $V\,[\,L_o\,,M_o\,]$; les fonctions

$$L\,,M\,,N = N\,[L\,,M\,]\,,\quad c = c\,[L\,,M\,]$$

sont donc définies sur V .

Notons V_2 la partie ouverte de V où $d\,L\wedge d\,M \neq 0$, si elle n'est pas vide. Quand $d\,L \wedge d\,M = 0$ sur V, notons V_1 la partie ouverte de V où $(d\,L\,,d\,M) \neq 0$, si elle n'est pas vide. V_1 et V_2 sont donc des variétés lagrangiennes de V, non nécessairement compactes, engendrées par des caractéristiques K de H , à adhérences $\bar{K}$ compactes ; elles contiennent ces adhérences.

Quand V_2 et V_1 n'existent pas, V <u>est donc l'un des tores</u> $V[L_o , M_o]$. Vu le lemme suivant, ni V_1 , ni V_2 n'existe, sauf si le graphe de la fonction :

$$N : (L , M) \mapsto N [L , M]$$

<u>contient un segment rectiligne de direction rationnelle</u>.

La conséquence du théorème 2 qu'énonce l'introduction (§ 2 , n° 0) résulte donc de ce lemme .

LEMME 2.2 . - 1°) <u>Sur</u> V_2 , N <u>est fonction affine de</u> (L , M) ; plus précisément :

(2.6) $L_1\, dL + M_1\, dM + N_1\, dN = 0$, où $(L_1 , M_1 , N_1) \in \mathbf{Z}^3$, P.G.C.D. $(L_1 , M_1 , N_1) = 1$.

V_2 est défini dans W par la donnée d'une fonction F de deux variables et par les équations:

$$(2.7) \qquad \Psi + \lambda [L , M , t] + F_L [L , M] = \Phi + \mu [L , M , t] + F_M [L , M] = 0 .$$

Plus précisément, dans l'espace R^5 de coordonnées $(L , M , \psi , \Phi , t)$, ces équations (2.7) définissent une variété $\tilde{V}_2$ de dimension 3 , sur laquelle, vu (1.5) où $N_L = - L_1 / N_1$, $N_M = - M_1 / L_1$, le sous-groupe $\tilde{\mathbf{Z}}_1$ de $\mathbf{Z}_3$ engendré par $(L_1 , M_1 , N_1) \in \mathbf{Z}^3$ opère comme suit :

$$(2.8) \qquad (\xi , \eta , \zeta) : (L , M , \psi , \Phi , t) \mapsto (L , M , \psi + 2\pi\xi , \Phi + 2\pi\eta , t + c [L , M] \zeta) ;$$

on a :

$$(2.9) \qquad V_2 = \tilde{V}_2 / \tilde{\mathbf{Z}}_1 .$$

V_2 possède la <u>mesure invariante</u> par le vecteur caractéristique de H :

$$\eta_V = d\, L \wedge d\, M \wedge d\, t.$$

2°) <u>Sur</u> V_1 , L , M et N <u>sont fonctions affines d'une même variable</u> s ; plus précisément :

(2.10) $\frac{dL}{L_1} = \frac{dM}{M_1} = \frac{dN}{N_1} = ds$ où $(L_1, M_1) \neq 0$, $(L_1, M_1, N_1) \in \mathbf{Z}^3$, P.G.C.D. $(L_1, M_1, N_1) = 1$.

V_1 est défini dans W par la donnée de trois fonctions de s :

L et M, affines, vérifiant (2.10), et F,

et par les équations :

$$L = L(s) \, , \quad M = M(s) \, ,$$

(2.11)

$$L_1 \{ \psi + \lambda [L, M, t] \} + M_1 \{ \Phi + \mu [L, M, t] \} + F_s(s) = 0 \, .$$

Plus précisément, ces équations (2.11) définissent dans R^5 une variété $\tilde{V}_1$ de dimension 3, sur laquelle opère suivant (2.8) le sous-groupe $\tilde{Z}_2$ de Z_3 d'équation (1.10) ; rappelons que ce sous-groupe est engendré par ses trois éléments (1.14) ; on a :

(2.12) $$V_1 = \tilde{V}_1 / \tilde{Z}_2 \, .$$

V_1 possède la <u>mesure invariante</u> par le vecteur caractéristique de H :

$$\eta_V = (M_1 \, d\psi - L_1 \, d\Phi) \wedge ds \wedge dt \, .$$

3°) Les <u>phases</u> de V_1 et V_2 dans le repère R_o (chap. III, § 1, n° 1) valent:

(2.13) $$\varphi_{R_o} = \Omega + L \Psi + M \Phi + F \, .$$

<u>Note 2.1</u>. - Au § 1, (2.8) et (2.10) définissent :

Ω à l'addition près d'une fonction F de (L, M) ;

λ et μ à l'addition près de ses dérivées F_L et F_M.

Etant donné V_1 ou V_2, on peut donc choisir Ω tel que dans (2.7), (2.11) et (2.13) :

$$F = 0 \, .$$

Pour quantifier V, nous n'emploierons que la conséquence suivante de (2.13) et des définitions, au § 1, (2.7) de $c[L, M]$, (2.9) de N : F étant choisi nulle, la fonction :

(2.14) $\varphi_{R_o} - 2\pi N \dfrac{t}{c\,[L,M]} - L\Psi - M\Phi$ est définie sur V_1 et sur V_2 .

Préliminaires à la preuve . - Vu la formule (2.11) du § 1 , le théorème 3.1 du chap. II, § 3 s'applique avec :

$$\ell = 3 \, , h_1 = L \, , h_2 = M \, , g_o = \Omega + L\Psi + M\Phi \, , g_1 = -\Psi - \lambda \, , g_2 = -\Phi - \mu \, ,$$

la phase φ_{R_o} devant remplacer la phase lagrangienne ψ .
Toute variété lagrangienne V de W a donc localement des équations de l'un des quatre types suivants :

(2.15)$_1$ $$\Psi + \lambda + F_L\,[L, M] = \Phi + \mu + F_M = 0 \, ;$$

(2.15)$_2$ $$M = f\,(L) \, , \Psi + \lambda + f_L\,(L)\,(\Phi + \mu) + F_L\,(L) = 0 \, ;$$

(2.15)$_3$ résultant de (2.15)$_2$ par permutation de (L, Ψ), (M, Φ) ;

(2.15)$_4$ $$L = \text{const.} \, , M = \text{const.} \, ;$$

F et f sont fonctions d'une ou deux variables. La phase φ_{R_o} de V a l'expression (2.13) , avec $F = 0$ dans le quatrième cas .

Preuve de 1°) . - Localement, V_2 a des équations du type (2.15)$_1$; V_2 est donc engendré par des caractéristiques K appartenant à des tores $V\,[L_o, M_o]$ disjoints ; leurs adhérences $\bar{K}$ sont donc disjointes et appartiennent à V_2 ; dim $V_2 = 3$; donc :

$$\dim. \bar{K} = 1 \, .$$

Vu le lemme 1.1, les valeurs de N_L et N_M sur V sont donc des nombres rationnels. Les fonctions N_L et N_M sont donc constantes sur V et vérifient (1.6) , ce qu'exprime (2.6) . D'où 1°) et (2.13).

Preuve de 2°) . - Localement, V_1 a des équations du type (2.15)$_2$ ou (2.15)$_3$; c'est-à-dire du type :

$$(2.16) \qquad L = L(s)\,,\ M = M(s)\,,\ L_s(s)(\Psi+\lambda) + M_s(s)(\Phi+\mu) + F_s(s) = 0$$

où $(L_s, M_s) \neq 0$. Pour chaque valeur de s, notons $T(s)$ la variété de W d'équations (2.16) : dim $T(s) = 2$.

Puisque V_1 est engendré par des caractéristiques d'équations :

$$L = \text{const.}\ ,\ M = \text{const.}\ ,\ \Psi+\lambda = \text{const.}\ ,\ \Phi+\mu = \text{const.}$$

et contient leurs adhérences, V_1 contient les adhérences $\overline{T(s)}$ des $T(s)$. Déterminons-les.

Vu l'expression (1.5) de $\Delta_t\lambda$ et $\Delta_t\mu$ et vu que $L_s N_L + M_s N_M = N_s$, $T(s)$ est l'image dans W de l'ensemble des $(\Psi, \Phi, t) \in R^3$ tels que :

$$L_s \frac{\Psi+\lambda[L, M, t]}{2\pi} + M_s \frac{\Phi+\mu[L, M, t]}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} F_s \in G(s)\ ,$$

où $G(s)$ est l'image de Z^3 dans le groupe additif R par le morphisme :

$$Z^3 \ni (\xi, \eta, \zeta) \mapsto L_s\,\xi + M_s\,\eta + N_s\,\xi\,.$$

$\overline{T(s)}$ est donc l'image dans W de l'ensemble des $(\Psi, \Phi, t) \in R^3$ tels que :

$$L_s \frac{\Psi+\lambda[L, M, t]}{2\pi} + M_s \frac{\Phi+\mu[L, M, t]}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} F_s \in \overline{G(s)}\ ,$$

$\overline{G(s)}$ étant l'adhérence de $G(s)$, donc un sous-groupe fermé de R .

$\overline{G}(s) = R$ et $\overline{T(s)}$ est donc le tore, de dimension 3 , $V[L(s), M(s)]$, sauf si $G(s)$ est discret, c'est-à-dire s'il existe $(L_1, M_1, N_1) \in Z^3$ tels que

$$\frac{L_s}{L_1} = \frac{M_s}{M_1} = \frac{N_s}{N_1}\ ,\quad \text{P.G.C.D.}\ (L_1, M_1, N_1) = 1\ .$$

Puisque dim $V_1 = 3$, il doit en être ainsi pour tout s : les fonctions M_s / L_s , N_s / L_s sont à valeurs rationnelles, donc constantes ; les entiers L_1, M_1, N_1 sont indépendants de s , qu'on peut choisir tel que (2.10) ait lieu. D'où 2°) et (2.13).

Quantification de V. - Imposons à V la condition quantique de Maslov ; pour l'exprimer, calculons l'indice de Maslov m_{R_o} de V_2 et de V_1 ; nous emploierons le lemme 1 du § 1 .

Nous ferons $F = 0$ dans le lemme 2.2 (cf. Note 2.1) .

LEMME 2.3 . - 1°) Les fonctions ρ, σ, τ sont définies sur V_2 ; notons $\bar{R}$ le complété de R par un point à l'infini ; la fonction $F : V_2 \to \bar{R}$ valant

$$F(L, M, t) = \frac{\rho L^2 + 2\sigma LM + \tau M^2}{L(L^2 - M^2)(\rho\tau - \sigma^2)} \in \bar{R} \tag{2.17}$$

est donc définie sur $V_2 \setminus \Sigma''$, Σ'' étant la partie de V_2 où :

$$\Sigma'' : \frac{\rho}{M^2} = - \frac{\sigma}{LM} = \frac{\tau}{L^2} . \tag{2.18}$$

2°) Si $V_2 \setminus \Sigma''$ est connexe, alors sur son revêtement universel :

$$m_{R_o} = \left[\frac{1}{\pi} \Psi + \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} F(L,M,t) \right] , \quad ([\ldots] : \text{partie entière de } \ldots) . \tag{2.19}$$

3°) La fonction :

$$m_{R_o} - \frac{1}{\pi} \Psi - 2 \frac{t}{c[L, M]} \tag{2.20}$$

est définie (c'est-à-dire : uniforme) sur V_2 .

Note 2.2 . - Supposons donnée la fonction

$$N : (L, M) \mapsto N[L, M] , \text{ vérifiant (2.6)} ,$$

choisissons H vérifiant (2.9) , § 1, puis Ω vérifiant (2.8) , § 1 ; pour des choix génériques :

$$\dim \Sigma'' = 1 , \; V_2 \setminus \Sigma'' \text{ est connexe} .$$

Preuve de 1°) . - Rappelons que (L, M, t) sont des coordonnées locales de V_2 ; vu (2.2) et (2.6)

$$\Delta_t \rho = \Delta_t \sigma = \Delta_t \tau = 0 ;$$

d'où 1°) .

<u>Preuve de</u> 2°) . - <u>Le contour apparent de</u> V_2 . - Les formules (1.11) et (1.13) du § 1 donnent sur W :

(2.21) $$\frac{L}{\sin\Theta} \omega_2 \wedge \omega_3 = L \sin\Psi \, d\Phi \wedge d\Psi + \frac{\cos\Psi}{L^2 - M^2} (M\,dL - L\,dM) \wedge (L\,d\Psi + M\,d\Phi) .$$

Or la différentation de (2.7) , où $F = 0$, donne sur V_2, vu la définition (2.1) de ρ, σ, τ :

$$d\Psi + \rho\, dL + \sigma\, dM = d\Phi + \sigma\, dL + \tau\, dM = 0 \qquad \text{mod. } dR ;$$

vu (2.6) § 1 :

$$dR = R H_Q \, dt \quad \text{mod. } (dL , dM) .$$

D'où :

(2.22) $$\frac{L}{R \sin\Theta} dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = G (L, M, t, \Psi) \, dL \wedge dM \wedge dt ,$$

en notant G la fonction, qui, vu le lemme 2.1 , est régulière sur V_2 :

$$G = - H_Q \left[L(\rho\tau - \sigma^2) \sin\Psi + \frac{\rho L^2 + 2\sigma LM + \tau M^2}{L^2 - M^2} \cos\Psi\right] .$$

Vu le lemme 1 du § 1 , le contour apparent Σ_{R_o} de V_2 est donc :

$$\Sigma_{R_o} = \Sigma' \cup \Sigma'' ,$$

Σ'' étant défini par (2.18) , Σ' étant la surface de $V_2 \setminus \Sigma''$ d'équation :

(2.23) $$\Sigma' : \quad \operatorname{tg}\Psi + F(L, M, t) = 0 ,$$

où F est défini par (2.17) .

<u>Calcul de</u> m_{R_o} . - Les formules (1.11) et (1.13) du § 1 donnent sur W :

(2.24) $$\frac{L}{\sin\Theta} \omega_3 \wedge \omega_1 = L \cos\Psi \, d\Phi \wedge d\Psi - \frac{\sin\Psi}{L^2 - M^2} (M\,dL - L\,dM) \wedge (L\,d\Psi + M\,d\Phi) ;$$

d'où, par les calculs qui déduisent (2.22) de (2.21) :

(2.25) $\frac{L}{R\sin\theta}\, dR\wedge\omega_3\ \wedge\omega_1 = G_\Psi(L, M, t, \Psi)\, dL\wedge dM\wedge dt$.

Ces relations (2.22), (2.25) et le lemme 1 § 1 donnent, au voisinage d'un point de Σ':

$$m_R = \text{const.} \quad \text{pour } G/G_\Psi < 0,$$

$$m_R = 1+\text{const.} \quad \text{pour } G/G_\Psi > 0.$$

Ce résultat vaut évidemment pour toute fonction G s'annulant une fois sur Σ', par exemple pour la fonction :

$$G = \frac{1}{\pi}\Psi + \frac{1}{\pi}\ \text{arc tg}\ F(L, M, t) \qquad \text{mod. } 1\ ;$$

donc, sur $V_2\setminus\Sigma''$, m_{R_0} a localement l'expression (2.19), à une constante additive près. D'où 2°).

Preuve de 3°). - Supposons d'abord H et Ω génériques (Note 2.2), donc $V_2\setminus\Sigma''$ connexe et

$$LH_L + MH_M \neq 0 \quad \text{pour } H_Q = 0,$$

ce qui implique, vu le lemme 2.1, que la fonction

$$f = \rho L^2 + 2\sigma LM + \tau M^2 : V_2\setminus\Sigma'' \to \bar{R}$$

est définie. Vu (2.19), la fonction

(2.26) $m_{R_0} - \frac{1}{\pi}\Psi - \frac{1}{\pi}$ arc tg F est définie sur $V_2\setminus\Sigma''$;

vu la définition de F, où $|M| < L$ d'après l'hypothèse (2.2) du § 1, on a au voisinage des points où $F = 0$:

$$F/f < 0\ ;$$

$F = 0$ équivaut à $f = 0$; donc :

(2.27) arc tg F + arc tg f est définie sur $V_2\setminus\Sigma''$;

or :

$$\text{(2.28)} \qquad \operatorname{arc\,tg} f + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{f} = \text{ const. ;}$$

vu le lemme 2.1 , $\frac{1}{f} = 0$ équivaut à $H_Q = 0$ et, au voisinage des points où $H_Q = 0$:

$$\frac{H_Q}{H_R} f < 0 \ ;$$

donc :

$$\text{(2.29)} \qquad \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{f} + \operatorname{arc\,tg} \frac{H_Q}{H_R} \quad \text{est définie sur} \quad V_2 \setminus \Sigma'' \ ;$$

or, vu l'orientation de Γ , § 1, (2.9) :

$$\text{(2.30)} \qquad \operatorname{arc\,tg} \frac{H_Q}{H_R} + 2\pi \frac{t}{c[L , M]} \quad \text{est définie sur} \quad \Gamma [L , M] \ .$$

Les formules (2.26) ... (2.30) prouvent 3°) pour H et Ω génériques. D'où 3°).

LEMME 2.4. - 1°) Définissons sur V_1 une constante N_o et une fonction r par les relations :

$$\text{(2.31)} \qquad L_1 M - M_1 L = N_o \ ;$$

$$\text{(2.32)} \qquad \Psi + \lambda + M_1 r = \Phi + \mu - L_1 r = 0 \ .$$

Les fonctions (r , s , t) sont des coordonnées de $\tilde{V}_1$.

Une fonction $F : V_1 \to \bar{R}$ est définie par la formule (quand V_1 est générique) :

$$\text{(2.33)} \qquad F (r , s , t) = \frac{N_o^2}{L(L^2-M^2) \ (\rho L_1^2 + 2 \sigma L_1 M_1 + \tau M_1^2)} \ .$$

2°) Si V_1 est générique ($N_o \neq 0 ; H_{L^2} L_1^2 + 2 H_{LM} L_1 M_1 + H_{M^2} M_1^2 \neq 0$ pour $H_Q = 0$), alors

$$\text{(2.34)} \qquad m_{R_o} = [\tfrac{1}{\pi}\Psi + \tfrac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} F (r , s , t)] \quad ([\ldots] : \text{partie entière de...})$$

3°) La fonction (2.20) est définie sur V_1 .

<u>Preuve de</u> 1°). - $(2.11)_2$, où $F = 0$ (Note 2.1) justifie la définition (2.32) de r . Vu (2.2) et (2.10) :

$$\Delta_t (\rho L_1^2 + 2\sigma L_1 M_1 + \tau M_1^2) = 2\pi [L_1^2 N_{L^2} + 2 L_1 M_1 N_{LM} + M_1^2 N_{M^2}] = 2\pi \frac{d^2N}{ds^2} = 0 .$$

Preuve de 2°) . - Le contour apparent de V_1 . - La différentiation de (2.32) donne, vu (2.10) et la définition (2.1) de ρ , σ , τ :

$$d\Psi + (\rho L_1 + \sigma M_1) ds + M_1 dr = d\Phi + (\sigma L_1 + \tau M_1) ds - L_1 dr = 0 \quad \text{mod. } dR ;$$

d'où, vu (2.21), puisque $dR = R H_Q dt$ mod. (dL , dM) , c.à.d. mod. ds :

(2.35) $$\frac{L}{R \sin \Theta} dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = G(s, t, \Psi) \; ds \wedge dr \wedge dt ,$$

où :

$$G(s, t, \Psi) = H_Q [L(\rho L_1^2 + 2\sigma L_1 M_1 + \tau M_1^2) \sin \Psi + \frac{N_o^2}{L^2 - M^2} \cos \Psi] ;$$

vu 1°) et le lemme 2.1 , la fonction $G : V_1 \to \bar{\mathbb{R}}$ est définie et régulière sur V_1 . Vu le lemme 1 du § 1 , le contour apparent $\sum_{R_o}$ de V_1 a donc pour équation :

$$\sum_{R_o} : \quad tg\, \Psi + F(r, s, t) = 0 .$$

Calcul de m_{R_o} . - Le calcul déduisant (2.35) de (2.21) permet de déduire de (2.24) la formule :

$$\frac{L}{R \sin \Theta} dR \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 = G_\Psi (s, t, \Psi) ds \wedge dr \wedge dt .$$

D'où, en appliquant le lemme 1 du § 1 comme le fait le lemme 2.4, l'expression (2.34) de m_{R_o} .

Preuve de 3°). - Supposons V_1 générique . Vu (2.34) :

(2.36) $$m_{R_o} - \frac{1}{\pi} \Psi - \frac{1}{\pi} \text{arc tg } F(r, s, t) \quad \text{est définie sur } V_1 ;$$

vu (2.33), où $|M| < L$ d'après l'hypothèse (2.2) du § 1, et vu le lemme 2.1 , $F = 0$

équivaut à $H_Q = 0$; au voisinage des points de V_1 où $H_Q = 0$:

$$F \frac{H_R}{H_Q} < 0 \;;$$

donc :

(2.37) $$\text{arc tg } F + \text{arc tg } \frac{H_Q}{H_R} \text{ est défini.}$$

Les formules (2.30), (2.36) et (2.37) prouvent que la fonction (2.20) est définie sur V_1 générique, donc sur tout V_1.

LEMME 2.5. - 1°) Pour que V_2 <u>vérifie la condition quantique de Maslov</u>, il faut et suffit que, sur V_2, les fonctions L, M et N soient liées par une relation :

(2.38) $$L_1 \left(L - \frac{\hbar}{2}\right) + M_1 M + N_1 \left(N + \frac{\hbar}{2}\right) = \hbar N_o ,$$

où :

(2.39) $$L_1 , M_1 , N_1 \neq 0, N_o \in \mathbb{Z} , \quad \text{P. G. C. D.} (L_1 , M_1 , N_1) = 1 .$$

2°) Pour que V_1 <u>vérifie la condition quantique de Maslov</u>, il faut et suffit que, sur V_1, les fonctions L, M et N soient liés par les trois relations ;

(2.40) $$(L_1 , M_1 , N_1) \wedge \left(L - \frac{\hbar}{2} , M , N + \frac{\hbar}{2}\right) = \hbar (L_o , M_o , N_o) ,$$

où : $\wedge$ désigne le produit vectoriel dans E^3,

(2.41) $$L_1 , M_1 , N_1 , L_o , M_o , N_o \in \mathbb{Z}, \quad L_1^2 + M_1^2 \neq 0 ,$$
$$\text{P.G.C.D.} (L_1 , M_1 , N_1) = 1 , \; L_o L_1 + M_o M_1 + N_o N_1 = 0 \;;$$

deux seulement des trois relations (2.40) sont donc indépendantes.

<u>Préliminaires à la preuve.</u> - Une variété V vérifie la condition quantique de Maslov (chap. III, § 2, définition 6.2) quand la fonction

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \varphi_R - \frac{1}{4} m_R \quad \text{est définie mod. 1 sur } V.$$

Vu (2.14) et (2.20) , V_1 ou V_2 vérifie donc cette condition quand la fonction

$$(2.42)\qquad \left(\frac{L}{\hbar}+\frac{1}{2}\right)\frac{\Psi}{2\pi}+\frac{M}{\hbar}\frac{\Phi}{2\pi}+\left(\frac{N}{\hbar}+\frac{1}{2}\right)\frac{t}{c[L,M]}$$

est définie mod. 1 sur V_1 ou V_2 .

Preuve de 1°) . - Vu le lemme 2.2 1°) : la fonction (2.42) est définie sur $\tilde{V}_2$; $V_2 = \tilde{V}_2 / \tilde{\mathbf{Z}}_1$; $\tilde{\mathbf{Z}}_1$ a pour générateur :

$$(L_1 , M_1 , N_1)$$

et opère sur $\tilde{V}_2$ suivant (2.8) . La condition quantique de Maslov est donc :

$$\left(\frac{L}{\hbar}+\frac{1}{2}\right) L_1 + MM_1 + \left(\frac{N}{\hbar}+\frac{1}{2}\right) N_1 \in \mathbf{Z} .$$

D'où 1°) .

Preuve de 2°) . - Vu le lemme 2.2 2°): la fonction (2.42) est définie sur $\tilde{V}_1$; $V_1 = \tilde{V}_1 / \tilde{\mathbf{Z}}_2$; $\tilde{\mathbf{Z}}_2$ a pour générateurs :

$$(0 , M_2 N_3 , - M_3 N_2) , (- L_2 N_3 , 0 , L_3 N_2) , (L_2 M_3 , - L_3 M_2 , 0)$$

$L_2 , \dots N_3$ étant définis par (1.12) et (1.13) ; $\tilde{\mathbf{Z}}_2$ opère sur $\tilde{V}_2$ suivant (2.8). La condition quantique de Maslov est donc :

$$\frac{M}{\hbar} M_2 N_3 - \left(\frac{N}{\hbar}+\frac{1}{2}\right) M_3 N_2 \in \mathbf{Z} \; ; \; - \left(\frac{L}{\hbar}+\frac{1}{2}\right) L_2 N_3 + \left(\frac{N}{\hbar}+\frac{1}{2}\right) L_3 N_2 \in \mathbf{Z} \; ;$$

$$\left(\frac{L}{\hbar}+\frac{1}{2}\right) L_2 M_3 - \frac{M}{\hbar} L_3 M_2 \in \mathbf{Z} \; ;$$

vu (1.13) cette condition quantique équivaut à la condition (2.40) - (2.41), complétée par la suivante : L_o, M_o, N_o sont respectivement multiples de L_2 , M_2 , N_2 . Or :

$$L_2 = \text{P.G.C.D.} (M_1, N_1) , \dots ;$$

cette dernière condition résulte donc de (2.41). D'où 2°).

THEOREME 2. - Cherchons une solution U de l'équation lagrangienne

$$a\, U = 0 \mod 1/\nu^2 \quad (a : \text{opérateur associé à } H) ;$$

à amplitude lagrangienne $\geqq 0$, qui soit définie mod. $1/\nu$ sur une variété lagrangienne V compacte, autre que les tores $V[L_o, M_o]$ étudiés par le théorème 1 ; pour que U existe, il est nécessaire que le graphe de la fonction

$$N : (L, M) \mapsto N[L, M] \quad [\text{Cf. Chap. III}, \S 1, (2.9)]$$

contienne un segment rectiligne d'équation plückérienne :

$$(2.40) \qquad (L_1, M_1, N_1) \wedge \left(L - \frac{\not h}{2}, M, N + \frac{\not h}{2}\right) = \not h (L_o, M_o, N_o)$$

telle que :

$$L_1, M_1, N_1, L_o, M_o, N_o \in \mathbb{Z},\; L_1^2 + M_1^2 \neq 0,$$

$$(2.41) \qquad \text{P.G.C.D.}(L_1, M_1, N_1) = 1,\; L_o L_1 + M_o M_1 + N_o N_1 = 0 .$$

COMPLEMENT. - La condition :

$$N_o' \in \mathbb{Z}$$

est nécessaire et suffisante pour qu'existe un tel segment dans un domaine plan, appartenant à ce graphe de N et ayant une équation :

$$(2.43) \qquad L_1' \left(L - \frac{\not h}{2}\right) + M_1' M + N_1' \left(N + \frac{\not h}{2}\right) = \not h N_o'$$

telle que :

$$(2.44) \qquad L_1', M_1', N_1' \in \mathbb{Z},\; \text{P.G.C.D.}(L_1', M_1', N_1') = 1,\; N_o' \in \mathbb{R} .$$

Note 2.3. - Ce complément facilite l'application du théorème (cf. n° 3).

Preuve du théorème. - Vu le chapitre II, § 3, théorème 6, V doit vérifier la condition quantique de Maslov. Puisque V n'est pas l'un des tores $V[L_o, M_o]$, V

doit contenir une variété lagrangienne V_2 ou V_1 vérifiant cette condition quantique ; vu le lemme 2.5 , le graphe de la fonction N contient donc :

soit un segment rectiligne d'équations (2.40) - (2.41) ;

soit un domaine plan d'équation (2.38) - (2.39) et donc un tel segment.

Preuve du complément . - La condition $N'_o \in \mathbf{Z}$ est évidemment suffisante. Prouvons qu'elle est nécessaire ; supposons que, dans l'espace R^3 de coordonnées (L, M, N) le plan d'équation (2.43)-(2.44) contienne une droite d'équations (2.40)-(2.41) cette hypothèse s'exprime par les 4 relations (dont les 2 dernières résultent des précédentes):

$$L_1 L'_1 + M_1 M'_1 + N_1 N'_1 = o ,$$

$$N'_o = \frac{M'_1 N_o - N'_1 M_o}{L_1} = \frac{N'_1 L_o - L'_1 N_o}{M_1} = \frac{L'_1 M_o - M'_1 L_o}{N_1} .$$

Ces relations impliquent $N'_o \in \mathbf{Z}$, puisque P.G.C.D. $(L_1 , M_1 , N_1) = 1$.

3. EXEMPLE : L'OPERATEUR DE SCHRÖDINGER - KLEIN - GORDON .

Nous choisissons pour a l'opérateur associé à l'hamiltonien H , défini au § 1 par (4.6) , où A sera supposé fonction affine de M , B et C constants, $B > 0$.

Ce § 1 a étudié le système :

$$a\, U = a_{L^2 - L_o^2}\, U = a_{M - M_o}\, U = 0 ,$$

et retrouvé les niveaux d'énergie classiques.

En étudiant la seule équation :

$$a\, U = 0 ,$$

nous allons retrouver les mêmes conditions d'existence, donc ces mêmes niveaux d'énergie classiques .

THEOREME 3.1 . - L'équation lagrangienne :

$$a\, U = 0 \bmod. 1/\nu^2 \tag{3.1}$$

possède une solution U à AMPLITUDE LAGRANGIENNE $\geqq 0$, définie mod. $1/\nu$ sur une variété COMPACTE V si et seulement s'il existe un triplet d'entiers (ℓ , m , n)

vérifiant la condition (4.11) du théorème 4.1 du § 1 .

Note 3 . - Sous cette condition ni l'unicité de V, ni l'unicité de U à un facteur constant près (cf. Théor. 1) ne sont assurées.

Preuve . - L'existence d'une telle solution de (3.1), sous cette condition (4.11) du § 1 , est assurée par le théorème 1 et aussi par ce théorème 4.1 du § 1 .

Vu le théorème 1, il ne peut exister de telle solution de (3.1) , définie sur un tore $V[L_o, M_o]$ que sous cette condition .

Vu le théorème 2 et la formule (4.8) du § 1 donnant la valeur de la fonction N :

$$N[L, M] = \frac{B}{\sqrt{A(M)}} - \sqrt{L^2 + C} \,, \tag{3.2}$$

l'existence d'une telle solution sur une variété V autre qu'un tore $V[L_o, M_o]$ exige ceci :

Le graphe de N contient un segment de droite .

Elle exige donc que l'un des trois cas suivant se présente :

Premier cas : $A(M) = A_o$ est indépendant de M ; $C = 0$.

Vu (3.2), le graphe de N est donc le plan d'équation :

$$L + N = \frac{B}{\sqrt{A_o}} \,.$$

Le théorème 2 et son complément exigent l'existence d'un entier n tel que :

$$\frac{B}{\sqrt{A_o}} = \hbar n \,,$$

La condition (4.11) du théorème 4.1 , § 1 est donc vérifiée , puisqu'elle est indépendante de ℓ pour $C = 0$ et de m pour $A(M)$ indépendant de M.

Second cas : $C = 0$; A dépend de M .

Vu (3.2) , le graphe de N contient les seules droites d'équation :

$$M = M_o \,, \; N + L = \frac{B}{\sqrt{A_o}} \,, \quad \text{où } M_o = \text{const.} \,, \; A_o = A(M_o) \;;$$

leurs équations plückériennes sont donc :

$$(1, 0, -1) \wedge (L - \frac{\hbar}{2}, M, N + \frac{\hbar}{2}) = (M_o, - \frac{B}{\sqrt{A_o}}, M_o) .$$

Le théorème 2 exige l'existence d'entiers m et n tels que :

$$M_o = \hbar m , \quad \frac{B}{\sqrt{A_o}} = \hbar n ;$$

$n > |m|$ car $N > 0$ et $L > |M|$ par hypothèse : cf. (1.2) au § 1. La condition (4.11) du § 1 est donc vérifiée.

Troisième cas : $A = A_o$ est indépendant de M ; $C \neq 0$.

Vu (3.2), le graphe de N contient les seules droites d'équation :

$$L = L_o , \quad N = \frac{B}{\sqrt{A_o}} - \sqrt{L_o^2 + C} \quad \text{où } L_o \text{ est une constante, } L_o^2 + C > 0$$

leurs équations plückériennes sont :

$$(0, 1, 0) \wedge (L - \frac{\hbar}{2}, M, N + \frac{\hbar}{2}) = (\frac{B}{\sqrt{A_o}} - \sqrt{L_o^2 + C} + \frac{\hbar}{2}, 0, \frac{\hbar}{2} - L_o) .$$

Le théorème 2 exige l'existence d'entiers ℓ, n tels que :

$$\frac{B}{\sqrt{A_o}} + L_o - \sqrt{L_o^2 + C} = \hbar n , \quad L_o = \hbar (\ell + \tfrac{1}{2}) ;$$

$$0 \leq \ell \text{ car } 0 < L_o ; \quad \ell < n \text{ car } N > 0 \text{ par hypothèse ,}$$

La condition (4.11) du § 1 est donc vérifiée.

THEOREME 3.2. - Choisissons pour a l'opérateur de Klein - Gordon (4.22) du § 1; supposons le champ magnétique $\mathcal{H} \neq 0$. Alors les tores $T(\ell, m, n)$, définis par (4.12) § 1, sont les seules variétés compactes sur lesquelles existe une solution lagrangienne, U, à amplitude lagrangienne $\geqq 0$, de l'équation :

$$a\, U = 0 \quad \text{mod. } 1/\nu^2 .$$

Preuve. - La preuve du théorème 3.1 prouve que la condition nécessaire qu'énonce le théorème 2 ne peut pas être satisfaite quand a est l'opérateur de Klein - Gordon ($C \neq 0$) où A dépend de M ($\mathcal{H} \neq 0$).

CONCLUSION . - <u>Nous ne poursuivons pas</u> cette étude malaisée de l'équation $a\, U = 0 \mod. 1/\nu^2$; en particulier nous n'explicitons pas les variétés lagrangiennes, autres que les tores $T(\ell, m, n)$, sur lesquelles existent des solutions de l'équation de Schrödinger ou des solutions, quand $\mathcal{H} = 0$, de l'équation de Klein - Gordon.

§ 3 . Le système lagrangien : $a\,U = (a_M - \text{const.})\,U = (a_{L^2} - \text{const.})\,U = 0$, quand a est l'opérateur de Schrödinger - Klein - Gordon .

0. INTRODUCTION . -

Ce § 3 étudie le système lagrangien que le § 1 a résolu mod. $1/\nu^2$.

Le n° 1 cherche sous quelle condition s'applique le théorème 7.2 du chap. II , § 3

Les n° 2,3 et 4 explicitent l'application de ce théorème sous des hypothèses appropriées, de plus en plus strictes, qui constituent finalement la suivante : a est l'opérateur de Schrödinger - Klein - Gordon ; le théorème d'existence 4.1 est finalement obtenu.

Note 0 . - A. Voros (cf. [23] - [24] me fait observer que ces propriétés des équations de Schrödinger et de Klein - Gordon s'étendent au cas d'un potentiel électrique, fonction à valeurs > 0 de la seule variable R , si le niveau d'énergie E n'est plus astreint à être un nombre réel et s'il lui est permis d'être un nombre formel quelconque, de phase nulle .

1. COMMUTATIVITE DES OPERATEURS a , a_{L^2} ET a_M ASSOCIES AUX HAMILTONIENS H (§ 1, n° 2) , L^2 ET M (§ 1 , n° 1) . -

Cherchons quand le théorème 7.2 du chap. II , § 3 s'applique à ces opérateurs, c'est-à-dire quand ils commutent.

LEMME 1. - 1°) a_M et a (donc, en particulier, a_M et a_{L^2}) commutent.

2°) La condition que a_{L^2} et a commutent s'énonce :

(1.1) $$(\forall L, M, Q, R) \quad H_{M^2 Q} = H_{M^2 R} = 0 \ .$$

Preuve .- Soient a et a' les opérateurs lagrangiens associés à deux hamiltoniens H et H' ; vu la formule (1.1) du chap. II, § 2, leur commutateur

$$a \circ a' - a' \circ a$$

est associé à la fonction formelle valant :

$$(1.2)\quad -2 \sum_{r \in N} \frac{1}{(2r+1)!} \frac{1}{(2\nu)^{2r+1}} \left[<\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p'}> - <\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial p}>\right]^{2r+1} H(x,p)\, H'(x',p')\Big|_{\substack{x'=x\\ p'=p}}$$

Supposons H et H' en involution, ce qui est le cas de H (§ 1, n° 2), L^2 et M (§ 1, n° 1), vu au § 1 (1.3) : le premier terme de (1.2) est nul. Si H' est linéaire en (x', p'), tous les autres termes sont évidemment nuls : a et a' commutent; d'où le 1°) du lemme. Supposons que H' est un polynome homogène de degré 4 en (x', p') ; alors, vu (1.2), $a \circ a' - a' \circ a$ est associé à $\frac{1}{\nu^3} H''$, H'' étant l'hamiltonien valant :

$$H''(x,p) = -\frac{1}{24}\left[<\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p'}> - <\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial p}>\right]^3 H(x,p)\, H'(x',p')\Big|_{\substack{x'=x\\ p'=p}}$$

Une double application de la formule de Taylor montre que le terme de $H'(x'+y, p'+q)$ homogène de degré 1 en (x', p) et 3 en (y, q) est :

$$\frac{1}{6}\left[<q, \frac{\partial}{\partial p'}> + <y, \frac{\partial}{\partial x'}>\right]^3 H'(x',p') = \left[<p', \frac{\partial}{\partial q}> + <x', \frac{\partial}{\partial y}>\right] H'(y,q) \;;$$

donc, si H' est homogène de degré 2 en chacune de ses deux variables :

$$H''(x,p) = -\frac{1}{4}\left[<p, H'_{p'}\left(\frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial x}\right)> - <x, H'_{x'}\left(\frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial x}\right)>\right] H(x,p) \,.$$

En particulier, pour $H' = L^2$, c'est-à-dire : $H'(x',p') = |x' \wedge p'|^2$:

$$(1.3)\quad H''(x,p) = \frac{1}{2} < p \wedge \frac{\partial}{\partial p} + x \wedge \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial x} > H(x,p) \;;$$

dans cette formule, les couples d'opérateurs

$$\left(p \wedge \frac{\partial}{\partial p} + x \wedge \frac{\partial}{\partial x}\right)_j \quad , \quad \left(\frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial x}\right)_j \qquad \text{commutent .}$$

L'opérateur $\left(p \wedge \frac{\partial}{\partial p} + x \wedge \frac{\partial}{\partial x}\right)_j$ est une rotation infinitésimale agissant sur x et p ; elle annule donc L, Q, R ; un calcul aisé donne :

$$\left(p \wedge \frac{\partial}{\partial p} + x \wedge \frac{\partial}{\partial x}\right) M(x, p) = x_3\, p - p_3\, x ;$$

supposons H fonction composée de L, M, Q, R [§ 1, (2.1)] ;

(1.3) devient donc :

$$H''(x, p) = \tfrac{1}{2} < \frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial x} , H_M\, x_3\, p - H_M\, p_3\, x > ;$$

notons pour toute fonction F de (x, p) :

$$\mathcal{X}\, F = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ F_{x_1} & F_{x_2} & F_{x_3} \end{vmatrix} \quad , \quad \mathcal{P}\, F = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ F_{p_1} & F_{p_2} & F_{p_3} \end{vmatrix} ;$$

l'expression précédente de H'' s'écrit :

$$H''(x, p) = \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} \mathcal{P}\, H_M - \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_3} \mathcal{X}\, H_M .$$

Or les opérateurs différentiels linéaires $\mathcal{X}$ et $\mathcal{P}$ annulent évidemment P^2, Q, R^2, donc L^2 vu (1.2) § 1 ;

$$\mathcal{X}\, M = -\tfrac{1}{2} \frac{\partial L^2}{\partial x_3} \quad , \quad \mathcal{P}\, M = -\tfrac{1}{2} \frac{\partial L^2}{\partial p_3} ;$$

en notant $\mathcal{D}\, F$ le déterminant fonctionnel

$$\mathcal{D} F = \frac{\partial L^2}{\partial x_3} \frac{\partial F}{\partial p_3} - \frac{\partial L^2}{\partial p_3} \frac{\partial F}{\partial x_3} ,$$

l'expression de H" devient donc :

$$H''(x, p) = \frac{1}{4} \mathcal{D} H_{M^2} .$$

Or l'opérateur differentiel linéaire $\mathcal{D}$ annule évidemment L et M ;

$$\frac{1}{2} \mathcal{D} Q = P^2 x_3^2 - R^2 p_3^2 \quad ; \quad \frac{R}{2} \mathcal{D} R = Q\, x_3^2 - R^2 p_3 x_3 .$$

l'expression précédente de H" devient donc :

$$(1.4) \qquad H''(x, p) = \tfrac{1}{2} (P^2 H_{M^2 Q} + \frac{Q}{R} H_{M^2 R}) x_3^2 - \frac{R}{2} H_{M^2 R}\, p_3 x_3 - \tfrac{1}{2} R^2 H_{M^2 Q}\, p_3^2$$

Vu le n°1 du § 1, p_3/x_3 est indépendant de (L, M, Q, R) : la condition :

$$(\forall\, x, p)\ H''(x, p) = 0$$

équivaut donc à (1.1), ce qui prouve le 2°) du lemme.

2. CAS D'UN OPERATEUR a COMMUTANT À a_{L^2} ET a_M. - Supposons (1.1) vérifié : le lemme 1 prouve que le théorème 7.2 du chap. II, § 3 s'applique au système lagrangien :

$$(2.1)_r \qquad a\, U = (a_{L^2} - c_L)\, U = (a_M - c_M)\, U = 0 \quad \text{mod. } 1/\nu^{r+2} \quad (r \geq 1) ,$$

où c_L et c_M sont deux nombres formels de phase nulle, tels que :

$$(2.2) \qquad c_L - L_o^2 = c_M - M_o = 0 \quad \text{mod. } 1/\nu^2 .$$

Les expressions $a^+_{L^2}$ et a^+_M de a_{L^2} et a_M dans R_o sont les suivantes, vu le chap. I, § 1, n° 3 et la formule

$$e^{\frac{1}{2\nu} \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \rangle} L^2(x, p) = [1 + \frac{1}{2\nu} \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \rangle + \frac{1}{8\nu^2} \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \rangle^2] (P^2 R^2 - Q^2)$$

$$= P^2 R^2 - Q^2 - \frac{2}{\nu} Q - \frac{3}{2\nu^2} \ :$$

(2.3) $$a^+_{L^2} \left(\nu , x , \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{1}{\nu^2} \left(\Delta_o - \frac{3}{2} \right) ,$$

où

(2.4) $$\Delta_o = R^2 \Delta - \sum_{j,k} x_j x_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} - 2\sum_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \left[\Delta = \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 \right]$$

est le laplacien sphérique, vu son expression (2.24) : il opère sur les restrictions des fonctions aux sphères : R = const. ;

$$a^+_M \left(\nu , x , \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{1}{\nu} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) ,$$

qui est une rotation infinitésimale.

Imposons à l'inconnue U d'être définie mod. $1/\nu^{r+1}$ sur une variété lagrangienne <u>compacte</u> V ; vu le théorème 3 du § 1

i) V est nécessairement l'un des tores

$$V = V [L_o , M_o] = T (\ell , m , n) \quad : \quad H = L^2 - L_o^2 = M - M_o = 0$$

que définit le 1°) de ce théorème

ii) l'amplitude lagrangienne β_o de U est nécessairement constante .

Si $\beta_o = 0$, $(2.1)_r$ se réduit à $(2.1)_{r-1}$; imposons donc la condition :

(2.5) $$\beta_o = \text{const.} \neq 0 .$$

Nommons <u>problème</u> $(2.1)_r$ le problème défini par le système $(2.1)_r$, la condition (2.5) et la condition que V <u>est compacte</u>.

<u>Notations</u> . - La formule (3.16) de ce même théorème 3 du § 1 explicite la mesure invariante η : les formules (1.16) et (3.6) du § 1 explicitent $d^3 x$; la formule (3.4) du chap. I , § 3 définit arg. $d^3 x = \pi m_{R_o}$; m_{R_o} est donné par (3.5) § 1 ; arg. $\eta = 0$ par définition ; d'où la valeur de la fonction χ ,

que définit et emploie le § 3 du chap. III, et de son argument :

$$\chi = \frac{\eta}{d^3 x} = [R^3 H_Q [L_o, M_o, Q, R] \sin \Psi \sin \Theta]^{-1}, \quad \text{où} \quad \Theta = \text{const.} ;$$

(2.6)

$$\arg. \chi = -\arg. H_Q - \arg. \sin \Psi, \quad \text{où} : \arg. H_Q = -\pi [\frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{H_Q}{H_R}], \ \arg. \sin \Psi = \pi [\frac{\Psi}{\pi}] ;$$

rappelons que [...] est la partie entière de .... .

Le contour apparent de V est

(2.7)
$$\Sigma_{R_o} : H_Q \sin \Psi = 0 \quad ; \quad \chi : V \setminus \Sigma_{R_o} \to R .$$

Soit U une fonction lagrangienne sur V, à amplitude lagrangienne

$$\beta_o = \text{const.} \neq 0 ;$$

son expression dans R_o sera notée :

(2.8)
$$U_{R_o}(\nu) = \sqrt{\chi}\, \beta(\nu)\, e^{\nu \varphi_{R_o}}, \quad \text{où} \quad \beta(\nu) = \sum_{s \in N} \frac{\beta_s}{\nu^s} ;$$

vu, au chap. II, § 2, le théorème de structure 2.2 et la définition 3.2 des fonctions lagrangiennes, la fonction

$$\chi^{-3s} \beta_s : V \to C$$

est régulière même sur Σ_{R_o} .

Soient D_H, D_L, D_M les opérateurs tels que :

$$[a U]_{R_o} = \frac{\sqrt{\chi}}{\nu} e^{\nu \varphi_{R_o}} D_H \beta ;$$

(2.9)
$$[(a_{L^2} - L_o^2) U]_{R_o} = \frac{\sqrt{\chi}}{\nu} e^{\nu \varphi_{R_o}} D_L \beta ;$$

$$[(a_M - M_o) U]_{R_o} = \frac{\sqrt{\chi}}{\nu} e^{\nu \varphi_{R_o}} D_M \beta .$$

D_H, D_{L^2} et D_M <u>commutent</u>, puisque a, a_{L^2} et a_M commutent.

Employons sur $V \setminus \sum_{R_o}$ les coordonnées locales (R, Ψ, Φ).

LEMME 2.1. - 1°) Avec ce choix de coordonnées :

$$D_M = \frac{\partial}{\partial \Phi} . \tag{2.10}$$

2°) Si U est solution de l'équation

$$(a_M - c_M)\; U = 0 \quad \text{mod } 1/\nu^{r+2}, \tag{2.11}$$

où C_M est un nombre formel, de phase nulle, tel que

$$c_M = M_o \quad \text{mod. } 1/\nu^2 ,$$

alors :

$$c_M = M_o \quad \text{mod. } 1/\nu^{r+2} ;$$

f est, mod. $1/\nu^{r+1}$, fonction des seules coordonnées (R, Ψ).

<u>Preuve de 1°)</u>. - Calculons D_M au moyen du théorème 4 du chap. II, § 3 : on substitue à H dans ce théorème l'hamiltonien $M - M_o$; vu (3.18), § 1, les caractéristiques de cet hamiltonien ont pour équations

$$dt = d\Psi = 0 , \quad \text{c'est-à-dire : } dR = d\Psi = 0 ;$$

le paramètre de ces caractéristiques est Φ, qu'on substitue à t dans ce théorème. On obtient (2.10).

<u>Preuve de 2°)</u>. - Pour $r = 0$, 2°) est évident. Une récurrence sur r permet de supposer 2°) vrai quand on y remplace r par $r - 1$; alors

$$c_M = M_o + \frac{M_{r+1}}{\nu^{r+1}} \qquad (M_{r+1} \in C) ;$$

(2.11), vu (2.9) et (2.10), équivaut à :

$$\frac{\partial \beta_r}{\partial \Phi} = M_{r+1}\, \beta_o , \quad \text{où } \beta_o = \text{const.} \neq 0 ;$$

or β_r est une fonction de Φ ayant la période 2π ; donc :

$$M_{r+1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \beta_r}{\partial \Phi} = 0 \; ;$$

d'où 2°)

Notations. - Nous supposerons désormais β fonction des seules variables (R, Ψ) ; vu (2.10), D_H et D_L commutent à $\frac{\partial}{\partial \Phi}$ et opèrent donc sur les fonctions de (R, Ψ).

LEMME 2.2. - 1°) En coordonnées locales (R, Ψ, Φ) :

$$D_L \; \beta = 2 \, L_o \frac{d\tau}{d\Psi} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\nu} \, F \right] \beta - \frac{5}{4\nu} \, \beta \, , \tag{2.12}$$

où : τ est la variable

$$\tau = \cotg \Psi \; ;$$

F est l'opérateur à coefficients polynomiaux valant :

$$F \beta = F_1 \, \beta + \frac{\partial}{\partial \tau} \left[F_2 \, \frac{\partial \beta}{\partial \tau} \right] ,$$

F_1 et F_2 étant les polynomes de τ valant :

$$F_1(\tau) = \frac{5 \, M_o^2 \, \tau^2 + L_o^2 + M_o^2}{8 \, L_o \, (L_o^2 - M_o^2)} \, , \quad F_2(\tau) = \frac{(M_o^2 \, \tau^2 + L_o^2)(\tau^2 + 1)}{2 \, L_o \, (L_o^2 - M_o^2)} \, .$$

2°) Soit U une fonction lagrangienne, définie sur le tore : $V[L_o, M_o]$, d'amplitude lagrangienne $\beta_o \neq 0$ et solution du système :

$$(a_{L^2} - c_L) \, U = (a_M - M_o) \, U = 0 \quad \text{mod. } 1/\nu^{r+2} \, , \tag{2.13}$$

où c_L est un nombre formel, de phase nulle, tel que :

$$c_L = L_o^2 \quad \text{mod. } 1/\nu^2 \, .$$

Notons Σ l'ensemble des points de la courbe $\Gamma[L_o, M_o]$ [§1, (2.5)] où:

$$\Sigma : H_Q = 0 .$$

Alors :

(2.14) $$c_L = L_o^2 - \frac{5}{4\nu^2} \quad \text{mod. } 1/\nu^{r+2} ;$$

(2.15) $$\beta(\nu, R, \Psi) = g(\nu, R)\, f(\nu, \tau) \quad \text{mod. } \quad 1/\nu^{r+1},$$

g étant une fonction formelle, arbitraire, de phase nulle, définie sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma$, f étant définie comme suit.

3°) Il existe une unique fonction formelle, définie sur $\mathbb{R}$, f, valant :

(2.16) $$f(\nu, \tau) = \sum_{s \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^s} f_s(\tau) \qquad (\tau \in \mathbb{R})$$

telle que :

(2.17) $$\frac{df}{d\tau} = \frac{1}{\nu} F f ;$$

(2.18) $f_o = 1$; f_s est un polynome réel de τ, de degré $3s$, ayant la parité de s ;

(2.19) $$f\bar{f} = 1 + \frac{1}{\nu} F_2 \left(\bar{f} \frac{df}{d\tau} - f \frac{d\bar{f}}{d\tau}\right) \quad [\bar{f} : \text{imaginaire conjugué de } f] ;$$

[(2.19) exprime f_{2s} au moyen de $f_1, \dots, f_{2s-1}$.]

Toute solution de (2.17) mod. $1/\nu^r$ est, mod. $1/\nu^r$, le produit de f par un nombre formel de phase nulle.

<u>Note 2</u>. - La fonction formelle U' de x, homogène de degré 0, définie pour

$$M_o R < L_o \sqrt{x_1^2 + x_2^2} ,$$

valant :

(2.20) $$U'(\nu, x) = \frac{f(\nu, \Psi)}{\sqrt{\sin \Psi}} e^{\nu(L_o \Psi + M_o \Phi)} ,$$

vérifie :

$$(2.21) \qquad \frac{1}{\nu}\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) U' = M_o\, U' \; ; \; \frac{1}{\nu^2}\; \Delta\, U' = \frac{1}{R^2}\left(L_o^2 + \frac{1}{4\nu^2}\right) U' .$$

<u>Preuve de 1°)</u> . - Calculons D_L au moyen du théorème 4 du chap. II , § 3 : on y substitue à H l'hamiltonien $L^2 - L_o^2$; vu (3.17) , § 1 , les caractéristiques de cet hamiltonien ont pour équations

$$d\,t = d\,\Phi = o\, , \text{ c'est-à-dire : } d\,R = d\,\Phi = 0 \;;$$

le paramètre de ces caractéristiques est $\Psi / 2\,L_o$, qu'on substitue à t dans ce théorème ; au second membre de la formule (4.5) de ce théorème doit être substitué :

$$e^{\frac{1}{2}<\frac{\partial}{\partial x},\,\frac{\partial}{\partial p}>}\, L^2\,(x\,,\,p) = [1 + \tfrac{1}{2} < \frac{\partial}{\partial x}\,,\,\frac{\partial}{\partial p} > + \frac{1}{8} < \frac{\partial}{\partial x}\,,\,\frac{\partial}{\partial p} >^2]\,(P^2\,R^2 - Q^2)$$

$$= P^2\,R^2 - Q^2 - 2\,Q - \frac{3}{2} \;;$$

ce théorème donne :

$$(2.22) \qquad D_L\,\beta = 2\,L_o\,\frac{\partial\beta}{\partial\Psi} + \frac{1}{\nu}\;[\chi^{-1/2}\;\Delta_o\,(\beta\,\chi^{1/2}) - \frac{3}{2}\,\beta\,] ,$$

où Δ_o est défini par (2.4) en coordonnées $(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3)$.

Vu le § 1, (1.5) et (1.12) , nous avons, en employant aux premiers membres les coordonnées $(R\,,\,\Psi\,,\,\Phi)$ et aux seconds membres les coordonnées $(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3)$;

$$(2.23) \qquad R\,\frac{\partial}{\partial R} = \sum_{j=1}^{3} x_j\,\frac{\partial}{\partial x_j} \;;\; \text{donc : } R^2\,\frac{\partial^2}{\partial R^2} = \sum_{j,\,k} x_j\, x_k\, \frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k} .$$

La définition (2.4) de Δ_o s'énonce donc :

$$(2.24) \qquad \Delta_o = R^2\,\Delta - R^2\,\frac{\partial^2}{\partial R^2} - 2\,R\,\frac{\partial}{\partial R} .$$

Or les formules (1.5) et (1.12) du § 1 donnent :

$$\frac{x_3}{R} = -\sin\,\Theta\;\cos\Psi\; , \text{ où } \cos\Theta = \frac{M_o}{L_o}\; , \text{ vu § 1 , (1.11) } \;;$$

d'où, sur V :

$$< R_x , \Psi_x > = 0 \; ; \; R^2 < \Psi_x , \Psi_x > = 1 + \frac{\cot g^2 \Theta}{\sin^2 \Psi} \; , \; R^2 \Delta \Psi = \cot g \, \Psi \, (1 - \frac{\cot g^2 \Theta}{\sin^2 \Psi}) \; ;$$

d'où l'expression de $R^2 \Delta$ sur les fonctions de (R , Ψ) ; portée dans (2.24), elle donne sur ces fonctions :

$$(2.25) \qquad \Delta_o = (1 + \frac{\cot g^2 \Theta}{\sin^2 \Psi}) \frac{\partial^2}{\partial \Psi^2} + \cot g \, \Psi \, (1 - \frac{\cot g^2 \Theta}{\sin^2 \Psi}) \frac{\partial}{\partial \Psi} \; ;$$

d'où, vu (2.6), par un calcul banal :

$$(2.26) \qquad \begin{aligned} \chi^{-\frac{1}{2}} \Delta_o (\beta \chi^{1/2}) &= \sqrt{\sin \Psi} \; \Delta_o \left(\frac{\beta}{\sqrt{\sin \Psi}} \right) \\ &= - 2 L_o \frac{d\tau}{d \Psi} F \beta + \tfrac{1}{4} \beta \; ; \end{aligned}$$

de (2.22) résulte donc (2.12) .

<u>Preuve de 2°)</u> . - Vu le lemme 2.1, β est localement fonction des seules variables (R , Ψ) . Vu ce lemme et (2.12) , β_o est une fonction, non identiquement nulle, de la seule variable R.

Pour $r = o$, 2°) est évident. Une récurrence sur r permet de supposer que $\beta_o , \ldots , \beta_{r-1}$ sont des polynomes en τ, à coefficients fonctions de R et que 2°) est vrai, quand on y remplace r par $r-1$. Alors :

$$c_L = L_o^2 - \frac{5}{4 \nu^2} + \frac{2 L_o L_{r+1}}{\nu^{r+1}} \quad \text{mod. } 1 / \nu^{r+2} \; (L_{r+1} \in C) \; ;$$

l'équation $(2.13)_1$ s'écrit donc :

$$(2.27) \qquad \frac{1}{\nu} D_L \beta + (\frac{5}{4 \nu^2} - \frac{2 L_o L_{r+1}}{\nu^{r+1}}) \beta = 0 \quad \text{mod. } 1 / \nu^{r+2} \; ;$$

vu l'hypothèse de récurrence, cette équation vaut mod. $1 / \nu^{r+1}$; vu (2.12), elle s'écrit donc :

$$d\beta_r = (F\beta_{r-1})\,d\tau + L_{r+1}\,\beta_o\,d\Psi, \quad \text{pour} \quad R = \text{const.}\ ;$$

donc. puisque F est un opérateur à coefficients polynomiaux, β_r est la somme d'un polynome en $\tau = \text{cotg}\,\Psi$ et de la fonction $L_{r+1}\,\beta_o\,\Psi$; où $\beta_o \neq 0$; or β_r est une fonction de Ψ de période 2π ; donc :

$$L_{r+1} = 0\ ;\ \beta_r \text{ est un polynome en } \tau\ ;$$

(2.27) s'écrit :

$$d\beta = \frac{1}{\nu}(F\beta)\,d\tau \quad \text{mod. } 1/\nu^{r+1} \quad \text{pour} \quad R = \text{const.}\ ;$$

d'où (2.15), si 3°) est vrai.

<u>Preuve de</u> 3°). - La condition que (2.16) vérifie (2.17) mod $1/\nu^r$ s'écrit :

$$f_o = \text{const.}, \quad \frac{df_s}{d\tau} = F\,f_{s-1} \quad \text{pour} \quad s = 1, \dots, r-1\ ;$$

f_s est donc un polynome en τ, de degré $3s$, contenant une constante d'intégration arbitraire ; f est donc bien défini, au produit près par un nombre formel, de phase nulle.

Choisissons les constantes d'intégrations réelles : les f_r sont réelles.
Il existe un choix unique des constantes d'intégration des f_{2s-1} tel que les f_r aient la parité de r.

<u>Preuve de</u> (2.19). - Soit $\bar{f}$ l'imaginaire conjuguée de f ; puisque ν est imaginaire pure et F réel, (2.17) implique :

$$\frac{d\bar{f}}{d\tau} = -\frac{1}{\nu}F\bar{f}\ ;\ \frac{d}{d\tau}(f\bar{f}) = \frac{1}{\nu}(\bar{f}\,F\,f - f\,F\,\bar{f}),$$

c'est-à-dire, vu la définition de F :

$$\frac{d}{d\tau}(f\bar{f}) = \frac{1}{\nu}\left[\bar{f}\,\frac{d}{d\tau}\left(F_2\,\frac{df}{d\tau}\right) - f\,\frac{d}{d\tau}\left(F_2\,\frac{d\bar{f}}{d\tau}\right)\right] = \frac{1}{\nu}\frac{d}{d\tau}\left[F_2\left(\bar{f}\frac{df}{d\tau} - f\frac{d\bar{f}}{d\tau}\right)\right];$$

donc :

$$f\bar{f} - \frac{1}{\nu}F_2\left(\bar{f}\frac{df}{d\tau} - f\frac{d\bar{f}}{d\tau}\right) = \sum_{s\in N}\frac{c_s}{\nu^{2s}} \quad (c_o = 1,\ c_s \in R).$$

c'est-à-dire, puisque les f_r sont réelles :

$$(\forall s \in \mathbb{N}) \sum_{s'=o}^{2s} (-1)^{s'} f_{2s-s'} f_{s'} = 2F_2 \sum_{s'=o}^{2s-1} (-1)^{s'} f_{s'} \frac{d}{d\tau} f_{2s-1-s'} + c_s ;$$

si $s > 0$, cette formule exprime f_{2s} au moyen de $f_1, \dots, f_{2s-1}$ et de $c_s \in \mathbb{R}$, qu'annule un choix approprié de la constante d'intégration de f_{2s} .

<u>Preuve de</u> $(2.21)_2$. - Vu (2.12) et (2.17) :

$$D_L f = -\frac{5}{4\nu} f ;$$

c'est-à-dire, vu la définition (2.9) de D_L :

$$\left[a^+_{L^2} (\nu, x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}) - L_o^2 + \frac{5}{4\nu^2} \right] (\sqrt{\chi} f e^{\nu \varphi_{R_o}}) = 0 ;$$

c'est-à-dire, vu l'expression (2.3) de $a^+_{L^2}$ et l'expression (2.6) de χ, puisque Δ_o opère sur les restrictions des fonctions aux sphères $R = cte$ et puisque φ_R a l'expression (3.4) du § 1, où Ω ne dépend que de R :

$$(\frac{1}{\nu^2} \Delta_o - L_o^2 - \frac{1}{4\nu^2}) \quad U'(\nu, x) = 0 ,$$

U' étant défini par (2.20) ; U' est homogène de degré 0 en x ; d'où $(2.21)_2$, vu la définition (2.24) de Δ_o .

<u>Preuve de</u> $(2.21)_1$. - De la définition (2.16) de f et de l'expression (2.10) de D_M résulte :

$$D_M f = 0 ;$$

c'est-à-dire, vu la définition (2.8) - (2.9) de D_M :

$$(a^+_M - M_o) (\sqrt{\chi} f e^{\nu \varphi_{R_o}}) = 0 ;$$

le début du n° 2 a calculé :

$$a^+_M = \frac{1}{\nu} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) ;$$

$\overset{+}{M}$ annule donc les fonctions de la seule variable R ; vu l'expression (2.6) de ν et l'expression (3.4) § 1 de φ_{R_o}, la relation précédente équivaut donc à $(2.21)_1$.

LEMME 2.3 . - Il existe un opérateur D , opérant sur les fonctions formelles g définies sur $\Gamma [L_o , M_o] \setminus \Sigma$, tel que :

$$(2.28) \qquad D_H [f (\nu , \Psi) g (\nu , R)] = f (\nu , \Psi) Dg(\nu , R).$$

On a localement :

$$(2.29) \qquad D = \sum_{s \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^s} D_s (R , \frac{d}{dR})$$

$D_s (R , \frac{d}{dR})$ étant un opérateur différentiel défini sur $\Gamma [L_o , M_o] \setminus \Sigma$;

$$(2.30) \qquad D_o = R H_Q \frac{d}{dR} .$$

Preuve . - Puisque D_H commute à D_L , qui a l'expression (2.12) ,

$$\frac{d \tau}{d \Psi} (\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\nu} F) D_H [f (\nu , \Psi) g (\nu , R)] =$$

$$D_H [\frac{d \tau}{d \Psi}(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\nu} F) f (\nu , \Psi) g (\nu , R)] = 0 ;$$

vu le lemme 2.2 3°), $D_H [f g]$ est donc le produit de f par une fonction formelle, qui est définie sur $\Gamma [L_o , M_o] \setminus \Sigma$ et qui est notée $D g$.

Le théorème 4 du chap. II , § 3 prouve que D_H est du type :

$$D_H = \sum_{s \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^s} D_{H , s} (R , \Psi , \frac{\partial}{\partial R} , \frac{\partial}{\partial \Psi}) ,$$

$D_{H , s}$ étant un opérateur différentiel ; il en résulte que D est du type (2.29) . Puisque les caractéristiques de H vérifient (2.14), § 1 , ce même théorème prouve que :

$$D_H (f g) \ dt = d (f g) \ \mathrm{mod.}\ 1/\nu , \text{ pour } dR = R H_Q \ dt , \ d \Psi = H_L \ dt ;$$

or :

$$f = 1 \mod. 1/\nu ;$$

donc :

$$D_H(fg) = RH_Q \frac{dg}{dR} \mod. 1/\nu ;$$

cette relation équivaut à (2.30) .

THÉORÈME 2 . - 1°) Le problème $(2.1)_r$, défini au début de ce n°2 , n'est possible que si :

$$c_L = L_o^2 - \frac{5}{4\nu^2} \quad , c_M = M_o .$$

2°) CE PROBLEME $(2.1)_r$ EQUIVAUT AU PROBLEME $(2.31)_r$ dont voici l'énoncé : définir sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma$, mod. $1/\nu^{r+1}$, une fonction formelle

$$g(\nu) = \sum_{s \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^s} g_s \quad (g_o = 1, g_s : \Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma \to \mathbb{C})$$

satisfaisant aux conditions :

$$(2.31)_r \quad \begin{cases} Dg = 0 \mod. 1/\nu^{r+1} ; \\ (H_Q)^{3r} g \text{ est régulière, mod. } 1/\nu^{r+1}, \text{ sur } \Gamma[L_o, M_o] . \end{cases}$$

Toute fonction formelle satisfaisant aux conditions $(2.31)_r$ est, mod. $1/\nu^{r+1}$, le produit de g par un nombre formel de phase nulle.

La condition que g est solution du problème $(2.31)_r$ équivaut évidemment à la suivante :

g est solution du problème $(2.31)_{r-1}$;

$$(2.32)_r \quad \begin{cases} RH_Q \dfrac{dg_r}{dR} + \sum\limits_{s=1}^{r} D_s g_{r-s} = 0 \text{ sur } \Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma ; \\ (H_Q)^{3r} g_r \text{ est régulière sur } \Gamma[L_o, M_o] . \end{cases}$$

Ω étant défini par (2.8) , § 1 , définissons sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma$ la fonction formelle

$$U''(\nu) = \frac{g e^{\nu\Omega}}{\sqrt{R^3 H_Q}} ;$$

alors $U'(\nu)\, U''(\nu)$ est l'expression U_{R_o} d'une solution U du problème $(2.1)_r$. Toute solution du sytème $(2.1)_r$, définie sur $V[L_o, M_o]$, est, mod. $1/\nu^{r+1}$, le produit de cette solution par un nombre formel.

3°) Supposons g solution du problème $(2.31)_{r-1}$; il existe alors une fonction $g_r : \check{\Gamma}[L_o, M_o] \setminus \check{\Sigma} \to C$ vérifiant $(2.32)_r$, quand on y remplace Γ par son revêtement universel $\check{\Gamma}$; g_r est définie à une constante additive près. La condition que g_r est définie sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma$ équivaut à la possibilité de résoudre les problèmes équivalents $(2.1)_r$ et $(2.31)_r$.

Preuve de 1°). - Les lemmes 2.1 2°) et 2.2 2°).
Preuve de 2°). - (2.6), (2.8), les lemmes 2.1 2°), 2.2 2°) et 2.3, les théorèmes 5 et 7.2 du chap. II, § 3.

Preuve de 3°). - Ces théorèmes.

3. UN CAS PLUS SPECIAL. - Pour préciser ce théorème 2, choisissons, comme au § 1, n° 4 :

$$(3.1) \qquad H[L, M, Q, R] = \tfrac{1}{2}\{P^2 - \frac{1}{R^2} K[R, M]\} = \frac{1}{2R^2}\{L^2 + Q^2 - K[R, M]\} ;$$

choisissons K fonction affine de M : la condition (1.1) est vérifiée ; vu au § 1, (4.5), l'opérateur associé à H a pour expression dans R_o :

$$(3.2) \qquad a = \frac{1}{2\nu^2} \Delta - \frac{1}{2R^2} K[R, \frac{1}{\nu}(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1})].$$

$$(3.3) \qquad L_o^2 + Q^2 - K[R, M_o] = 0 \quad \text{sur la courbe } \Gamma[L_o, M_o] ;$$

Σ est l'ensemble des points de cette courbe où $Q = 0$.

LEMME 3. - On a :

$$(3.4) \qquad D = \frac{Q}{R}\left[\frac{d}{dR} - \frac{1}{\nu} G\right],$$

où G opère sur les fonctions

$$g : \Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma \to C$$

et vaut :

$$(3.5) \qquad Gg = G_1 g + \frac{d}{dR}\left[G_2 \frac{dg}{dR}\right],$$

G_1 et G_2 étant les fonctions, définies sur $\Gamma[L_o, M_o]\setminus\Sigma$, valant :

$$(3.6)\qquad G_1(R,Q) = \frac{G_3(R)}{Q^5}, \quad G_2(R,Q) = -\tfrac{1}{2}\frac{R}{Q},$$

où
$$G_3(R) = -\frac{5}{32}\, R\,(K_R)^2 + \frac{1}{8}(K - L_o^2)\,(K_R + R\,K_{R^2}).$$

Preuve. - L'opérateur D s'explicite comme suit, à l'aide du théorème 4 du chap. II, § 3 : dans la formule (4.5) de ce théorème $s=2$ et

$$(3.7)\qquad e^{\frac{1}{2}\langle\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial p}\rangle}\, H^{(2)}(x,p) = e^{\frac{1}{2}\langle\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial p}\rangle}\,\tfrac{1}{2}P^2 = \tfrac{1}{2}P^2 ;$$

les équations (2.14) § 1 des caractéristiques impliquent :

$$(3.8)\qquad dR = \frac{Q}{R}\,dt, \quad d\Psi = \frac{L_o}{R^2}\,dt ;$$

ce théorème donne donc, vu la définition (2.9) de D_H, quand β dépend des seules coordonnées (R,Ψ) de V :

$$D_H\,\beta\,dt = d\beta + \frac{1}{2\nu}\,\chi^{-1/2}\,\Delta(\beta\,\chi^{1/2})\,dt$$

pour dt, dR, $d\Psi$ vérifiant (3.8) ; c'est-à-dire :

$$(3.9)\qquad D_H\,\beta = \frac{\partial\beta}{\partial R}\,\frac{Q}{R} + \frac{\partial\beta}{\partial\Psi}\,\frac{L_o}{R^2} + \frac{1}{2\nu}\,\chi^{-1/2}\,\Delta(\beta\,\chi^{1/2}).$$

Vu (2.6)

$$\chi = [Q\,R\,\sin\Psi\,\sin\Theta]^{-1}, \quad \Theta = \text{const.} ;$$

donc, vu la définition (2.24) de Δ_o, qui opère sur les restrictions des fonctions aux sphères $R = \text{const.}$;

$$\chi^{-1/2}\,\Delta(\beta\,\chi^{1/2}) = \frac{1}{R^2}\sqrt{\sin\Psi}\,\Delta_o\Big(\frac{\beta}{\sqrt{\sin\Psi}}\Big) + \sqrt{Q\,R}\,\Big(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial}{\partial R}\Big)\Big(\frac{\beta}{\sqrt{Q\,R}}\Big) ;$$

remplaçons Δ_o par son expression (2.26) et portons le résultat dans (3.9) ; nous obtenons :

$$D_H \beta = \frac{Q}{R}\frac{\partial \beta}{\partial R} + \frac{\sqrt{QR}}{2\nu}\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial}{\partial R}\right)\left(\frac{\beta}{\sqrt{QR}}\right)$$

$$+ \frac{L_o}{R^2}\ \frac{d\tau}{d\Psi}\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{1}{\nu}F\right)\beta + \frac{1}{8\nu}\ \frac{\beta}{R^2} .$$

Choisissons

$$\beta(\nu, R, \Psi) = f(\nu, \Psi)\, g(\nu, R) ,$$

f étant la fonction formelle de Ψ définie par le lemme 2.2, g étant une fonction formelle définie sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma$; conformément au lemme 2.3, nous obtenons :

$$D_H (f g) = f\, Dg ,$$

avec

$$Dg = \frac{Q}{R}\left[\frac{dg}{dR} + \frac{1}{2\nu}\ \frac{1}{\sqrt{QR}}\ \left(R^2 \frac{d^2}{dR^2} + 2R\frac{d}{dR}\right)\left(\frac{g}{\sqrt{QR}}\right) + \frac{1}{8\nu}\ \frac{g}{QR}\right] .$$

Un calcul banal en déduit l'expression (3.4) de D, G ayant l'expression (3.5), G_1 et G_2 valant :

$$G_1 = \frac{1}{4}\frac{d}{dR}\left[\frac{R}{Q^2}\ \frac{dQ}{dR}\right] + \frac{1}{8}\ \frac{R}{Q^3}\left(\frac{dQ}{dR}\right)^2 , \quad G_2 = -\frac{1}{2}\frac{R}{Q} .$$

Or, vu l'équation (3.3) de $\Gamma[L_o, M_o]$:

$$Q^2 = K[R, M_o] - L_o^2 \quad ;$$

d'où l'expression (3.6) de G_1 .

Le lemme précédent permet d'expliciter les propriétés du problème $(2.3)_r$, auquel le théorème 2 a réduit le problème $(2.1)_r$.

<u>Définition 3</u> . - Une fonction $g : \Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma \to \mathbb{C}$ est dite <u>paire</u> ou <u>impaire</u> quand :

$$(\forall (\pm Q, R) \in \Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma) : g(Q, R) = \pm g(-Q, R) .$$

THÉORÈME 3.1. - (Complément au théorème 2). Faisons l'hypothèse (3.1).

1°) Si le problème $(2.31)_r$ possède une solution g telle que $g_o = 1$, alors il possède une solution unique telle que :

$$g_o = 1 \; ; \; g_s \text{ est réel et a la parité de } s \; (s \leqq r) \; ;$$

$$(3.10) \qquad g\bar{g} = 1 - \frac{1}{2\nu} \frac{R}{Q} \left(\bar{g} \frac{dg}{dR} - g \frac{d\bar{g}}{dR}\right) \bmod 1/\nu^{r+1} .$$

Cette formule (3.10) signifie que, pour $2 \leqq 2s \leqq r$:

$$(3.11) \qquad \sum_{s'=o}^{2s} (-1)^{s'} g_{2s-s'} \, g_{s'} = -\frac{R}{Q} \sum_{s'=o}^{2s-1} (-1)^{s'} g_{s'} \frac{d}{dR} g_{2s-1-s'} \; ;$$

elle exprime donc g_{2s} au moyen de $g_1, \ldots, g_{2s-1}$.

2°) Si le problème $(2.31)_{2s-1}$ possède une solution, alors le problème $(2.31)_{2s}$ en possède une.

Note 3. - La fonction formelle U'', définie sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma$ par le théorème 2 2°), vaut évidemment :

$$(3.12) \qquad U''(\nu) = \frac{g(\nu)}{\sqrt{QR}} \, e^{\nu \Omega} \; ;$$

elle vérifie :

$$(3.13) \qquad \frac{1}{\nu^2} \Delta U''(\nu, R) = \frac{1}{R^2} \left\{ K[R, M_o] - L_o^2 - \frac{1}{4\nu^2} \right\} U''(\nu, R) ,$$

où Δ est le laplacien : $\dfrac{d^2}{dR^2} + \dfrac{2}{R} \dfrac{d}{dR}$.

Preuve de 1°). - Supposons 1°) prouvé quand on substitue $r-1$ à r et supposons le problème $(2.31)_r$ possible : vu le théorème 2 2°) et le lemme 3, g_r est défini, à une constante d'intégration près, par les conditions :

$$(3.14)_r \qquad \frac{dg_r}{dR} = G \, g_{r-1} \text{ sur } \Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma , \; Q^{3r} g_r \text{ est régulière sur } \Gamma[L_o, M_o].$$

Or G change la parité ; si r est impair, un choix convenable de la constante d'intégration rend donc g_r réelle et impaire ; si $r = 2s$ est pair, g_{2s} est donc paire .

On a :

$$\frac{dg}{dR} = \frac{1}{\nu} Gg \bmod. 1/\nu^{r+1} ; Gg = G_1 g + \frac{d}{dR}[G_2 \frac{dg}{dR}] ;$$

un calcul analogue à la preuve de (2.19) en déduit (3.10) , à l'addition près d'un nombre formel $\sum_s c_s / \nu^{2s}$ ($c_s \in R$), qu'on annule en choisissant convenablement les constantes d'intégration des g_{2s} .

<u>Preuve de</u> 2°). - Supposons $r = 2s$ pair et le problème $(2.31)_{2s-1}$ possible ; vu le théorème 2.3°), le problème $(3.14)_{2s}$ possède une solution g_{2s} quand on y remplace Γ par son revêtement universel $\check{\Gamma}$; la preuve de (3.11) reste valable ; or (3.1) prouve que g_{2s} est définie sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \sum$; g_{2s} est donc solution du problème $(3.14)_{2s}$.

<u>Preuve de la Note</u> 3. - Vu l'expression (3.2) de a et le théorème 2.2°) :

$$\{\frac{1}{\nu^2}\Delta - \frac{1}{R^2} \quad K \quad [R, \frac{1}{\nu}(x_1 \frac{\partial}{\partial r_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial r_1})]\} [U'(\nu, x) U''(\nu, x)] = 0 ,$$

où U' est homogène en x, de degré 0, et où U'' ne dépend que de R, ce qui implique :

$$\Delta (U' . U'') = U' . \Delta U'' + U'' . \Delta U' .$$

D'où, (3.13), vu $(2.21)_2$.

<u>Notations</u> . - Soit $[R_1, R_2] \subset R \subset C$ l'ensemble des valeurs prises par R sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \sum$; soit ω un voisinage simplement connexe du segment réel fermé $[R_1, R_2]$ dans le plan complexe C ; $R \in C$.

THEOREME 3.2 . - <u>Supposons</u> K <u>holomorphe dans</u> ω ; <u>définissons par</u> (3.3) Q <u>holomorphe dans</u> $C \setminus [R_1, R_2]$.

1°) <u>Si le problème</u> $(2.31)_{2s}$ <u>possède une solution</u> g , <u>alors</u>

$$(\forall r \leq 2s) \quad Q^{3r} g_r(Q, R) = (-Q)^{3r} g_r(-Q, R)$$

est une fonction de R, holomorphe dans ω.

En particulier, g_{2s} est une fonction de R, méromorphe dans ω, de pôles R_1 et R_2.

2°) La condition que le problème $(2.31)_{2s+1}$ est possible – condition qui implique aussi la possibilité du problème $(2.31)_{2s+2}$ – est la suivante : la primitive de $(G g_{2s})\, dR$ est définie (c.à.d. uniforme) dans $\omega \setminus [R_o , R_1]$.

Preuve. – Supposons 1°) vrai ; (1°) est évident pour $s = 0$). Alors la fonction $g_{2s+1} : \check{\Gamma}[L_o , M_o] \setminus \check{\Sigma} \to C$ est évidemment la valeur prise, sur la coupure $[R_1 , R_2]$ de C, par la primitive de $(G g_{2s})\, dR$, qui est définie sur le revêtement universel de $\omega \setminus [R_1 , R_2]$. La condition que g_{2s+1} est définie sur $\Gamma [L_o , M_o] \setminus \Sigma$ équivaut évidemment à la condition que cette primitive est définie sur $\omega \setminus [R_1 , R_2]$.

S'il en est ainsi, moyennant un choix convenable de sa constante d'intégration, cette primitive g_{2s+1} est, au voisinage de R_1 et de R_2, une fonction méromorphe impaire de Q : elle prend des valeurs opposées sur les deux bords de la coupure $[R_1 , R_2]$, comme Q.

Pour R voisin de R_1 ou de R_2, Q est voisin de 0, g_{2s} est une fonction paire de Q possédant en $Q = 0$ un pôle d'ordre $6s$; vu (3.3), (3.5), (3.6) et (3.14) :

$$\frac{d\, g_{2s+1}}{dQ} = \frac{dR}{dQ}\, G g_{2s} = 2 \frac{G_3}{K_R}\, g_{2s}\, \frac{1}{Q^4} - 4 \frac{d}{dQ}\left[\frac{3K_R}{Q^2}\, \frac{dg_{2s}}{dQ}\right], \quad \text{où } K_R \neq 0 ;$$

g_{2s+1} est donc localement une fonction impaire de Q possédant en $Q = 0$ un pôle d'ordre $3(2s+1)$.

Par suite $Q^{3(2s+1)}\, g_{2s+1}$ est holomorphe sur ω.

(3.11) définit g_{2s+2} ; $Q^{3(2s+2)}\, g_{2s+2}$ est donc holomorphe sur ω. Par suite 1°) vaut quand on remplace s par $s+1$.

4. LE CAS DE SCHRÖDINGER - KLEIN - GORDON. - Pour établir la possibilité (vr) du problème $(2.1)_r$, que nous avons réduit au problème $(2.31)_r$, une hypothèse appropriée est évidemment nécessaire.

Nous n'avons pas réussi à en trouver d'autre que la suivante : K est un polynome du second degré :

$$K[R, M] = -R^2 A(M) + 2RB(M) - C(M) ;$$

c'est-à-dire : l'expression de a dans R_o est l'opérateur de Schrödinger - Klein - Gordon (§ 1, n° 4) ; A, B et C sont des fonctions affines de M.

Alors, dans le théorème 3.2, $\omega = C$; dans la définition (3.5) de l'opérateur G, G_3 est un polynome en R de degré 3, G_1 et G_2 sont des fonctions holomorphes dans $C \setminus [R_1, R_2]$ et à l'infini, où G_1 s'annule 2 fois ; si g est holomorphe dans $C \setminus [R_1, R_2]$ et à l'infini, alors la primitive de $(Gg)\,dR$ l'est aussi : tous les g_r existent donc, sont holomorphes dans $C \setminus [R_1, R_2]$ et à l'infini. Puisque g_r est holomorphe à l'infini et que $Q^{3r} g_r$ est holomorphe sur C, $Q^{3r} g_r$ est un polynome en R de degré $3r$.

Nous avons donc prouvé les deux théorèmes suivants :

THEOREME 4.1 (Existence et unicité). - Supposons que a ait pour expression dans R_o l'opérateur de Schrödinger-Klein-Gordon (§ 1, Exemple 4.1).

1°) La condition que le système lagrangien

$$a\,U = (a_{L^2} - c_L)\,U = (a_M - c_M)\,U = 0 , \tag{4.1}$$

où c_L et c_M sont deux nombres formels tels que

$$c_L - L_o^2 = c_M - M_o = 0 \mod 1/\nu^2, \tag{4.2}$$

possède une solution définie sur une variété lagrangienne COMPACTE V est la suivante :

i) $$c_L = L_o^2 + \frac{1}{4\nu^2} , \quad c_M = M_o ;$$

ii) V est l'un des tores lagrangiens $V[L_o, M_o] = T(\ell, m, n)$, définis par le théorème 4.1 du § 1.

2°) Il existe une solution lagrangienne U de (4.1), définie sur un tel tore V et possédant l'amplitude lagrangienne.

$$\beta_o = 1 .$$

Toute solution lagrangienne de (4.1), définie sur V, est le produit de U par un nombre formel de phase nulle.

Note 4.1. - La projection de V sur X est

$$V_X : R_1 \leqq |x| \leqq R_2 , \; M_o |x| \leqq L_o \sqrt{x_1^2 + x_2^2} ,$$

où R_1 et R_2 sont les deux racines de l'équation :

$$A_o R^2 - 2 B_o R + C_o + L_o^2 = 0 \qquad (A_o, B_o, C_o : \text{valeurs de } A, B, C \text{ en } M_o).$$

THEOREME 4.2 (Structure). - Il existe une unique solution U de (4.1), définie sur un tel tore V, et ayant la structure suivante.

Son expression U_{R_o} dans le repère R_o (§1, n° 1) est du type :

(4.3) $$U_{R_o}(\nu) = U'(\nu)\, U''(\nu) ;$$

la coordonnée locale $x \in V_X$ étant employée sur V, $U'(\nu)$ est une fonction de x, homogène de degré 0, formelle, vérifiant :

(4.4) $$\frac{1}{\nu}\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) U'(\nu , x) = M_o\, U'(\nu , x) ; \; \frac{1}{\nu^2} \Delta U'(\nu , x) = \frac{1}{R^2}\left(L_o^2 + \frac{1}{4\nu^2}\right) U'(\nu,x)$$

$U''(\nu)$ est une fonction de R, formelle, vérifiant :

(4.5) $$\frac{1}{\nu^2} \Delta U''(\nu , x) = \frac{1}{R^2} \left\{ K[R, M_o] - L_o^2 - \frac{1}{4\nu^2} \right\} U''(\nu , x) .$$

U' et U'' sont définies par les formules :

(4.6) $$U'(\nu , x) = \frac{f(\nu,\tau)}{\sqrt{\sin \Psi}}\, e^{\nu (L_o \Psi + M_o \Phi)} , \; U''(\nu , x) = \frac{g(\nu , Q , R)}{\sqrt{Q R}}\, e^{\nu \Omega} ,$$

où $\tau = \operatorname{cotg} \Psi$ et où Ω est la fonction de R définie par (2.8) § 1 ;

arg. sin Ψ et arg. Q ont les sauts $+\pi$ en les points $\Psi = 0 \bmod. \pi$ et $Q = 0$ de et $\Gamma[L_o, M_o]$, orientés dans les sens $d\Psi > o$ et $Q\ dR > 0$;

$$f(\nu) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} f_r \quad \text{et} \quad g(\nu) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} g_r$$

sont les fonctions formelles de phase nulle, définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma$ par l'ensemble des propriétés suivantes :

$$(4.7) \qquad \frac{df}{d\tau} = \frac{1}{\nu} Ff \quad , \quad \frac{dg}{dR} = \frac{1}{\nu} G g ,$$

les opérateurs différentiels F et G valant :

$$(4.8) \qquad Ff = F_1 f + \frac{d}{d\tau}\left[F_2 \frac{df}{d\tau}\right], \ Gg = G_1 g + \frac{d}{dR}\left[G_2 \frac{dg}{dR}\right] ,$$

où : F_1 et F_2 sont les polynômes pairs de τ, de degrés 2 et 4, définis par le lemme 2.2 1°),

$Q^5 G_1$ et $Q G_2$ sont les polynômes de R, de degrés 3 et 1, définis par (3.6) ;

$f_o = 1$; $g_o = 1$; les fonctions f_r et g_r sont réelles et ont la parité de r ;

$$(4.9) \qquad f\bar{f} = 1 + \frac{1}{\nu} F_2 \left(\bar{f} \frac{df}{d\tau} - f \frac{d\bar{f}}{d\tau}\right), \ g\bar{g} = 1 + \frac{1}{\nu} G_2 \left(\bar{g} \frac{dg}{dR} - g \frac{d\bar{g}}{dR}\right) ;$$

ces formules (4.9) donnent explicitement les fonctions paires f_{2s} et g_{2s} au moyen de $f_1, \dots, f_{2s-1}$ et de $g_1, \dots, g_{2s-1}$; les fonctions impaires f_{2s+1} et g_{2s+1} sont définies par les quadratures :

$$df_{2s+1} = (Ff_{2s})\ d\tau,\ dg_{2s+1} = (Gg_{2s})\ dR ;$$

f_r est un polynôme en τ de degré $3r$;

$Q^{3r} g_r$ est un polynôme en R de degré $3r$.

Note 4. - $g_{2s+1} - G_2 \dfrac{dg_{2s}}{dR}$ est donc la fonction impaire sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma$, primitive de la forme différentielle $G_1\ g_{2s}\ dR$; cette forme est du type

$\frac{\Pi'(R)}{Q^{6s+5}}\, dR$, Π' étant un polynôme de degré $6s+3$; vu le théorème précédent cette primitive est du type $\frac{\Pi(R)}{Q^{6s+3}}$, Π étant un polynôme de degré $6s+3$.

Donnons une preuve plus directe de ce fait essentiel :

LEMME 4.2. - $(\forall s \in \mathbb{N})$ la dérivation :

$$\frac{d}{dR}\,\frac{\Pi(R)}{Q^{2s+1}} = \frac{\Pi'(R)}{Q^{2s+3}} \quad \text{(4.10)}$$

(Q^2 : polynome en R de degré 2 ; discr. $Q \neq 0$)

définit un automorphisme $\Pi \mapsto \Pi'$ de l'espace vectoriel des polynômes de degré $2s+1$.

Preuve. - Soit Π un polynôme de degré $2s+1$; $\Pi(R)\,Q^{-2s-1}$ est holomorphe à l'infini, où sa dérivée a donc un zéro double ; par suite (4.10) définit un polynôme Π' de degré $2s+1$; l'application

$$\Pi \mapsto \Pi'$$

est donc un endomorphisme d'espace vectoriel de dimension finie ; or c'est évidemment un monomorphisme ; c'est donc un isomorphisme.

CONCLUSION. - Ce § 3 a cherché, quand $\dim X = 3$, un système lagrangien, d'inconnue scalaire, possédant une solution, unique à un facteur multiplicatif près, définie sur une variété lagrangienne COMPACTE. Il a trouvé un seul système de ce type : celui qu'emploie la mécanique ondulatoire des particules sans spin.

§ 4. L'équation aux dérivées partielles de Schrödinger - Klein - Gordon.

0. INTRODUCTION . - Nommons problème (0.1) le problème classique que voici : trouver les fonctions non nulles

$$u : E^3 \to \mathbf{C} \ ,$$

de carrés sommables ainsi que leurs gradients, solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$(0.1) \qquad a\ u = 0 \ ,$$

où a est l'opérateur différentiel associé à l'hamiltonien :

$$(0.2) \qquad H[L , M , Q , R] = \tfrac{1}{2} \ \{ P^2 - \frac{1}{R^2} K[R , M] \} \ ,$$

K étant une fonction affine de M [cf. §3 , (3.1) et (3.2)] ;
cet opérateur est donc [cf. chap II , § 3 , déf. 6.2] :

$$(0.3) \qquad a = \frac{1}{2\nu_o^2} \ \Delta - \frac{1}{2R^2} \ K \left[R , \frac{1}{\nu_o} \ \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \ \frac{\partial}{\partial x_1}\right)\right] , \text{ où } \ \nu_o = \frac{i}{\hbar} .$$

Le n° 2 suppose [cf. §3 , n° 4] :

$$(0.4) \qquad K[R , M] = - R^2 A(M) + 2 R B(M) - C(M) \ ,$$

A , B , C étant des fonctions affines de M : alors a est l'opérateur de Schrödinger - Klein - Gordon .

Ce § 4 rappelle brièvement la solution de ce problème classique (0.1) ; c'est à deux fins :
i) établir des analogies formelles entre sa solution et celle du problème lagrangien (2.1) § 3 : résoudre

$$a\, U = (a_{L^2} - c_L)\; U = (a_M - c_M)\; U = 0 \qquad \text{sur } V \text{ compact ;}$$

ii) établir que la condition d'existence de la solution de ce problème lagrangien, [qui est celle de ce problème mod $1/\nu^2$, cf. (3.1) , § 1], se trouve être la même que celle du problème classique (0.1) , dans le cas Schrödinger - Klein - Gordon , c'est-à-dire sous l'hypothèse (0.4) ; cette hypothèse est essentielle.

Note 0 . - L'équation de Schrödinger - Klein - Gordon est , pour des choix convenables de A , B , C , l'équation de Schrödinger et celle de Klein - Gordon , (4.21) et (4.22) du § 1 , où les termes en $\mathcal{H}^2$ ont été omis. L'usage est de traiter en "perturbation" les termes de ces équations linéaires en $\mathcal{H}$; nous ne le ferons pas : nous étudions rigoureusement le problème (0.1) pour établir que l'affirmation ii) est rigoureuse.

1. ETUDE DU PROBLEME (0.1) , SANS L'HYPOTHESE (0.4) . - Rappel des propriétés des des harmoniques sphériques $u'_{\ell,m}$. - L'ensemble des polynomes en $x \in E^3$, harmoniques, homogènes de degré ℓ , est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, de dimension $2\ell+1$; il a pour base les polynomes

$$R^{\ell} u'_{\ell,m} \quad (\ell \text{ et } m \text{ entiers}, |m| \leq \ell)$$

définis par le système , où $u'_{\ell,m}$ est homogène de degré 0 et vérifie donc

$$R^2\, \Delta u' = \Delta_0 u' \quad [\text{cf. (2.4) et (2.24) § 3}]:$$

(1.1) $$\Delta u'_{\ell,m} + \frac{1}{R^2}\,\ell(\ell+1)\, u'_{\ell,m} = 0 \;;\; \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) u'_{\ell,m} = i\, m\, u'_{\ell,m}$$

Soit S^2 la sphère unité de E^3 et σ sa mesure ;

$$\int_{S^2} \left|\frac{\partial}{\partial x} u'_{\ell,m}\right|^2 \sigma = \ell(\ell+1) \int_{S^2} |u'_{\ell,m}|^2\, \sigma \;;$$

$\forall\, (\ell_1, m_1) \neq (\ell_2, m_2)$, $<.\,,.>$ étant le produit scalaire sesquilinéaire :

$$\int_{S^2} \left< \frac{\partial}{\partial x} u'_{\ell_1,m_1} \,,\, \frac{\partial}{\partial x} u'_{\ell_2,m_2} \right> \sigma = \int_{S^2} u'_{\ell_1,m_1}\, \bar{u}'_{\ell_2,m_2}\, \sigma = 0 \,.$$

Les restrictions des $u'_{\ell,m}$ à S^2 forment un système complet de fonctions sur S^2 : toute fonction $u : E^3 \to \mathbb{C}$, de carré sommable ainsi que son gradient, possède un unique développement série :

$$u = \sum_{\ell,m} u'_{\ell,m} \; u''_{\ell,m} ,$$

les $u''_{\ell,m}$ étant des fonctions de la seule variable $R > 0$, telles que :

$$\int_{E^3} |u|^2 \, d^3x = \sum_{\ell,m} \int_{S^2} |u'_{\ell,m}| \, \sigma \int_0^{+\infty} R^2 \, |u''_{\ell,m}|^2 \, dR < \infty ,$$

$$\int_{E^3} \left|\frac{\partial}{\partial x} u\right|^2 d^3x = \sum_{\ell,m} \int_{S^2} \left|\frac{\partial}{\partial x} u'_{\ell,m}\right|^2 \sigma \, . \int_0^{+\infty} |u''_{\ell,m}|^2 \, dR + \sum_{\ell,m} \int_{S^2} |u'_{\ell,m}|^2 \sigma \, . \int_0^{+\infty} R^2 \left|\frac{d}{dR} u''_{\ell,m}\right|^2 dR < \infty .$$

<u>Résolution du problème</u> (0.1) . - La condition que la série u soit solution du problème (0.1) s'énonce, vu (0.3) et (1.1) : $(\forall \ell, m)$

$$(1.2) \quad \left(\frac{d^2}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d}{dR}\right) u''_{\ell,m}(R) + \frac{1}{R^2} \left\{\frac{1}{\hbar^2} K[R, \hbar m] - \ell(\ell+1)\right\} u''_{\ell,m}(R) = 0 .$$

D'où, évidemment, en notant $R u''_{\ell,m} = v$:

THEOREME 1.1. - <u>Le problème</u> (0.1) <u>équivaut au problème</u> (1.3) <u>que voici</u>. <u>Trouver les entiers</u> ℓ, m <u>et les fonctions non nulles</u> $v :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ <u>tels que</u> :

$$|m| \leq \ell ,$$

$$(1.3) \qquad \frac{d^2 v}{dR^2} + \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{1}{\hbar^2} K[R, \hbar m] - \ell(\ell+1) \right\} v = 0 ;$$

$$(1.4) \qquad \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{R^2}\right) v^2 \, dR < \infty , \quad \int_0^{+\infty} \left(\frac{dv}{dR}\right)^2 dR < \infty .$$

<u>Note</u> 1.1 . - Le problème (0.1) est donc possible si et seulement si le suivant l'est. Trouver deux entiers ℓ, m et une fonction non nulle $u : E^3 \to \mathbb{C}$, de carré sommable ainsi que son gradient, tels que :

$$|m| \leq \ell ,$$

$$(1.5) \qquad a u = 0 , \; \Delta_o u + \ell(\ell+1) u = 0 , \; \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) u = i m u .$$

Rappelons que ce système (1.5) joue un rôle essentiel en physique .

<u>Note</u> 1.2 . - Les équations (1.1) , (1.2) et le système (1.5) s'obiennent <u>formellement</u> en remplaçant

$$\nu \;,\; U' \;,\; U'' \;,\; U$$

par

$$\frac{i}{\hbar} \;,\; u'_{\ell,m} \;,\; u''_{\ell,m} \;,\; u$$

dans les équations (2.21), (3.13) et dans le système (2.1) du § 3 , compte-tenu du théorème 3, § 1 et du théorème 2, § 3 , qui imposent :

$$L_o = \hbar\left(\ell + \tfrac{1}{2}\right) , \; M_o = \hbar m , \; c_L = L_o^2 - \frac{5}{4\nu^2} , \; c_M = M_o ,$$

c'est-à-dire, vu (2.3) § 3 :

$$a^+_{L^2} - c_L = \frac{1}{\nu^2} \Delta_o - \hbar^2 \left[\ell + \tfrac{1}{2} - \frac{i}{2\nu\hbar}\right]\left[\ell + \tfrac{1}{2} + \frac{i}{2\nu\hbar}\right] ,$$

$$a^+_M - c_M = \frac{1}{\nu}\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) - \hbar m .$$

<u>Supposons</u> K <u>fonction holomorphe de</u> R <u>à l'origine</u> . - Notons :

$$(1.6) \qquad C_o = - K[0, \hbar m] \;, \quad \gamma = \sqrt{\left(\ell + \tfrac{1}{2}\right)^2 + C_o \hbar^{-2}} \;;$$

<u>le théorème de Fuchs</u> construit deux solutions indépendantes de l'équation (1.3) ; si 2γ n'est pas entier, leurs quotients respectifs par $R^{\pm\gamma + \frac{1}{2}}$ sont holomorphes à l'origine . Si γ est imaginaire pur, toute solution non nulle de (1.3) fait donc diverger les intégrales (1.4) à l'origine . Il en est de même si $\gamma = 0$ (cf. Fuchs). Supposons $\gamma > 0$; la solution v de (1.3) qui est le produit de

$R^{\gamma+\frac{1}{2}}$ par une fonction holomorphe fait converger les intégrales (1.4) à l'origine , les autres solutions de (1.3) les font diverger (cf. Fuchs) . Donc, puisque le problème (1.3) équivaut au problème 0.1 :

THEOREME 1.2 . - Si K est holomorphe à l'origine, alors la possibilité du problème (0.1) équivaut à celle du problème suivant. Trouver deux entiers ℓ et m tels que :

$$|m| \leq \ell \, , \; \gamma > 0 \, ,$$

et que la solution v de (1.3) , dont le quotient par $R^{\gamma+1/2}$ est holomorphe, non nulle, à l'origine, vérifie :

$$\int_1^{+\infty} v^2 \, dR < \infty \quad , \quad \int_1^{\infty} \left(\frac{dv}{dR}\right)^2 dR < \infty . \tag{1.7}$$

2. LE CAS DE SCHRÖDINGER - KLEIN - GORDON . - Dans ce cas, c'est-à-dire sous l'hypothèse (0.4), le théorème précédent peut-être explicité. Notons :

$$M_0 = \hbar m \, , \; A_0 = A\,(M_0) \; , \; B_0 = B\,(M_0) \, , \; C_0 = C\,(M_0) \; ,$$

$$\alpha = \sqrt{A_0}\;\hbar^{-1} \; , \; \beta = B_0\,\hbar^{-2} \, . \tag{2.1}$$

L'équation (1.3) devient l'équation hypergéométrique confluante :

$$\frac{d^2 v}{dR^2} + \left[-\alpha^2 + \frac{2\beta}{R} - \frac{\gamma^2 - 1/4}{R^2} \right] v = 0 \; , \tag{2.2}$$

où : $\alpha^2 \, , \, \beta \, , \, \gamma \in R \, , \, \gamma > 0 \, ;$

si $\alpha^2 > 0$, alors nous choisissons $\alpha > 0$.

Notons v la solution non nulle de (2.2) telle que $v\,R^{-\gamma-1/2}$ soit une fonction entière de R : elle est définie à une constante multiplicative près (Fuchs).

LEMME 2 . - La convergence des intégrales (1.7) équivaut à la condition :

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{2} - \gamma \quad \text{est entier} > 0 . \tag{2.3}$$

Preuve . - Donnons à v l'expression :

$$v(R) = R^{\gamma+1/2} \quad e^{-\alpha R} \sum_{s \in N} c_s \, R^s \; ; \; (c_s \in C) \; ; \tag{2.4}$$

en la portant dans (2.2), on obtient (Fuchs) la formule de récurrence définissant les c_s en fonction de c_o :

$$(2.5) \qquad s(s+2\gamma)\, c_s = 2\left[\alpha(s+\gamma-\tfrac{1}{2})-\beta\right] c_{s-1}\,.$$

La condition (2.3) équivaut donc à la suivante :

$$\sum_{s\in\mathbb{N}} c_s R^s \quad \text{est un polynome ;}$$

elle implique $\alpha^2 > 0$, donc $\alpha > 0$, donc la convergence des intégrales (1.7).

Prouvons que (1.7) n'a pas lieu quand (2.3) n'est pas vérifié.

Cas : $\alpha > 0$. - Si $\sum_s c_s R^s$ n'est pas un polynome, alors, pour un choix approprié du signe de c_o :

$c_s > 0$, pour s voisin de $+\infty$. où $c' > 0$;

Soit :

$$\varepsilon \in]0,\alpha[\;;$$

(2.5) donne :

$s\, c_s > 2\,\varepsilon\, c_{s-1}$, pour s voisin de $+\infty$, où $c' > 0$;

donc :

$\sum_s c_s R^s > c'\, e^{2\varepsilon R}$, pour R voisin de $+\infty$,

l'intégrale $(1.7)_1$ diverge donc !

Cas : $\alpha^2 < 0$. - L'expression classique de v par une intégrale donne une expression asymptotique classique de v : pour R voisin de $+\infty$,

$$v = c\; e^{\alpha R}\; R^{-s/\alpha} + \bar{c}\; e^{-\alpha R}\; R^{s/\alpha} + \ldots,$$

où c et $\bar{c}$ sont constants, α imaginaire pure. L'intégrale $(1.7)_1$ diverge donc. (Cf. Whittaker and Watson, Modern Analysis, [18], chap. XVI. . confluent hypergéometric function, Asymptotic expansion).

Cas : $\gamma = 0$, $\beta < 0$. - Vu (2.5) :

$$v(R) = R^{\gamma+\frac{1}{2}} \sum_{s \in \mathbb{N}} c_s R^s \;, \quad \text{où } (\forall s) : c_s > 0 \;;$$

l'intégrale $(1.7)_1$ diverge donc .

Cas : $\gamma = 0$, $\beta > 0$. - $R^{-\gamma-\frac{1}{2}}\, v$ vérifie une équation différentielle à coefficients linéaires ; d'où, par la méthode de Laplace :

$$v\,(R) = \sqrt{R} \int_T t^{-2\gamma-1}\, e^{\sqrt{2\beta R}(t-t^{-1})}\, dt \,,$$

T étant le bord d'une demi-bande de $\mathbb{C}$ contenant la coupure $]-\infty, o[$; d'où, par la méthode du col, la valeur asymptotique, pour R voisin de $+\infty$:

$$v\,(R) \simeq R^{1/4}\, [c\, e^{2i\sqrt{2\beta R}} + \bar{c}\, e^{-2i\sqrt{2\beta R}}] ;$$

l'intégrale $(1.7)_1$ diverge donc :

Le théorème 1.2 et le lemme 2 , où α et β sont définis par (2.1) et γ par (1.6), prouvent ceci :

THEOREME 2 . - Quand a est l'opérateur de Schrödinger - Klein - Gordon, alors

1°) le problème classique (0.1) , dont nous venons de rappeler l'étude,

2°) le problème lagrangien (2.1) du § 3 :

$$a\,U = (a_{L^2} - c_L)\,U = (a_M - c_M)\,U = 0 \quad \underline{\text{sur}} \quad V \quad \underline{\text{compact}},$$

3°) ce même problème mod. $1/\nu^2$, c'est-à-dire le problème (3.1) du § 1 ,

ont tous trois la même condition de possibilité : l'existence d'un triplet d'entiers $(\ell\,, m\,, n)$ vérifiant la condition (4.11) du théorème 4.1, § 1 .

Note 2. - La comparaison du théorème 1.2 et du théorème 3.1 1°) § 1 prouve que le théorème précédent ne s'applique pas à tout opérateur a associé à un hamiltonien H du type (0.2) .

CONCLUSION . - Bien que les problèmes aux limites classiques et les problèmes lagrangiens soient absolument indépendants, il se trouve qu'ils définissent les mêmes niveaux d'énergie des équations de Schrödinger et de Klein - Gordon.

Les niveaux d'énergie observés en physique sont ceux de l'équation de Dirac, qu'étudie le chapitre suivant .

CHAPITRE IV

EQUATION DE DIRAC, AVEC EFFET ZEEMAN.

INTRODUCTION . - Le § 1 résout mod. $\frac{1}{\nu^2}$ un problème lagrangien homogène à plusieurs inconnues, qui est l'un des plus simples de ceux auxquels s'applique le théorème 3 du chap. II, § 4 ; la résolution de ce problème introduit le quadruplet de nombres quantiques qui intervient dans l'étude de l'équation de Dirac.

Le § 2 réduit, en analyse lagrangienne, l'équation de Dirac mod. $\frac{1}{\nu^2}$ au système plus simple qu'a résolu le § 1 ; cette réduction est analogue au théorème de réduction 2.2 du chap. II, § 4. Ce § 2 prouve ainsi que les solutions lagrangiennes, définies mod $\frac{1}{\nu^2}$ sur des variétés compactes, de l'équation de Dirac (atome à un électron, dans un champ magnétique) existent pour des niveaux d énergie qui sont exactement ceux pour lesquels existe la solution classique de cette équation (compte tenu des effets Zeeman et même Paschen - Back) .

§ 1. Un problème lagrangien à deux inconnues.

Ce § 1 donne une application du chap. II, § 4, théorème 3.

1. CHOIX D'OPERATEURS COMMUTANT mod. $\frac{1}{\nu^3}$. - Comme au chap. III, § 1, n° 1 , notons :

$$(1.1) \quad X = X^* = E^3 \ ; \ x , p \in E^3 \ ; \ R(x) = |x| , \ P(p) = |p| , \ Q(x,p) = \langle p,x \rangle , L(x,p) = |x \wedge p|$$

en sorte que :

$$L^2 + Q^2 = P^2 R^2 \; ; \tag{1.2}$$

notons $(M_1, M_2, M_3 = M)$ les composantes de $x \wedge p$.

Vu le chap. III , § 1 , (1.3) , les trois fonctions suivantes sont deux à deux en involution (cf. chap. III, § 1, n° 2) :

(1.3) $H^{(1)}(x,p)=H[L(x,p),\ M(x,p),\ Q(x,p),\ R(x)]\,;\ H^{(2)}(x,p)=L^2(x,p)\,;\ H^{(3)}(x,p)=M(x,p).$

L'emploi du chap. II, §4, théorème 3 exige la donnée de trois $\mu \times \mu$ matrices, fonctions de $(x,p) \in X \oplus X^*$, telles que les matrices d'opérateurs lagrangiens associés aux trois matrices

(1.4) $\quad H^{(k)}\, E + \frac{1}{\nu}\ J^{(k)}$ $\quad$ (E : $\mu \times \mu$ matrice unité) commutent mod $\frac{1}{\nu^3}$.

Vu la note 3 du chap. II, § 4, puisque les $H^{(k)}$ sont involution, cette commutation équivaut à la condition $(\forall\, i\, ,\, k)$:

$$(H^{(i)}\ ,\ J^{(k)}) - (H^{(k)}\ ,\ J^{(i)}) + J^{(i)}\, J^{(k)} - J^{(k)} J^{(i)} = 0\ , \tag{1.5$_{i,k}$}$$

où $(.\ ,\ .)$ est la parenthèse de Poisson .

Choisissons $\mu = 2$: les valeurs des $J^{(k)}$ sont des matrices, opérant sur les vecteurs de l'espace $\mathbb{C}^2$, que nous munirons d'une structure hermitienne ; nous choisirons les $i\, J^{(k)}$ self-adjointes. (Les vecteurs de $\mathbb{C}^2$ se nomment spineurs).

Notations . - Notons $\sigma_o = 1$ la 2×2 matrice unité ; toute 2×2 matrice auto-adjointe est du type $x_o\, \sigma_o + \sigma$, x_o étant un nombre réel et σ une matrice auto-adjointe, de trace nulle ;

$$\sigma = \sigma\,[x_1\, ,\, x_2\, ,\, x_3] = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i\,x_2 \\ x_1 + i\,x_2 & x_3 \end{pmatrix} = x_1\, \sigma_1 + x_2\, \sigma_2 + x_3 \sigma_3 \tag{1.6}$$

où

$$(x_1\, ,\, x_2\, ,\, x_3) \in E^3$$

et où

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sont les matrices de Pauli, qui vérifiant les relations :

(1.7) $\sigma_k^2 = 1$, $\sigma_i \sigma_k = - \sigma_k \sigma_i$, $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = i$ (la matrice unité est notée $\sigma_o = 1$);

d'où :

$$\sigma^2 [x] = |x|^2 . \tag{1.8}$$

Note 1.1. - Rappelons les conséquences de (1.8) : soit u_2 un isomorphisme de $\mathbb{C}^2$ conservant sa mesure : $u_2 \in S\,U(2)$; $u_2 \, \sigma[x] u_2^{-1}$ est self-adjointe, de trace nulle, donc du type $\sigma (y)$; notons $y = u\, x$:

$$\sigma [u x] = u_2 \, \sigma \, [x] \, u_2^{-1} ;$$

vu (1.8), u conserve $|x|^2$: plus précisément, u est une rotation de E^3 : $u \in S\,O(3)$; d'où un morphisme

$$S\,U(2) \ni u_2 \longmapsto u \in S\,O(3) ,$$

qui est un revêtement d'ordre 2 de $S\,O(3)$.

LEMME 1. - Supposons donné

$$J^{(1)} = i\, f\, \sigma_3 + i\, g\, \sigma\, [x \wedge p] , \tag{1.9}$$

où :

$$f\,(x,p) = f\,[\,L(x,p),\, M\,(x,p)\,,\, Q\,(x,p)\,,\, R(x)\,]\,,\quad g = g[L,M,Q,R]\,;$$

alors on satisfait (1.5) en choisissant :

$$J^{(2)} = 0\,, \quad J^{(3)} = \frac{i}{2}\, \sigma_3 \tag{1.10}$$

Note 1.2. - Les relations (1.5) restent évidemment vérifiées quand on ajoute aux $H^{(i)}$ et $J^{(k)}$ des nombres complexes arbitraires (c'est-à-dire : leurs produits par la matrice unité, notée : $\sigma_o = 1$) .

<u>Preuve de</u> $(1.5)_{1,2}$. - $(H^{(2)}, J^{(1)}) = 0$, car, vu le ch. III, § 1, n° 1 , L est en involution avec $Q, R, M = M_3$ et de même avec M_1 et M_2 .

<u>Preuve de</u> $(1.5)_{1,3}$. - Puisque L, M, Q, R sont en involution :

$$(H^{(3)}, J^{(1)}) = i\, g\, (M, \sigma[x \wedge p]) = i\, g\, \sigma[-M_2, M_1, o] , \tag{1.11}$$

car un calcul immédiat et classique donne :

$$(M, M_1) = -M_2, (M, M_2) = M_1 .$$

D'autre part, (1.7) implique :

$$\sigma_3\, \sigma[x \wedge p] - \sigma[x \wedge p)\, \sigma_3 = 2\, i\, \sigma\, [-M_2, M_1, 0] ;$$

d'où, vu les définitions (1.9) et (1.10) de $J^{(1)}$ et $J^{(3)}$:

$$J^{(3)}\, J^{(1)} - J^{(1)}\, J^{(3)} = -\, i\, g\, \sigma[-M_2, M_1, 0]. \tag{1.12}$$

De (1.11) et (1.12) résulte $(1.5)_{1,3}$.

<u>La preuve de</u> $(1.5)_{2,3}$ est évidente.

2. RESOLUTION D'UN PROBLEME LAGRANGIEN A DEUX INCONNUES . - <u>Notations</u> . - Soient :

$$a_{f,g} , \quad a_{L^2} , \quad a_M$$

les 2×2 matrices d'opérateurs lagrangiens associées aux 2×2 matrices :

$$H[L,M,Q,R] + \frac{i}{\nu} f\, [L,M,Q,R]\, \sigma_3 + \frac{i}{\nu}\, g[L,M,Q,R]\, \sigma\, [x \wedge p] , \; L^2, \; M ; \tag{2.1}$$

étudions <u>les solutions</u> $U = (U_1, U_2)$ du système (dont le lemme 1 et la note 1.2 prouvent l'intérêt) :

$$a_{f,g}\, U = (a_{L^2} - L_o^2 - \frac{2i}{\nu} L_o\, \ell')\, U = (a_M - M_o - \frac{i}{\nu}\, m' + \frac{i}{2\nu}\, \sigma_3)\, U = 0 \text{ mod. } \frac{1}{\nu^2} , \tag{2.2}$$

où U_1 et U_2 sont deux fonctions lagrangiennes <u>définies sur une variété lagrangienne</u> COMPACTE V , où ℓ' et m' sont des nombres réels voisins de <u>de carrés négligeables</u> et où L_o , M_o sont deux nombres réels .

Notons, comme au chap. III, § 1, $V[L_o, M_o]$ la variété lagrangienne de $E^3 \oplus E^3$ d'équations :

$$(2.3)\qquad V[L_o,M_o] : H[L_o,M_o,Q,R] = L(x,p) - L_o = M(x,p) - M_o = 0 ;$$

quand elle est compacte, c'est un tore, dont les coordonnées sont

$$t \ \text{mod.}\ c[L_o,M_o] , \ \Psi \ \text{mod.}\ 2\pi , \ \Phi \ \text{mod.}\ 2\pi ;$$

$\Gamma[L_o,M_o]$, puis t et $c[L_o,M_o]$ sont définis au chap. III, § 1 par (2.5) (2.6 et (2.7) ; nous supposerons que, sur $V[L_o,M_o]$;

$$(f - \tfrac{1}{2} H_M)\, c[L,M] \quad \text{et} \quad L\, g\, c[L,M]$$

sont voisins de 0 et de carrés négligeables ; nous noterons, pour $V[L_o,M_o]$, donc $\Gamma[L_o,M_o]$, compactes :

$$(2.4)\qquad \begin{gathered} f_o = \pi N_M[L_o,M_o] + \int_{\Gamma[L_o,M_o]} f[L_o,M_o,Q,R]\,dt , \quad g_o = L_o \int_{\Gamma[L_o;M_o]} g[L_o,M_o,Q,R]\,dt, \\ 2\pi\epsilon[L_o,M_o] = \sqrt{f_o^2 + 2\frac{M_o}{L_o} f_o g_o + g_o^2} > 0 ; \quad \text{où } |M_o| < L_o ; \end{gathered}$$

nous verrons que f_o, g_o, ϵ sont de carrés négligeables.

THEOREME 2. - Les variétés COMPACTES V de $E^3 \oplus E^3$ sur lesquelles sont définies des solutions U du système (2.2) sont les tores $V[L_o,M_o]$ tels que :

$$(2.5)\qquad \begin{gathered} L_o = \hbar(\ell + \tfrac{1}{2} - \ell') , \quad M_o = \hbar(m - m') , \\ \hbar(\ell + \tfrac{1}{2}) + N[\hbar(\ell + \tfrac{1}{2}), \hbar m] = \hbar n \pm \frac{\hbar}{2}\epsilon[\hbar(\ell + \tfrac{1}{2}), \hbar m] , \end{gathered}$$

ℓ, $m - \frac{1}{2}$, n étant trois entiers vérifiant les inégalités :

$$(2.6)\qquad |m| \leq \ell + \tfrac{1}{2} , \quad \ell < n ;$$

ℓ' et m' sont des nombres voisins de 0, arbitraires, sauf quand $m = \ell + \frac{1}{2}$; ils doivent être alors choisis tels que :

$$(2.7) \qquad |M_o| < L_o .$$

Note 2.1. - U sera noté U_+ ou U_- suivant que $(2.5)_3$ vaut avec le choix + ou - ; l'amplitude lagrangienne $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ de $U = U_{\pm}$ sera notée $\beta_{\pm}$; elle vérifie les relations :

$$(2.8) \qquad \begin{aligned} \beta_{\pm}(t + c[L_o,M_o], \Psi, \Phi) &= c_{\pm 1}\, \beta_{\pm}(t, \Psi, \Phi), \\ \beta_{\pm}(t, \Psi + 2\pi, \Phi) &= c_{\pm 2}\, \beta_{\pm}(t, \Psi, \Phi), \\ \beta_{\pm}(t, \Psi, \Phi + 2\pi) &= c_{\pm 3}\, \beta_{\pm}(t, \Psi, \Phi) ; \end{aligned}$$

les $c_{\pm k}$ sont des nombres complexes, de module 1, valant :

$$(2.9) \qquad \begin{aligned} c_{\pm 1} &= e^{2\pi i (\ell' N_L[L_o,M_o] + m' N_M[L_o,M_o] \mp \epsilon [L_o,M_o])} \\ c_{\pm 2} &= e^{2\pi i \ell'} \quad , \quad c_{\pm 3} = e^{2\pi i m'} . \end{aligned}$$

Preuve. - Vu le lemme 1 et la note 1.2, le théorème 3 du chap. II, § 4 s'applique. Les $\check{V}$ sur lesquels une solution U du système (2.2) est définie sont donc les revêtements des variétés V d'équations (2.3) ; celles des V qui sont compactes sont donc les tores $V[L_o,M_o]$. Cherchons quand U est défini sur $V[L_o,M_o]$, c'est-à-dire quand

$$(2.10) \qquad \left(\frac{\eta}{d^3 x}\right)^{1/2} e^{\nu_o \varphi_{R_o}} \beta \quad : \quad V[L_o,M_o] \to \mathbb{C}^2 ,$$

où R_o est le repère utilisé,

$$\arg \eta = 0 \;, \; \arg d^3 x = m_{R_o} ,$$

m_{R_o} et φ_{R_o} étant l'indice de Maslov et la phase de $V[L_o,M_o]$ dans R_o ; vu le chap. III § 1, (3.5) et (3.4) :

$$m_{R_o} = [\frac{1}{\pi}\Psi] - [\frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{H_Q}{H_R}], \quad \text{où } [\ldots] = \text{Partie entière de } \ldots ,$$

(2.11)

$$\varphi_{R_o} = \Omega + L_o \Psi + M_o \Phi ,$$

où est défini au chap. III, § 1 par (2.8).

Achevons l'application du théorème 3 du chap. II, § 4. Vu les notes 3.2 et 3.3 du chap. III, § 1, les vecteurs caractéristiques $\varkappa$, $\varkappa_{L^2}$, $\varkappa_M$ des hamiltoniens H, L^2, M sont :

$$\varkappa : dt = 1 , \ d\Psi = H_L , \ d\Phi = H_M ;$$

$$\varkappa_{L^2}: dt = 0 , \ d\Psi = 2L_o , \ d\Phi = 0 ;$$

$$\varkappa_M : dt = 0 , \ d\Psi = 0 , \ d\Phi = 1 .$$

Le système (2.2) équivaut donc, vu ce théorème, à la condition :

$$(\frac{\partial}{\partial t} + H_L \frac{\partial}{\partial \Psi} + H_M \frac{\partial}{\partial \Phi})\beta + i f \sigma_3 \beta + i g \sigma [x \wedge p] \beta = 0,$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \Psi} - i \ell' \beta = 0 , \quad \frac{\partial \beta}{\partial \Phi} - i m' \beta + \frac{i}{2} \sigma_3 \beta = 0 ;$$

c'est-à-dire au système de Pfaff, que ce théorème affirme être complètement intégrable :

$$(2.12) \qquad d\beta + i [f \sigma_3 dt + g \sigma [x \wedge p] dt - \ell' (d\Psi - H_L dt) - (m' - \tfrac{1}{2}\sigma_3)(d\Phi - H_M dt)]\beta = 0$$

Vu chap. III, § 1, (1.5) :

$$x \wedge p = L_o J_3 ,$$

donc, vu chap. III, § 1, $(1.12)_3$ et (1.11) :

$$\sigma [x \wedge p] = L_o [\sigma_1 \cos \Phi \sin \Theta + \sigma_2 \sin \Phi \sin \Theta + \sigma_3 \cos \Theta] ,$$

où

(2.13) $$\cos\Theta = \frac{M_o}{L_o} \;;$$

donc, vu (1.7) :

$$\begin{aligned}\sigma\,[x\wedge p] &= L_o\,\sigma_1\,(\cos\Phi + i\,\sigma_3\sin\Phi)\sin\Theta + L_o\,\sigma_3\cos\Theta\\ &= L_o\,\sigma_1\,e^{i\Phi\sigma_3}\sin\Theta + L_o\,\sigma_3\cos\Theta\\ &= L_o\,e^{-\frac{i}{2}\Phi\sigma_3}(\sigma_1\sin\Theta + \sigma_3\cos\Theta)\,e^{\frac{i}{2}\Phi\sigma_3}\,.\end{aligned}$$

D'autre part, les fonctions λ et μ de $[L, M, t]$ définies par chap. III, § 1, (2.10) vérifient, vu chap. III, § 2, (2.3) :

(2.14) $$\lambda_t = -H_L\,, \quad \mu_t = -H_M\,.$$

Notons :

(2.15) $$\beta = e^{-\frac{i}{2}\sigma_3\Phi + i\,\ell'(\Psi+\lambda) + i\,m'(\Phi+\mu)}\,\gamma\;;$$

le système (2.12) s'écrit donc :

(2.16) $$d\gamma + i[(f - \tfrac{1}{2}H_M)\,\sigma_3 + L_o\,g\,(\sigma_1\sin\Theta + \sigma_3\cos\Theta)]\,\gamma\,dt = 0\,;$$

la vérification que ce système est complétement intégrable est évidente : γ est indépendant de Φ et Ψ et n'est fonction que de t .

La condition (2.10), que U est défini sur $V\,[L_o, M_o]$, s'énonce donc :

$$\left(\frac{\eta}{d^3x}\right)^{1/2} e^{\nu_o\Omega + \nu_o L_o\Psi + \nu_o M_o\Phi - \frac{i}{2}\sigma_3\Phi + i\,\ell'(\Psi+\lambda) + i\,m'(\Phi+\mu)}\,\gamma : V \to C^2\,.$$

Or Ω, λ, μ ne dépendent que de t et, vu chap. III, § 2, (1.4) et (1.5), croissent de

(2.17) $$\Delta_t\,\Omega = 2\pi N\,[L_o,M_o]\,,\quad \Delta_t\,\lambda = 2\pi N_L\,[L_o,M_o]\,,\quad \Delta_t\,\mu = 2\pi N_M\,[L_o,M_o]\,,$$

quand t croît de $c\,[L_o,M_o]$; N est défini au chap. III, § 1, par (2.9) .

Si nous notons $\nu_0 = i / \hbar \ (> 0)$, la condition (2.10) que U est lagrangien sur V s'énonce donc, vu (2.11), comme suit, car $e^{-\pi i \sigma_3} = -1$:

il existe $\epsilon \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\gamma(t + c\,[L_0, M_0]) = e^{2\pi i \epsilon}\gamma(t) \tag{2.18}$$

$$\frac{1}{\hbar} N[L_0,M_0] + \ell' N_L + m' N_M + \tfrac{1}{2} + \epsilon = \frac{1}{\hbar} L_0 + \ell' - \tfrac{1}{2} = \frac{1}{\hbar} M_0 + m' - \tfrac{1}{2} = 0 \text{ mod.} 1 \ . \tag{2.19}$$

La recherche des solutions γ de (2.16) vérifiant (2.18) est classique :

$$\left[(f - \tfrac{1}{2} H_M)\, \sigma_3 + L_0\, g\ (\sigma_1 \sin\Theta + \sigma_3 \cos\Theta) \right]$$

est une matrice self-adjointe, de trace nulle, fonction périodique de t ; la période est $c\,[L_0, M_0]$; la 2×2 - matrice $u(t)$ définie par

$$du + i\left[(f - \tfrac{1}{2} H_M)\, \sigma_3 + L_0\, g\ (\sigma_1 \sin\Theta + \sigma_3 \cos\Theta) \right] u\, dt = 0 ,\ u(0) = 1, \tag{2.20}$$

est donc une matrice unitaire, de déterminant 1 : $u \in SU(2)$; elle vérifie :

$$u\ (t + c\,[L_0, M_0]) = u\ (t)\ u\ (c[L_0, M_0]) \ ;$$

la solution générale de (2.16) est

$$\gamma\ (t) = u\ (t)\ \delta\ , \text{ où } \delta \in \mathbb{C}^2 \ ;$$

pour que γ vérifie (2.18), il faut et suffit que δ soit l'un des vecteurs propres de la matrice $u\ (c[L_0, M_0]) \in SU(2)$; notons :

(2.21) $\quad e^{\pm 2\pi i\, \epsilon[L_0, M_0]}$ $(0 \leq \epsilon[L_0, M_0] \leq \frac{1}{2})$ les valeurs propres de $u(c\,[L_0, M_0])$; dans (2.18) :

$$\epsilon = \mp\ \epsilon\,[L_0, M_0] \ .$$

Donc, la condition qu'existe une solution lagrangienne U de (2.2) définie sur le tore $V\,[L_0, M_0]$ est qu'existent trois entiers $\ell,\ m - \frac{1}{2},\ n$ tels que :

$$\frac{1}{\hbar} L_o + \ell' + \frac{1}{\hbar} N [L_o, M_o] + \ell' N_L + m' N_M = n \pm \epsilon [L_o, M_o] ,$$

(2.22)

$$\frac{1}{\hbar} L_o + \ell' - \tfrac{1}{2} = \ell , \quad \frac{1}{\hbar} M_o + m' = m , \quad \text{où} \quad |M_o| < L_o .$$

Cette condition ne suppose pas ℓ', m', $(f - \frac{1}{2} H_M) c [L, M]$, $L g c [L,M]$ de carrés négligeables sur $V [L_o, M_o]$.

U et β seront notés $U_\pm$ et $\beta_\pm$ suivant que (2.22) vaut avec $\pm \epsilon [L_o, M_o]$; vu (2.15), (2.17), (2.18), où $\epsilon = \mp \epsilon [L_o, M_o]$, $\beta_\pm$ vérifie (2.8), les $c_{\pm k}$ ayant les valeurs (2.9) .

Supposons négligeables les carrés de ℓ' , m' et les carrés des dérivées de $\hbar \epsilon$: (2.22) se réduit à (2.5) : les entiers ℓ, m, n doivent satisfaire la condition $(2.5)_3$, qui est indépendante de ℓ' et m'. Vu que ℓ et n sont entiers, que ϵ est voisin de 0 et que $N > 0$, $(2.5)_3$ implique $\ell < n$; puisque ℓ' et m' sont voisins de 0, $(2.5)_1$ et $(2.5)_2$ impliquent $|m| \leq \ell + 1/2$ ce qui achève la preuve de (2.6) .

Il reste à prouver que $\epsilon [L_o, M_o]$ a l'expression approchée (2.4) . Puisque, sur $V [L_o, M_o]$

$$(f - \tfrac{1}{2} H_M) \, c \, [L , M] \quad \text{et} \quad L g c \, [L , M]$$

sont supposés voisins de 0 et de carrés négligeables, la solution de (2.20) est, mod. ces carrés, vu $(2.14)_2$:

$$u = 1 - i \left[\left(\tfrac{1}{2} \mu + \int_0^t f \, dt\right) \sigma_3 + L_o \int_0^t g \, dt (\sigma_1 \sin \Theta + \sigma_3 \cos \Theta) \right]$$

c'est-à-dire, en choisissant le second membre dans $S U (2)$, comme u :

$$u = e^{- i \left[\left(\frac{1}{2} \mu + \int_0^t f \, dt\right) \sigma_3 + L_o \int_0^t g \, dt \, (\sigma_1 \sin \Theta + \sigma_3 \cos \Theta) \right]} ;$$

donc, vu (2.17), la définition (2.21) de $\epsilon\,[L_o,M_o]$ et la définition (2.4) de f_o et g_o, $\pm 2\pi\epsilon\,[L_o,M_o]$ sont approximativement les valeurs propres de la matrice self-adjointe de trace nulle :

$$f_o\,\sigma_3 + g_o\,(\sigma_1 \sin\Theta + \sigma_3 \cos\Theta)\ ;$$

or, vu (1.7) et (2.13), son carré est :

$$(f_o + g_o \cos\Theta)^2 + g_o^2 \sin^2\Theta = f_o^2 + 2\,\frac{M_o}{L_o}\,f_o\,g_o + g_o^2\ ;$$

d'où l'expression approchée $(2.4)_2$ de $\epsilon\,[L_o,M_o]$.

<u>Note</u> 2.2. - Les nombres quantiques

$$\ell\,,\ m\,,\ n\,,\ \pm 1$$

sont ceux qu'emploie la résolution classique de l'équation de Dirac, en leur imposant une condition :

- plus stricte que (2.6) ;
- moins stricte que celle que, vu (2.7), leur imposerait le choix : $\ell' = m' = 0$, à savoir :

$(2.6)^{bis}$ $$|m| \leq \ell - \tfrac{1}{2}\,,\ \ell < n\,.$$

Voici cette condition.

<u>Définition</u> 2. - Le chap. III, § 1 résout un système à une inconnue, analogue au système (2.2) quand on y choisit $\ell' = m' = 0$. Au chap. III, § 1 l'amplitude lagrangienne de l'inconnue est nécessairement constante ; c'est conforme au caractère de l'amplitude α et de la phase $\nu_o\,\varphi_R$ en physique : α doit varier moins vite que $e^{\nu_o \varphi_R}$. Rapprochons-nous de cette situation : <u>donnons-nous un quadruplet</u>

$$\ell\,,\ m\,,\ n\,,\ \pm 1$$

<u>vérifiant la condition</u> $(2.5)_3$ <u>d'existence</u> $(\forall\,\ell'\,,\ m')$ <u>d'une solution de</u> (2.2) <u>lagrangienne sur</u> $V\,[L_o,M_o]$; <u>imposons à</u> $(\ell'\,,\ m')$ <u>de donner des valeurs voisines de son minimum à la fonction</u> :

$$(\ell' , m') \mapsto |c_{\pm 1} - 1|^2 + |c_{\pm 2} - 1|^2 + |c_{\pm 3} + 1|^2 \in \mathbb{R} ,$$

c'est-à-dire, vu (2.9), puisque ℓ'^2 et m'^2 sont négligeables par rapport à ℓ' et m' à la fonction :

$$(\ell' , m') \mapsto \ell'^2 + m'^2 + [\ell' N_L + m' N_M \mp \epsilon]^2 \in \mathbb{R} ;$$

si ce choix :

$$(\ell' , m') \text{ voisin de } \pm \frac{\epsilon}{1 + N_L^2 + N_M^2} (N_L, N_M)$$

vérifie la condition nécessaire (2.7), alors, et alors seulement, nous dirons que <u>le quadruplet</u> $(\ell , m , n , \pm 1)$ <u>est admissible.</u>

Au § 2 (équation de Dirac), le cas suivant se présentera :

<u>Exemple</u> 2 . (N_L, N_M) est voisin de $(-1, 0)$; donc (ℓ' , m') est voisin de $(\mp \frac{\epsilon}{2} , 0)$. Vu (2.7) : les quadruplets $(\ell , m , n , \pm 1)$ admissibles sont ceux qui vérifient la condition $(2.5)_3$ et, les signes se correspondant, la condition :

(2.23) $$0 \leqq \ell < n \quad , \quad |m| \leqq \ell \pm \tfrac{1}{2} .$$

L'usage, en mécanique quantique est de noter

$$j = \ell \pm \tfrac{1}{2}$$

et d'employer <u>des quadruplets de nombres quantiques</u> :

$$(\ell , m , n , j = \ell \pm \tfrac{1}{2}) ;$$

<u>ils sont admissibles s'ils vérifient</u> $(2.5)_3$ <u>et si</u> :

(2.24) $$0 \leqq \ell < n \quad , \quad |m| \leqq j ;$$

il leur correspond alors, pour chaque choix admissible de (ℓ' , m'), des solutions U de (2.2), égales entre elles, à un facteur de proportionnalité près ; ce facteur est une constante $\in \mathbb{C}$.

§ 2. L'équation de Dirac.

L'équation de Dirac est un système à 4 inconnues ; les théorèmes 2.1 et 2.2 du chap. II, § 4 ne s'y appliquent pas, car les zéros de dét. a^o_o sont doubles.

Le théorème 1, dont l'énoncé ressemble à celui de ce théorème 2.2 du chap. II, § 4, change, mod. $\frac{1}{\nu^2}$, ce système à 4 inconnues en un système auto-adjoint à 2 inconnues.

Par suppression de termes, qui sont négligeables vu l'ordre de grandeur du champ magnétique, le n° 2 transforme ce système en l'《 équation de Dirac réduite》 , qui est du type résolu au § 1 .

Le n° 3 constate que les niveaux d'énergie définis par cette équation de Dirac réduite, en analyse lagrangienne, sont ceux que définit la résolution classique de l'équation de Dirac, même quand le champ magnétique est assez intense pour produire l'effet Paschen-Back.

Mais le n° 4 obtient une probabilité de présence de l'électron qui diffère de celle de la mécanique ondulatoire et s'apparente à la première théorie quantique.

1. REDUCTION DE L'EQUATION DE DIRAC, EN ANALYSE LAGRANGIENNE. - Donnons-nous deux applications, indéfiniment différentiables, et une constante :

$$A : E^3 \setminus \{0\} \to R_+ \ ; \ B : E^3 \to R \ ; \ C \in R_+ \ ;$$

soient a' et a'' les deux 2×2 - matrices d'opérateurs lagrangiens dont l'expression dans $Z(3) = E^3 \oplus E^3$ est :

$$a' = A(x) + \sigma \left[\frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x} + B(x) \right], \quad a'' = A(x) - \sigma \left[\frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x} + B(x) \right],$$

σ étant la 2×2 - matrice définie au § 1 par (1.6) ; a' et a'' sont auto-adjointes ; elles sont associés aux matrices auto-adjointes.

$$A(x) + \sigma[p + B(x)] \quad \text{et} \quad A(x) - \sigma[p + B(x)] \ ;$$

l'équation de Dirac est le système :

(1.1) $$a' U' = C U'' \quad , \quad a'' U'' = C U' ,$$

dont les inconnues U' et U'' sont des vecteurs ; imposons aux 2 composantes de chacun de ces vecteurs d'être des fonctions lagrangiennes, définies sur une même variété lagrangienne COMPACTE V de $Z(3) = E^3 \oplus E^3$.

L'équation de Dirac (1.1) équivaut évidemment

i) au système d'inconnue U' :

(1.2) $$[C^2 - a'' \circ a'] U' = 0 ;$$

ii) au système d'inconnue U'' :

(1.3) $$[C^2 - a' \circ a''] U'' = 0 .$$

Le calcul de $C^2 - a'' \circ a'$ et $C^2 - a' \circ a''$ est aisé et classique ; pour expliciter le résultat, notons :

(1.4)
$$H(x, p) = \tfrac{1}{2} |p + B(x)|^2 + \frac{C^2}{2} - \tfrac{1}{2} A^2(x) ,$$
$$J'(x, p) = \frac{i}{2} \sigma \left[\frac{\partial}{\partial x} \wedge B(x) \right] + \tfrac{1}{2} \sigma [A_x] , \quad J'' = \frac{i}{2} \sigma \left[\frac{\partial}{\partial x} \wedge B \right] - \tfrac{1}{2} \sigma [A_x] ,$$

où :

$$\frac{\partial}{\partial x} \wedge B = \mathrm{rot.}\, B ;$$

$\frac{1}{2} [C^2 - a'' \circ a']$ est la matrice associée à la 2×2 matrice : $H + \frac{1}{\nu} J'$;

$\frac{1}{2} [C^2 - a' \circ a'']$ est la matrice associée à la 2×2 matrice : $H + \frac{1}{\nu} J''$;

Note 1.1. - Ces matrices ne sont pas auto-adjointes, mais adjointes l'une à l'autre.

Notations. - Soit W l'hypersurface de $E^3 \oplus E^3$ d'équation

(1.5) $$W : H(x, p) = 0 ;$$

soient β' et β'' les amplitudes lagrangiennes de U' et U'' :

$$\beta' : V \to \mathbb{C}^2 \quad ; \quad \beta'' : V \to \mathbb{C}^2 .$$

Vu le théorème 4 du chap. II, § 3, l'équation (1.2) équivaut, mod. $\frac{1}{\nu^2}$, aux conditions :

$$V \subset W ,$$

(1.6) $$\frac{d\beta'}{dt} + J' \beta' = 0 ,$$

où $\frac{d}{dt}$ est la dérivée de Lie, $\mathcal{L}_\varkappa$, suivant le vecteur caractéristique $\varkappa$ de V. De même, (1.3) équivaut, mod. $\frac{1}{\nu^2}$, aux conditions : $V \subset W$;

(1.7) $$\frac{d\beta''}{dt} + J'' \beta'' = 0 .$$

Vu (1.1) , β' et β'' vérifient sur V les deux relations équivalentes :

(1.8) $$\{ A (x) + \sigma [p+B (x)]\} \beta' = C \beta'' \ ; \ \{ A- \sigma [p + B] \} \beta'' = C \beta'.$$

L'équivalence de (1.2) et (1.3) prouve l'équivalence des équations (1.6) et (1.7) ; la relation (1.8) transforme évidemment les solutions de l'une de l'une de ces équations en les solutions de l'autre.

La définition (1.5) de W exprime l'existence d'une fonction

$$\rho : W \to \mathbb{R}_+$$

telle que :

(1.9) $$A = C \text{ ch } 2\rho \ ; \ |p+B| = C \text{ sh } 2\rho \ ;$$

notons

(1.10) $$\tau = \frac{1}{C \text{ sh } 2\rho} \ \sigma [p+B], \quad \text{en sorte que} \ : \ \tau^2 = 1,$$

vu § 1, (1.8) ; d'où :

$$C \ e^{\pm 2\rho\tau} = A \pm \sigma [p+B] \ ;$$

la relation (1.8) liant β' et β'' s'écrit donc :

$$\beta'' = e^{2\rho\tau} \beta' \ ;$$

elle exprime l'existence d'une fonction

$$\beta : V \to \mathbb{C}^2$$

telle que :

$$\beta' = e^{-\rho\tau}\beta \quad , \quad \beta'' = e^{\rho\tau}\beta\ ;$$

les relations équivalentes (1.6) et (1.7) s'écrivent donc :

(1.11) $$\frac{d\beta}{dt} + J\beta = 0\ ,$$

où la 2×2 - matrice J vaut :

(1.12) $$J = e^{\rho\tau}\frac{d}{dt}(e^{-\rho\tau}) + e^{\rho\tau}J'e^{-\rho\tau} = e^{-\rho\tau}\frac{d}{dt}(e^{\rho\tau}) + e^{-\rho\tau}J''e^{\rho\tau}.$$

Nous allons prouver que cette définition de J équivaut à (1.14), ce qui rend évident le théorème suivant :

THEOREME 1. - <u>La résolution sur V</u>, mod. $\frac{1}{\nu^2}$, <u>des systèmes</u> (1.2) <u>et</u> (1.3), <u>équivalents à l'équation de Dirac</u> (1.1), <u>équivaut à la résolution du système à deux inconnues</u> :

(1.13) $$a\,U = 0 \quad \text{mod.}\ \frac{1}{\nu^2}\ ,$$

<u>où</u> a <u>est la matrice d'opérateurs lagrangiens associée à la</u> 2×2 - <u>matrice</u> :

$$H + \frac{1}{\nu}\,J\ ;$$

H <u>est défini par</u> $(1.4)_1$ <u>et</u> J <u>par</u> :

(1.14) $$J(x,p) = \frac{i}{2}\,\sigma\left[\frac{\partial}{\partial x}\wedge B\right] + \frac{i}{2}\,\frac{1}{A+C}\,\sigma[(p+B)\wedge A_x]\ .$$

<u>Note</u> 1.2. - $\frac{1}{\nu}\,J$ et par suite a sont <u>auto-adjoints</u>. D'où, vu la note 1.1, l'intérêt de substituer (1.13) à (1.2) - (1.3) .

<u>Preuve de</u> (1.14) . - Vu les définitions (1.4) et (1.12) de J' . J'' et J, il suffit de prouver les formules suivantes, où $<.\,,\,.>$ est le produit scalaire dans E^3 et $\text{rot.}\ B = \frac{\partial}{\partial x}\wedge B$:

(1.15) $$\frac{C}{2}\left\{e^{\rho\tau}\frac{d}{dt}(e^{-\rho\tau}) + e^{-\rho\tau}\frac{d}{dt}(e^{\rho\tau})\right\} =$$

$$-\frac{i}{2}(A-C)\,\sigma[\text{rot.}\,B] - \frac{i}{2}\,\frac{A}{A+C}\,\sigma\,[(p+B)\wedge A_x] + \frac{i}{2} < p+B,\ \text{rot.}\,B > \tau\,\text{th}\,\rho\ ;$$

(1.16) $$\frac{iC}{4}\{e^{\rho\tau}\sigma[\mathrm{rot}.B]e^{-\rho\tau}+e^{-\rho\tau}\sigma[\mathrm{rot}.B]e^{\rho\tau}\}=$$

$$\frac{i}{2}A\,\sigma\,[\mathrm{rot}.B]-\frac{i}{2}<p+B\,,\,\mathrm{rot}.B>\tau\,\mathrm{th}\,\rho\ ;$$

(1.17) $$\frac{C}{4}\{e^{\rho\tau}\sigma[A_x]e^{-\rho\tau}-e^{-\rho\tau}\sigma[A_x]e^{\rho\tau}\}=$$

$$\frac{i}{2}\sigma[(p+B)\wedge A_x].$$

<u>Note</u> 1.3. - Les relations de Pauli [§ 1, (1.7)] s'écrivent :

(1.18) $$(\forall x, y\in E^3)\ \sigma[x]\sigma[y]=<x,y>+i\sigma[x\wedge y]\ .$$

D'où, en particulier :

(1.19) $$\sigma[x]\sigma[y]+\sigma[y]\sigma[x]=2<x,y>;$$

(1.20) $$\sigma[x]\sigma[y]-\sigma[y]\sigma[x]=2i\sigma[x\wedge y]\ .$$

<u>Preuve de (</u>1.15) . - Puisque $\tau^2=1$ et que ρ est à valeurs dans R :

$$e^{\pm\rho\tau}=\mathrm{ch}\,\rho\pm\tau\,\mathrm{sh}\,\rho\ ;$$

donc :

$$e^{\mp\rho\tau}\frac{d}{dt}(e^{\pm\rho\tau})=e^{\mp\rho\tau}[\frac{d\rho}{dt}\mathrm{sh}\,\rho\pm\tau\frac{d\rho}{dt}\mathrm{ch}\,\rho\pm\frac{d\tau}{dt}\ \mathrm{sh}\,\rho]$$

$$=\pm\tau\frac{d\rho}{dt}\pm e^{\mp\rho\tau}\frac{d\tau}{dt}\ \mathrm{sh}\,\rho\ ;$$

d'où :

(1.21) $$\tfrac{1}{2}[e^{\rho\tau}\frac{d}{dt}(e^{-\rho\tau})+e^{-\rho\tau}\frac{d}{dt}(e^{\rho\tau})]=-\tau\frac{d\tau}{dt}\mathrm{sh}^2\rho\ .$$

Pour calculer $\tau\frac{d\tau}{dt}$, dérivons la définition (1.10) de τ :

$$C\frac{d\tau}{dt}\mathrm{sh}\,2\rho+2\,C\,\tau\frac{d\rho}{dt}\mathrm{ch}\,2\rho=\sigma\,[\frac{d}{dt}(p+B)];$$

d'où, vu (1.9) et (1.10) :

$$C^2 \tau \frac{d\tau}{dt} \operatorname{sh}^2 2\rho = -\tfrac{1}{2} \frac{dA^2}{dt} + \sigma[p+B]\sigma\left[\frac{d}{dt}(p+B)\right];$$

donc, vu (1.18) et vu que $A^2 = C^2 + |p+B|^2$ sur W :

(1.22) $$C^2 \tau \frac{d\tau}{dt} \operatorname{sh}^2 2\rho = i\sigma\left[(p+B) \wedge \frac{d}{dt}(p+B)\right].$$

Vu la définition de $\frac{d}{dt}$, chap. II, § 3, (3.10) :

$$\frac{dx}{dt} = H_p(x,p) \quad , \quad \frac{dp}{dt} = -H_x(x,p) \; ;$$

d'où, par des calculs aisés :

$$\frac{d}{dt}(p+B) = -(p+B) \wedge \text{rot.}\, B + A A_x ,$$

$$(p+B) \wedge \frac{d}{dt}(p+B) = |p+B|^2 \text{rot.}\, B - \langle p+B, \text{rot.}\, B\rangle (p+B) + A(p+B) \wedge A_x ;$$

puisque

$$2C \operatorname{ch}^2 \rho = C[\operatorname{ch} 2\rho + 1] = A + C , \quad |p+B|^2 = A^2 - C^2 ,$$

(1.22) s'écrit donc, vu (1.10)

$$2C\tau \frac{d\tau}{dt} \operatorname{sh}^2 \rho = i(A-C)\sigma[\text{rot.}\, B] - i\langle p+B, \text{rot.}\, B\rangle \tau \operatorname{th} \rho + i\frac{A}{A+C}\sigma[(p+B) \wedge A_x];$$

d'où (1.15), vu (1.21) .

Preuve de (1.16) et (1.17) . - Soit $y \in E^3$;

(1.23) $$e^{\pm \rho\tau}\sigma[y]e^{\mp\rho\tau} =$$

$$\sigma[y]\operatorname{ch}^2\rho \pm \tfrac{1}{2}\{\tau\sigma[y] - \sigma[y]\tau\}\operatorname{sh} 2\rho - \tau\sigma[y]\tau \operatorname{sh}^2 \rho \; ;$$

or, vu la définition (1.10) de τ et la formule de commutation (1.20) :

(1.24) $$\frac{C}{2}\{\tau\sigma[y] - \sigma[y]\tau\}\operatorname{sh} 2\rho = i\sigma[(p+B) \wedge y];$$

vu (1.10 et (1.19) :

$$\tau\sigma[y] = \frac{2}{C \operatorname{sh} 2\rho}\langle p+B, y\rangle - \sigma[y]\tau \; ;$$

donc

$$\tau\, \sigma[y]\, \tau = \frac{2}{C\, \mathrm{sh}\, 2\rho} < p+B\, , y > \tau - \sigma\, [y]\ ; \tag{1.25}$$

vu (1.24) et (1.25) , (1.23) s'écrit :

$$C\, e^{\pm \rho\tau}\, \sigma[y]\, e^{\mp\rho\tau} = A\,\sigma[y] - < p+B\, , y > \tau\, \mathrm{th}\, \rho \pm i\,\sigma[\,(p+B)\wedge y].$$

d'où les deux formules :

$$\frac{C}{2}\{ e^{\rho\tau}\sigma\,[y]\, e^{-\rho\tau} + e^{-\rho\tau}\sigma\,[y]\, e^{\rho\tau}\} = A\,\sigma[y] - < p+B\, , y > \tau\ \mathrm{th}\ \rho\ ,$$

$$\frac{C}{2}\{ e^{\rho\tau}\sigma\,[y]\, e^{-\rho\tau} - e^{-\rho\tau}\sigma\,[y]\, e^{\rho\tau}\} = i\,\sigma[\ (p+B)\ \wedge y\ ]\ ,$$

qui prouvent respectivement (1.16) et (1.17) .

2. L'EQUATION DE DIRAC REDUITE, POUR L'ATOME A UN ELECTRON, DANS UN CHAMP MAGNETIQUE CONSTANT. - Choisissons A , B et C tels que la fonction H définie par $(1.4)_1$ soit l'hamiltonien de l'électron relativiste, placé dans un champ magnétique constant : H doit être, au facteur μ près, la fonction définie par les formules (4.15) et (4.18) du chap. III, § 1 ; donc :

A est fonction de R ; la fonction $R \mapsto R\, A\,(R)$ est affine ;

$$B = \tfrac{1}{2}\,(-\, b\, x_2\, ,\, b\, x_1\, ,\, o),\quad \text{où}\quad b \in R\ .$$

Dans l'expression (1.4) de H, négligeons B^2 , comme le fait (4.20) au chap. III, § 1 ; dans l'expression (1.14) de J, négligeons de même

le terme $\frac{i}{2}\ \frac{1}{A+C}\ \sigma\,[B \wedge A_x]$ par rapport à $\frac{i}{2}\ \sigma\,[\ \frac{\partial}{\partial x}\ \wedge B\,]$,

car, sur V, $\frac{x\ A_x}{A+C}$ sera négligeable par rapport à 1 ; les expressions (1.4) et (1.14) de H et J se réduisent donc à :

$$H\,(x\, ,\, p) = \tfrac{1}{2}\,[P^2 + b\, M + C^2 - A^2\,(R)\ ]\ , \tag{2.1}$$

où : b et $C \in R$; $R \mapsto R\, A\,(R)$ est affine ;

(2.2) $$J\,(x\,,p) = \frac{i}{2}\,b\,\sigma_3 - \frac{i}{2}\,\frac{A_R}{R\,(A+C)}\,\sigma\,[x \wedge p].$$

H et J étant ainsi choisis, la matrice d'opérateurs lagrangiens associée à

$$H + \frac{1}{\nu}\,J$$

sera notée a_r et nommée « <u>opérateur de Dirac réduit</u> ».

<u>Note</u> 2 . - H, défini par (2.1), s'identifie donc, au facteur μ près, à la fonction définie par la formule (4.20) du chap. III, § 1 ; d'où :

$$A = \frac{1}{c}\,(E + \frac{\epsilon^2 Z}{R})\,,\quad b = \frac{\epsilon \mathcal{H}}{c}\,,\quad C = \mu\,c\,,$$

où : c est la vitesse de la lumière ;

μ et ϵ sont la masse et la charge de l'électron, Z le nombre atomique du noyau ;

E est le niveau d'énergie de l'atome ; il est voisin de $\mu\,c^2$;

$\mathcal{H}$ est l'intensité du champ magnétique.

<u>Nous substituons à l'étude de l'équation de Dirac celle du système</u> :

(2.3) $$a_r\,U = (a_{L^2} - L_o^2 - \frac{2\,i}{\nu}\,L_o\,\ell')\,U = (a_M - M_o - \frac{i}{\nu}\,m' + \frac{i}{2\nu}\,\sigma_3)\,U = 0\,,$$

<u>où le vecteur</u> U <u>a deux composantes, qui sont des fonctions lagrangiennes définies sur une variété lagrangienne</u> COMPACTE V <u>de</u> $E^3 \oplus E^3$, et où ℓ' et m' sont réels et de carrés négligeables.

Le théorème 2 du § 1 s'applique à ce système (2.3), au moyen des deux lemmes suivants, qui l'explicitent.

LEMME 2.1. - Une valeur approchée de la fonction ϵ, définie au § 1 par $(2.4)_3$ est :

(2.4) $$\epsilon\,[L_o\,,M_o] = \tfrac{1}{2}\,\sqrt{(1+N_L)^2 + 2\,\frac{M_o}{L_o}\,(1+N_L)\,N_M + N_M^2}\,,$$

où $$N_L = N_L\,[L_o\,,M_o]\,,\quad N_M = N_M\,[L_o\,,M_o]\,.$$

<u>Preuve</u> . - Explicitons les valeurs de f_o et g_o, définies au § 1 par $(2.4)_1$ et $(2.4)_2$. Vu (2.1) :

(2.5) $$H[L, M, Q, R] = \frac{L^2+Q^2}{2R^2} + \frac{b}{2}M + \tfrac{1}{2}C^2 - \tfrac{1}{2}A^2(R)\ ;$$

donc :

$$H_L = \frac{L}{R^2}\ ,\ H_M = \frac{b}{2}\ ;$$

or vu chap. III, § 2, (2.3) :

$$\lambda_t = -H_L\ ,\ \mu_t = -H_M\ ;$$

vu chap. III, § 2, (1.5), on a, en écrivant Γ pour $\Gamma[L_o, M_o]$:

$$\int_\Gamma \lambda_t\, dt = \Delta_t\, \lambda = 2\pi N_L\ ,\ \int_\Gamma \mu_t\, dt = \Delta_t\, \mu = 2\pi N_M\ ;$$

donc :

(2.6) $$\int_\Gamma \frac{L_o}{R^2}\, dt = -2\pi N_L\ ,\ \int_\Gamma \frac{b}{2}\, dt = -2\pi N_M\ .$$

Cette dernière formule et la formule $(2.4)_1$ du § 1, où $f = b/2$, vu le choix (2.2) de J, donnent :

(2.7) $$f_o = -\pi N_M\ .$$

Vu ce choix de J et au § 1 la définition (2.4) de g_o :

(2.8) $$g_o = -\frac{L_o}{2}\int_\Gamma \frac{A_R}{R(A+C)}\, dt\ ;$$

or vu chap. III, § 1, (2.14) et vu (2.5), on a sur Γ :

(2.9) $$dt = \frac{dR}{R H_Q} > 0\ ,\ H_Q = \frac{Q}{R^2}\ ;\ \text{donc : } dt = \frac{R\, dR}{Q} > 0\ ;$$

les relations (2.8) et $(2.6)_1$ s'explicitent donc comme suit :

(2.10) $$g_o = -\tfrac{1}{2}\int_\Gamma \frac{L_o}{Q}\,\frac{A_R\, dR}{A+C}\ ;\ 2\pi N_L = -\int_\Gamma \frac{L_o}{Q}\,\frac{dR}{R}\ .$$

Calculons une valeur approchée de g_o : sa valeur pour $b = 0$. Vu (2.5), l'équation de Γ est alors

(2.11) $\Gamma : Q^2 = A'(R)\,A''(R) - L_\rho^2$, où $A'(R) = RA(R) + CR$, $A''(R) = RA(R) - CR$;

A' et A" sont des fonctions <u>affines</u> ; vu la note 2 : A' croît ; $A'(R) > 0$ pour $R > 0$; d'où, par un calcul de résidu facile :

(2.12) $$\int_\Gamma \frac{L_o}{Q}\,\frac{A'_R}{A'}\,dR = 2\pi ;$$

or, vu $(2.11)_2$:

$$\frac{A'_R}{A'} = \frac{1}{R} + \frac{A_R}{A + C} ;$$

les relations, (2.10) et (2.12) prouvent donc que

(2.13) $$g_o = -\pi\,(1 + N_L) .$$

Les formules (2.7), (2.13) et, au § 1, $(2.4)_3$ prouvent le lemme.

Les hypothèses faites au § 1, n° 2, y compris celles de l'exemple 2 du § 1, sont vérifiées, vu le :

LEMME 2.2. - Les valeurs des grandeurs physiques définissant A , B et C (Note 2) sont telles, que pour les niveaux d'énergie E qu'emploiera le n° 3 :

$$f_o = -\pi N_M , \; g_o = -\pi(1 + N_L) , \; N_{L^2} , \; N_{LM} , \; N_{M^2}$$

sont petits par rapport à 1 .

<u>Preuve</u>. - L'expression de $N[.\,,\,.]$ est donnée au chap. III, § 1 par (4.8), où A_o, B_o et C_o sont définis par l'identification des formules (4.6) et (4.20) de ce chap. III, § 1 :

(2.14) $$\frac{1}{\hbar} N[L_o , M_o] = \alpha Z \left[\frac{\mu c^2(\mu c^2 + 2\beta\mathcal{H} M_o/\hbar)}{E^2} - 1\right]^{-\frac{1}{2}} - \left[\left(\frac{L_o}{\hbar}\right)^2 - \alpha^2 Z^2\right]^{\frac{1}{2}} ,$$

où : Z, c, μ, ϵ, E et $\mathcal{H}$ sont les grandeurs physiques définies par la note 2,

(2.15) $\alpha = \dfrac{\epsilon^2}{\hbar c} \simeq \dfrac{1}{137}$ est la « constante de structure fine », sans dimension ;

(2.16) $\beta = \dfrac{\epsilon\hbar}{2\mu c}$ est le « magnéton de Bohr » .

Le n° 3 choisira :

$$0 < \frac{\mu c^2}{E} - 1 \simeq \frac{\alpha^2 Z^2}{2n^2}$$ ($\simeq$: de l'ordre de grandeur de ; n entier)

l'énergie magnétique $\beta \mathcal{H}$ très petite par rapport à μc^2 ;

$2 M_o / \hbar$ entier, ne prenant pas de grandes valeurs ; $\frac{L_o}{\hbar} > \frac{1}{2}$.

D'où le lemme.

3. LES NIVEAUX D'ENERGIE . - Notations . - Les formules (4.23) et (4.25) du chap. III, § 1 ont déjà défini la fonction F valant :

$$F(n, k) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha Z}{n - k + \sqrt{k^2 - \alpha^2 Z^2}}\right)^2}} ; \tag{3.1}$$

notons le signe de ses dérivées :

$$F_n > 0 , F_k > 0 .$$

F permet de donner à la relation :

$$\hbar k + N[\hbar k, \hbar m] = \hbar n , \tag{3.2}$$

où N a l'expression (2.14), la forme :

$$E^2 = \mu c^2 [\mu c^2 + 2 \beta \mathcal{H} m] F^2 (n, k) ,$$

c'est-a-dire, au degré d'approximation utilisé ici :

$$E = \mu c^2 F(n, k) + \beta \mathcal{H} m ; \tag{3.3}$$

dans ces formules α est la constante de structure fine (2.15) et β le magnéton de Bohr (2.16)

THEOREME 3 . - Les niveaux d'énergie E pour lesquels le système (2.3) (où ℓ' et m' sont réels et de carrés négligeables) possède des solutions lagrangiennes ADMISSIBLES (§ 1, définition 2), sur une variété lagrangienne COMPACTE, sont définis par les quadruplets de nombres quantiques

$$j = \ell \pm \tfrac{1}{2} , m , n \tag{3.4}$$

tels que :

$$\ell , m - \tfrac{1}{2} , n \text{ sont entiers ;} \tag{3.5}$$

$$|m| \leq j , 0 \leq \ell < n . \tag{3.6}$$

<u>A des quantités négligeables près,</u> E <u>s'exprime comme suit, en fonction de</u>

(3.7) $$k = j + \tfrac{1}{2}\ ,\ m\ ,\ n\ :$$

(3.8) $$E = \mu\, c^2\, F\,(n\,,k) \pm \frac{\mu\, c^2}{2}\left[\sqrt{F_k^2 + \frac{4\,m}{2\,\ell+1}\,F_k\,\frac{\beta\mathcal{H}}{\mu\, c^2} + \frac{\beta^2\mathcal{H}^2}{\mu^2\, c^4}} - F_k\right] + \beta\mathcal{H}\, m.$$

<u>Le signe</u> $\pm$ <u>est le même dans</u> (3.4) <u>et</u> (3.8) .

<u>Note</u> 3.1. - Pour $\mathcal{H} = 0$, puisque $F_k > 0$, (3.8) se réduit à

(3.9) $$E = \mu\, c^2\, F\,(n\,,k)\ .$$

<u>Preuve</u>. - Vu le théorème 2 du § 1, les niveaux d'énergie E tels que le système (2.3) ait des solutions définies sur des variétés lagrangiennes compactes sont ceux qui vérifient la condition (2.5) du § 1 ; vu la valeur approchée que le lemme 2.1 donne de $\epsilon\,[L_o\,,M_o]$, ces valeurs de E sont approximativement celles qui vérifient la condition :

$$\hslash\,(\ell + \tfrac{1}{2}) + N\,[\hslash\,(\ell + \tfrac{1}{2})\ ,\ \hslash\, m\,] =$$

(3.10) $$= \hslash\, n \pm \frac{\hslash}{2}\sqrt{(1+N_L)^2 + \frac{4\,m}{2\,\ell+1}\,(1+N_L)\,N_M + N_M^2}\ ,$$

$|m| \leq \ell + \frac{1}{2}$, $\ell < n$; ℓ , $m - \frac{1}{2}$, n entiers ; $1 + N_L$ et N_M petits .

Vu l'équivalence de (3.2) et (3.3), une approximation grossière de E est donc :

(3.11) $$E \simeq \mu\, c^2\, F\,(n\,,\ell + \tfrac{1}{2}) \simeq \mu\, c^2\left[1 - \frac{\alpha^2 Z^2}{2n^2}\right]$$

ce qui suffit à justifier l'emploi du lemme 2.2 et à déduire de (2.14) que

$$1 + N_L < 0\ ;$$

Vu (2.14), $N_M = 0$ pour $\mathcal{H} = 0$; donc $(3.10)_1$ s'écrit, pour $\mathcal{H} = 0$, vu que $k = \ell + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$:

$$\hslash\, k + N\,[\,\hslash k\ ,\ \hslash m] = \hslash n$$

et pour $\mathcal{H}$ quelconque :

$$(3.12) \qquad \not{h}\, k + N\, [\not{h} k, \not{h} m] = \not{h}\, n \pm \frac{\not{h}}{2}\, [\sqrt{(1+N_L)^2 + \frac{4m}{2\ell+1}(1+N_L)N_M + N_M^2} + 1 + N_L].$$

Vu l'exemple 2 du § 1 et le lemme 2.2, la condition que des solutions <u>admissibles</u> du système (2.3) correspondent à un choix de ℓ, m, n et E vérifiant (3.12) est que

$$|m| \leq \ell \pm \tfrac{1}{2},$$

c'est-à-dire qu'on ait (3.6) et (3.4), le signe $\pm$ de (3.4) et (3.12) étant le même.

Puisque (3.2) équivaut à (3.3), d'une part (3.12) s'écrit :

$$(3.13) \qquad E = \mu\, c^2\, F(n \pm \tfrac{1}{2}[\sqrt{(1+N_L)^2 + \frac{4m}{2\ell+1}(1+N_L)N_M + N_M^2} + 1 + N_L], k) + \beta \mathscr{H} m\, ;$$

d'autre part les deux relations suivantes sont équivalentes $(\forall\, dk, dm, dn)$:

$$(1+N_L)\, dk + N_M\, dm = dn\,, \quad \mu c^2 (F_n\, dn + F_k\, dk) + \beta \mathscr{H}\, dm = 0\,.$$

Cette équivalence signifie que :

$$\mu c^2 F_n = -\frac{\mu c^2 F_k}{1+N_L} = -\frac{\beta \mathscr{H}}{N_M}\,;$$

donc, puisque $F_n > 0$:

$$[\sqrt{(1+N_L)^2 + \frac{4m}{2\ell+1}(1+N_L)N_M + N_M^2} + 1 + N_L]\, F_n =$$

$$\sqrt{F_k^2 + \frac{4m}{2\ell+1} F_k \frac{\beta \mathscr{H}}{\mu c^2} + \frac{\beta^2 \mathscr{H}^2}{\mu^2 c^4}} - F_k\,;$$

(3.13) équivaut donc à (3.8) .

<u>Note</u> 3.2. - Les niveaux d'énergie qu'obtient le théorème 3 sont exactement ceux qu'obtient la théorie classique de l'atome de Dirac : voir par exemple Bethe et Salpter [2] ; pour $\mathscr{H} = 0$, leur formule (14.29), p. 68, s'identifie à notre formule (3.9) et, pour $\mathscr{H} \neq 0$, leurs formules (46.12), (46.13), (46.15), p. 211, s'identifient à notre formule (3.8), leurs notations correspondant comme suit aux nôtres :

Bethe -Salpeter : $E_o = m c^2$; E_+ ; E_- ;

Note 2 et n° 3 : μc^2 ; $\mu c^2 F(n, \ell+1)$; $\mu c^2 F(n, \ell)$;

B. - S. : $\frac{1}{2}(E_+ + E_-)$; $\Delta E = E_+ - E_-$; μ_o ; $\xi = \frac{\mathcal{H}\mu_o}{\Delta E}$;

: $\mu c^2 F(n, \ell+\frac{1}{2})$; $\mu c^2 F_k$; β ; $\frac{\beta\mathcal{H}}{\mu c^2 F_k}$;

B. - S : $E' = \Delta E \left[\xi m \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+\xi\frac{4m}{2\ell+1} + \xi^2}\right]$.

: $\beta\mathcal{H} m \pm \frac{\mu c^2}{2}\sqrt{F_k^2 + \frac{4m}{2\ell+1} F_k \frac{\beta\mathcal{H}}{\mu c^2} + \frac{\beta^2\mathcal{H}^2}{\mu^2 c^4}}$.

Note 3.3. - Quand $\beta\mathcal{H}$ est petit par rapport à $\mu c^2 F_k$, la formule (3.8) s'écrit évidemment :

$$E = \mu c^2 F(n, k) + \beta\mathcal{H} g m, \quad \text{où} \quad g = \frac{j+1/2}{\ell+1/2}$$

est le « facteur de Landé » : cf. Bethe - Salpeter [2], (46.4) et (46.6), p. 209 .

4. LA PROBABILITE DE PRESENCE DE L'ELECTRON. - Rappelons que

$$x \in X, \ p \in X^*,$$

X et son dual X^* étant l'espace euclidien E^3 ; x est la position, p est la quantité de mouvement de l'électron. Notons, avec les conventions de la note 2 :

$$R_o = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$$

la longueur appelée, en première théorie quantique, « rayon de l'atome de Bohr » ; Z étant le nombre atomique du noyau, notons :

$$x' = \frac{Zx}{R_o}\ ,\ R' = \frac{ZR}{R_o}\ .$$

THEOREME 4 . - La position x de l'électron de nombres quantiques $(j = \ell \pm \frac{1}{2}, \ell, m, n)$ appartient à la projection V_X sur X de $V[L_o, M_o]$; V_X est la partie de X comprise entre deux sphères et extérieure à un cône de révolution autour du champ magnétique ; le centre de ces sphères et le sommet de ce cône coïncident avec le noyau de l'atome.

Convenons que, sur $V[L_o, M_o] \subset X \oplus X^*$, la probalité de présence de l'électron est proportionnelle à la mesure invariante η [Cf. Conclusion de l'Introduction au chap. III] ; alors sur V_X , la probabilité de présence de l'électron est approximativement :

$$(4.1)\qquad \frac{1}{2\pi^3}\ \frac{\ell+1/2}{n^2}\ \frac{d^3x'}{\sqrt{-R'^2+2n^2R'-(\ell+1/2)^2n^2}\ \sqrt{(\ell+1/2)^2(x_1'^2+x_2'^2)-m^2R'^2}}$$

Une définition approchée de V_X est celle-ci : V_X est la partie de X où les radicaux ci-dessus sont tous deux réels.

Note 4.1. - Si $m = \ell + 1/2$, alors : V_X est le disque où :

$$x_3 = 0\ ;\ R'^2 - 2n^2R' + (\ell+1/2)^2n^2 \leqq 0\ ;$$

la probabilité de présence de l'électron sur ce disque est :

$$\frac{1}{2\pi^2}\ \frac{1}{n^2}\ \frac{d^2x'}{\sqrt{-R'^2+2n^2R'-(\ell+1/2)^2n^2}}\ .$$

Preuve. - Sur $V[L_o, M_o]$, la probabilité de présence de l'électron est, par définition :

$$\frac{1}{4\pi^2}\Big[\int_\Gamma dt\Big]^{-1} dt\wedge d\Psi\wedge d\Phi,\ \text{puisque}\quad \eta = dt\wedge d\Psi\wedge d\Phi.$$

La projection V_X sur X de $V[L_o, M_o]$ est, vu chap. III, § 1, (1.5), (1.11), $(1.12)_1$, l'ensemble des points x de X en lesquels :

$$(4.2)\qquad \left|\frac{x_3}{R}\right| \leqq \sin\Theta\ ,\quad \text{où } \cos\Theta = \frac{M_o}{L_o}\ ;$$

l'équation du second degré en Q

(4.3) $$H[L_o, M_o, Q, R] = 0$$
a ses racines réelles

V_X est donc bien la partie de X comprise entre deux sphères et extérieure à un cône de révolution, dont les centres et le sommet sont en 0.

Les formules (1.5), (1.6) et (1.12) du chap. III, § 1 montrent que tout point x intérieur à V_X est la projection de 4 points (t, Ψ, Φ) de $V[L_o, M_o]$. Vu chap. III, § 1, (1.16), (3.6) et vu (2.9) :

$$d^3x = -QR\sin\Psi \sin\Theta \; dt \wedge d\Psi \wedge d\Phi, \quad dt = \frac{R\,dR}{Q} > 0,$$

la donnée de x définit $|Q|$. Sur V_X, la probabilité de présence de l'électron est donc :

(4.4) $$\frac{1}{\pi^2}\left[\int_\Gamma \frac{R\,dR}{Q}\right]^{-1} \frac{d^3x}{|Q|\,R\,|\sin\Psi|\,\sin\Theta}$$

Vu chap. III, § 1, $(1.12)_1$:

$$x_3 = R\cos\Psi\sin\Theta ;$$

donc, vu $(4.2)_2$:

(4.5) $$R\,|\sin\Psi|\,\sin\Theta = \frac{1}{L_o}\left[L_o^2\,(x_1^2 + x_2^2) - M_o^2\,R^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \text{où} \quad \frac{M_o}{L_o} \simeq \frac{m}{\ell + 1/2}.$$

La définition de Q par l'équation (4.3) donne, vu (2.1) et la note 2, en négligeant $\alpha^2 Z^2$ par rapport à 1 (α : constante de structure fine) et en donnant à E sa valeur approchée (3.11) :

(4.6) $$Q \simeq \frac{\not{h}}{n}\left[-R'^2 + 2n^2 R' - (\ell + 1/2)^2 n^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

d'où :

(4.7) $$\int_\Gamma \frac{R\,dR}{Q} \simeq 2\pi \frac{R_o^2}{Z^2} \frac{n^3}{\not{h}}$$

Les formules (4.5), (4.6), (4.7) donnent à la probabilité (4.4) son expression approchée (4.1) .

V_X, étant la partie de X où (4.5) et Q sont réels, est défini approximativement par la condition que les radicaux figurant dans (4.1) sont réels.

<u>Note</u> 4.2. - Le théorème 4 définit <u>une probabilité de présence</u> de l'électron

extrêmement différente de celle que définit la mécanique ondulatoire, mais étroitement apparentée à la première mécanique quantique : l'électron appartient à une partie compacte V_X de X, qui est la réunion des trajectoires employées par cette première mécanique quantique ; sa probabilité de présence se définit aussi simplement que possible à partir des équations caractérisant V_X .

Note 4.3. - Le cas $m = \ell + 1/2$ présente des diffultés (cf : § 1, Note 2 : la notion de solution admissible), qu'éluciderait peut-être la définition de fonctions lagrangiennes sur des variétés de dimensions inférieures à la dimension maximale des variétés lagrangiennes ; cette notion se relierait peut-être à une partie des travaux de A. VOROS [23] - [24] .

CONCLUSION . - Cet article a explicité « la quantification de Maslov » . D'une part, le théorème 3 du chap. IV § 2 prouve qu'elle s'apparente à la mécanique ondulatoire classique, dont elle sauvegarde des résultats essentiels ; d'autre part, le théorème 4 de ce chap. IV, § 2 prouve qu'elle s'apparente à la première théorie quantique, dont elle sauvegarde la simplicité des calculs ; il prouve aussi qu'elle définit une nouvelle probabilité de présence de l'électron, donc une nouvelle expression de l'interaction des électrons d'un atome. Nos chapitres I et II ont montré comment elle substitue à la quantification de Bohr - Sommerfeld une quantification que des motivations mathématiques justifient ; du point de vue de la physique, cette quantification ne se justifierait que si elle parvenait à une évaluation correcte des niveaux d'énergie des atomes à plusieurs électrons ; les calculs sont amorcés dans le cas le plus simple, celui de l'hélium.

BIBLIOGRAPHIE

1. Publications citées.

[1] ARNOLD, V.I. - Une classe caractéristique intervenant dans les conditions de quantification, Anal. fonct. 1, 1-14, 1967, (en russe).

[2] BETHE, H. ; SALPETER, E. - Quantum mechanics of one - and two - electron atoms, Springer, 1957.

[3] BOUSLAEV, V.C. - Quantification et méthode W. K. B., Trudy Mat. Inst. Steklov, 110, 5 - 28, 1970, (en russe).

[4] CARTAN, E. - La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle, traitées par la méthode du repère mobile, Gauthier-Villars, 1937 ; chap. XI.

[5] CARTAN, E. - Leçons sur les invariants intégraux, Hermann, 1922.

[6] CHOQUET-BRUHAT, Y. - Géométrie différentielle et systèmes extérieurs, Dunod, 1968.

[7] DE PARIS, J.C. - Problème de Cauchy à données singulières pour un opérateur différentiel bien décomposable, J. Math. pures et appl., 51, 465 - 488, 1972.

[8] GÅRDING, L. ; KOTAKE, T ; LERAY, J. - Uniformisation et développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy linéaire à données holomorphes : analogie avec la théorie des ondes asymptotiques et approchées, Bull. Soc. math. France, 92, 263 - 361, 1964, Introduction et Chap. 7.

[9] LEFSCHETZ, S. - Algebraic topology, Amer. Math. Soc. Colloqu. Publications, 27, 1942, Chap. III, § 5.

[10] MASLOV, V.P. - Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, M.G.U., Moscou, 1965, (en russe)

[11] MASLOV, V.P. - Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, suivie de deux notes complémentaires d'ARNOLD, V.I. et BOUSLAEV ; traduction LASCOUX, J. et SENEOR, R. ; Dunod, 1972.

[12] MORSE, M. et CAIRNS, S. - Critical point theory in global analysis and differential geometry, Academic Press, 1969 (§ 4, Reduction theorem) .

[13] SEGAL, I.E. - Foundations of the theory of dynamical systems of infinitely many degrees of freedhom (I), Mat. Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 31 , n° 12, 1-39, 1959.

[14] SHALE, D. - Linear symmetries of free boson fields, Trans. Amer. Math. Soc. 103, 149-167, 1962.

[15] SOURIAU , J.M. - Construction explicite de l'indice de Maslov. Applications. 4th International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, Univ. of Nijmegen, 1975

[16] STEENROD, N. - The topology of fiber bundles, Princeton University Press, 1951, § 2, § 15.

[17] WEIL, A. - Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, Acta math., 111, 143-211, 1964.

2. Publications en relation avec le contenu de cet article.

[18] WHITTAKER and WATSON, Modern Analysis, 1945.

[19] CRUMEYROLLE, A. - Revêtements spinoriels du groupe symplectique et indices de Maslov, C.R. Acad. Sc. Paris, 280, 1753-1756, 1977 .

- Une construction directe élémentaire de la classe de Chern, I bid. , 280, 1977.

[20] CRUMEYROLLE , A. - Algèbre de Clifford symplectique, revêtements du groupe symplectique, indices de Maslov et spineurs symplectiques, J. Math. pures et appl. 56, 1967, p. 205-230

[21] DAZORD, P. – La classe de Maslov – Arnold ; L'opérateur canonique de Maslov ; Séminaire de Géométrie ; Université Claude Bernard [Lyon I], 1975 / 76.

– Une interprétation géométrique de la classe de Maslov – Arnold, J. Math. pures et appl., 56, 1977, p. 231 – 250.

[22] MALGRANGE, B. – Intégrales asymptotiques et monodromie, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 7, 405 – 430, 1974.

[23] VOROS, A. – The W.K.B. – Maslov method for non-separable systems, Colloques internationaux du C.N.R.S., n° 237 : Géométrie symplectique et physique mathématique.

[24] – Thèse.

3. Publications ayant annoncé des parties du présent article.

[25] LERAY, J. – Solutions asymptotiques des équations aux dérivées partielles (une adaptation du traité de V.P. Maslov). Convegno internazionale : Metodi valutativa nella fisica matematica ; Accad. Naz. dei Lincei, Roma, 1972.

[26] – Complément à la théorie d'Arnold de l'indice de Maslov. Convegno di Geometrica simplettica et Fisica matematica, Istituto di Alta Matematica, Roma, 1973.

[27] – Solutions asymptotiques et groupe symplectique. Colloque sur les opérateurs de Fourier intégraux et les équations aux dérivées partielles, Nice : Lecture Notes : Springer, 1974.

[28] – Solutions asymptotiques et physique mathématique. Colloques internationaux du C.N.R.S. n° 237. Géométrie symplectique et physique mathématique : Aix-en-Provence, 1974.

[29] – Solutions asymptotiques de l'équation de Dirac, Trends in applications of pure mathematics to mechanics, Conference at the University of Lecce, Pitman, 1975.