Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

PHAM THE LAI

# Noyaux d'Agmon

*Séminaire Jean Leray*, nº 4 (1973-1974), exp. nº 1, p. 1-37
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1973-1974___4_A1_0>

# NOYAUX D'AGMON

par

PHAM THE LAI

## INTRODUCTION

S. AGMON, dans ses travaux [1] [2], a dégagé une classe importante d'opérateurs dans les espaces de Sobolev ; ce sont des opérateurs intégraux avec un noyau continu borné. Ces opérateurs interviennent dans les problèmes elliptiques ; des importantes applications à l'étude du comportement asymptotique des valeurs propres sont faites par S. AGMON.

Il est alors naturel de chercher un cadre général pour l'étude de ces opérateurs ; c'est l'objet du présent travail et nous envisageons uniquement le cas hilbertien. Nous considérons un opérateur $T$ continu dans un espace hilbertien $Y$ tel que l'image de $T$ est "régulier" au sens abstrait : cela signifie exactement que l'image de $T$ est dans un sous-espace hilbertien $X$ de $Y$ tel que $X$ est dense dans $Y$ avec une injection continue.

Dans une première partie nous supposons que $X$ est un sous-espace de fonctions continues et nous étudions la régularité du noyau de $T$ que l'on nomme noyau d'Agmon. Des hypothèses naturelles sur $T$ et $X$ montrent divers types de régularité de ce noyau : continuité, différentiabilité etc... Ensuite, des applications sont faites dans des espaces de Sobolev-Besov qui redonnent les résultats de S. AGMON.

Dans une deuxième partie, on étudie des propriétés d'interpolation de la classe de compacité de l'opérateur $T$, toujours dans le cadre hilbertien abstrait ; ceci pour donner la meilleure estimation possible de la suite des valeurs propres de $T$ ; ces problèmes sont étudiés depuis longtemps, citons essentiellement les travaux récents de I. C. GOHBERG - M. G. KREIN [7], H. TRIEBEL [13].

Nous établissons des résultats qui font intervenir à la fois l'interpolation des espaces de départ et d'arrivée, ainsi que la classe de compacité de l'opérateur. Enfin, des applications sont faites aux espaces de Sobolev-Besov.

## - PREMIÈRE PARTIE -

§ 1. Ce paragraphe est consacré à certains rappels de résultats classiques que l'on peut trouver dans [9] par exemple.

Soient $X$, $Y$ deux espaces de Hilbert avec $X \subset Y$ et $X$ dense dans $Y$ avec une injection continue ; on exprime ce fait en écrivant $X \subsetneq Y$ .

Les produits scalaires dans $X$ et dans $Y$ sont notés respectivement par $(\ ,\ )_X$ et $(\ ,\ )_Y$ ; les normes correspondantes par $|\ |_X$ et $|\ |_Y$ .

Ces données définissent un opérateur $S$ non borné dans $Y$ , de domaine $D(S)$ dense dans $Y$ ; $S$ est surjective et auto-adjoint strictement positif et on a :

$$(u,v)_X = (Su,v)_Y \qquad \forall\, u \in D(S) \text{ et } \forall\, v \in X$$

De plus, en posant $\Lambda = S^{1/2}$ , on a $D(\Lambda) = X$ est le domaine de $\Lambda$ et de la relation précédente, on obtient :

$$(u,v)_X = (\Lambda u,\Lambda v)_Y \qquad \forall\, u,v \in X$$

Pour la commodité des notations qui vont suivre, on désigne, pour $0 \leqq \theta \leqq 1$ , par $[X,Y]_\theta = D(\Lambda^\theta)$ , le domaine de $\Lambda^\theta$ (dans [9], J. L. LIONS et E. MAGENES utilisent une notation différente).

Cet espace intermédiaire sera muni du produit scalaire

$$(1.1) \qquad (u,v)_\theta = (\Lambda^\theta u,\Lambda^\theta v)_Y$$

qui en fait un espace de Hilbert ; $|\ |_\theta$ désigne la norme correspondante.

Avec ces notations, on a donc :

$$[X,Y]_0 = Y \quad \text{et} \quad (\ ,\ )_0 = (\ ,\ )_Y$$
$$[X,Y]_1 = X \quad \text{et} \quad (\ ,\ )_1 = (\ ,\ )_X$$

On a :

$$X \subsetneq [X,Y]_\theta \subsetneq Y \qquad \forall\, \theta \in [0,1]$$

Dans toute la suite, on identifie l'anti-dual $Y'$ de $Y$ à $Y$ , et on note par $[X,Y]_{-\theta}$ l'anti-dual de $[X,Y]_\theta$ ; $[X,Y]_{-\theta}$ est muni du produit scalaire naturel obtenu par transport de structure de $[X,Y]_\theta$ par l'isomorphisme canonique ; on note donc $(\ ,\ )_{-\theta}$ et $|\ |_{-\theta}$ , le produit scalaire et la norme correspondante.

On obtient ainsi une "échelle hilbertienne" :

$$[X,Y]_\theta \qquad \forall\, \theta \in [-1,1]$$

Grâce à l'identification précédente, on a, en désignant par $X'$ l'anti-dual de

X :

$$X \subsetneq [X,Y]_\theta \subsetneq Y \subsetneq [X,Y]_{-\theta} \subsetneq X' \qquad \forall \theta \in [0,1] \tag{1.2}$$

Soit $\theta \in [0,1]$ et soit $I_\theta$ l'adjoint hilbertien de l'injection de $[X,Y]_\theta$ dans $Y$. Alors $I_\theta$ applique $Y$ dans $[X,Y]_\theta$ et $I_\theta$ est isométrique de $Y$, muni de la norme induite $|\ |_{-\theta}$, dans $[X,Y]_\theta$. De plus, puisque $Y$ est dense dans $[X,Y]_{-\theta}$, $I_\theta$ se prolonge, d'après [3], en une application $J_\theta$ isométrique de $[X,Y]_{-\theta}$ sur $[X,Y]_\theta$ qui n'est autre que l'isomorphisme canonique de l'anti-dual de $[X,Y]_\theta$ sur $[X,Y]_\theta$.

On a :

$$I_\theta = \Lambda^{-2\theta} \tag{1.3}$$

On obtient donc les relations :

$$(u,v)_{-\theta} = (J_\theta u, J_\theta v)_\theta \qquad \forall u,v \in [X,Y]_{-\theta} \tag{1.4}$$

$$(\Lambda^\theta u, \Lambda^\theta v)_{-\theta} = (u,v)_Y \qquad \forall u,v \in [X,Y]_\theta \tag{1.5}$$

On prouve (1.5) de la manière suivante :

$$(\Lambda^\theta u, \Lambda^\theta v)_{-\theta} = (J_\theta \Lambda^\theta u, J_\theta \Lambda^\theta v)_\theta = < \Lambda^\theta u, J_\theta \Lambda^\theta v >_{-\theta},$$

en désignant par $< , >_{-\theta,\theta}$ le crochet d'anti-dualité entre $[X,Y]_{-\theta}$ et $[X,Y]_\theta$. Il vient, grâce à l'identification $Y' = Y$ :

$$(\Lambda^\theta u, \Lambda^\theta v)_{-\theta} = (\Lambda^\theta u, J_\theta \Lambda^\theta v)_Y$$

D'où, puisque $J_\theta = I_\theta$ sur $Y$ et vu (1.3) :

$$(\Lambda^\theta u, \Lambda^\theta v)_{-\theta} = (\Lambda^\theta u, \Lambda^{-2\theta} \Lambda^\theta v)_Y = (u,v)_Y$$

Enfin, on aura l'occasion d'utiliser le résultat de "régularité abstraite" suivante, établi par J. LERAY et P. D. LAX :

PROPOSITION : <u>Soit</u> $v \in Y$ <u>tel qu'il existe</u> $\theta \in [0,1]$ <u>et tel que</u> :

$$\sup_{u \in Y} \frac{|(u,v)_Y|}{|u|_{-\theta}} < +\infty$$

<u>Alors</u> $v \in [X,Y]_\theta$ <u>et l'on a</u> :

$$|v|_\theta = \sup_{u \in Y} \frac{|(u,v)_Y|}{|u|_{-\theta}}$$

§ 2. Suite à l'introduction, on considère dans ce paragraphe un couple hilbertien $(X,Y)$ tel que $X \subsetneq Y$. D'autre part, soit $T$ un opérateur continu de $Y$ dans $Y$ tel que l'image $R(T) \subset X$.

$\|T\|_0$ désignera la norme de $T$ de $Y$ dans $Y$.

Puisque $R(T) \subset X$, il est facile de vérifier que $T$ est à graphe fermé de $Y$ dans $X$ et donc continu de $Y$ dans $X$ en vertu du théorème de Banach.

$\|T\|_1$ désignera la norme de $T$ de $Y$ dans $X$.

$T^*$ désignera l'adjoint hilbertien de $T$, considéré comme opérateur de $Y$ dans $Y$ et si $R(T^*)$ est aussi dans $X$, on aura les notations correspondantes $\|T^*\|_0$ et $\|T^*\|_1$.

On a la :

PROPOSITION 2.1 : <u>Soit</u> $T$ <u>un opérateur continu de</u> $Y$ <u>dans</u> $Y$ <u>tel que</u> $R(T) \subset X$ <u>et</u> $R(T^*) \subset X$. <u>Alors, pour</u> $\theta \in [0,1]$, <u>on a</u> :

(2.1) $$|Tf|_{1-\theta} \leq \|T\|_1^{1-\theta} \|T^*\|_1^{\theta} |f|_{-\theta} \qquad \forall f \in Y$$

<u>Preuve</u> : Soit $\Lambda$ l'opérateur du §1 et soient $u,v \in X$.

Considérons la fonction d'une variable complexe :

$$F(z) = (T\Lambda^z u, \Lambda^{1-\bar{z}} v)_Y$$

En utilisant la décomposition spectrale de $\Lambda$, on vérifie que $F$ est holomorphe sur $0 < \mathrm{Re}z < 1$ et continue, bornée sur $0 \leq \mathrm{Re}z \leq 1$. On va utiliser le théorème des trois droites sur cette bande.

Pour $\mathrm{Re}z = 0$, on a :

$$F(it) = (T\Lambda^{it}u, \Lambda^{1+it}v)_Y = (\Lambda T^{it}u, \Lambda^{it}v)_Y$$

d'où

$$|F(it)| \leq |\Lambda T\Lambda^{it}u|_Y \, |\Lambda^{it}v|_Y \leq \|T\|_1 \, |u|_Y \, |v|_Y$$

car $\Lambda^{it}$ est unitaire.

Pour $\mathrm{Re}z = 1$, on a :

$$F(1+it) = (T\Lambda^{1+it}u, \Lambda^{it}v)_Y = (\Lambda^{it}u, \Lambda T^*\Lambda^{it}v)_Y$$

d'où :

$$|F(1+it)| \leq \|T^*\|_1 \, |u|_Y \, |v|_Y$$

Le théorème des trois droites donne, pour $\theta \in [0,1]$ :

$$|F(\theta)| \leq \|T\|_1^{1-\theta} \|T^*\|_1^{\theta} |u|_Y \, |v|_Y$$

Il vient de là :

$$\sup_{v \in X} \frac{|(T\Lambda^{\theta} u, \Lambda^{1-\theta} v)_Y|}{|v|_Y} \leq \| T \|_1^{1-\theta} \; \| T^* \|_1^{\theta} \; |u|_Y$$

Le premier membre de cette inégalité est $|\Lambda^{1-\theta} \; T\Lambda^{\theta} u|_Y$ car $X$ est dense dans $Y$ , d'où :

$$|T\Lambda^{\theta} u|_{1-\theta} \leq \| T \|_1^{1-\theta} \; \| T^* \|_1^{\theta} \; |u|_Y \qquad \forall \, u \in X$$

En utilisant (1.5), on a :

$$|T\Lambda^{\theta} u|_{1-\theta} \leq \| T \|_1^{1-\theta} \; \| T^* \|_1^{\theta} \; |\Lambda^{\theta} u|_{-\theta} \qquad \forall \, u \in X$$

Comme $\Lambda^{\theta} X = [X,Y]_{1-\theta}$ qui est dense dans $Y$ , on obtient l'inégalité (2.1) par prolongement par continuité de l'inégalité précédente.

Remarque : On peut prouver d'une autre manière le résultat précédent en utilisant les résultats de [9] [10].

Grâce à l'hypothèse $R(T^*) \subset X$ , on voit sans peine que l'on a :

$$|Tf|_Y \leq \| T^* \|_1 \; |f|_{-1} \qquad \forall \, f \in Y$$

En effet :

$$|Tf|_Y = \sup_{g \in Y} \frac{|(Tf . g)_Y|}{|g|_Y} = \sup_{g \in Y} \frac{|(f, \, T^* g)_Y|}{|g|_Y}$$

Comme $T^* g \in X$ , on a :

$$|(f . T^* g)_Y| \leq |T^* g|_X \; |f|_{-1} \leq \| T^* \|_1 \; |g|_Y \; |f|_{-1}$$

d'où l'inégalité cherché.

Cela prouve que $T$ est prolongeable en un opérateur continu de $X'$ dans $Y$ . Soit alors $\mathcal{T}$ ce prolongement. Alors $\mathcal{T}$ est continu de $X'$ dans $Y$ et de $Y$ dans $X$ , d'où, par interpolation, $\mathcal{T}$ est continu de $[Y,X']_{1-\theta}$ dans $[X,Y]_{1-\theta}$ pour tout $\theta \in [0,1]$.

En utilisant le théorème de dualité de ces auteurs [10], $Y$ étant ici identifié à $Y'$ :

$$[Y,X']_{1-\theta} = [X,Y]_{-\theta}$$

(avec des normes équivalentes), on voit que $\mathcal{T}$ est continu de $[X,Y]_{-\theta}$ dans $[X,Y]_{1-\theta}$ , d'où la proposition avec une précidion moindre car la méthode holomorphe donne une constante multiplicative égale à 1, qui est la meilleure majoration possible pour l'inégalité (2.1).

Nous avons préféré donner une preuve directe, qui suit les idées d'Agmon [2] ; plus loin, la méthode holomorphe s'adapte bien à des situations plus générales.

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et on note par $\mathcal{C}(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

On suppose que le couple hilbertien $(X,Y)$ est tel que

$$[X,Y]_{1/2} \subset \mathcal{C}(\Omega) \tag{2.2}$$

avec une injection $j$ continue.

Soit $x \in \Omega$ ; alors la forme linéaire

$$f \longmapsto Tf(x)$$

est continue sur $Y$ grâce à (2.2) et par conséquent, il existe $K_x \in Y$ tel que :

$$Tf(x) = (f.K_x)_Y \qquad \forall f \in Y \, , \; \forall x \in \Omega \tag{2.3}$$

Grâce à (2.1) appliquée à $\theta = 1/2$ , on a :

$$\sup_{f \in Y} \frac{|(f.Kx)_Y|}{|f|_{-1/2}} < +\infty$$

d'où, en vertu de la proposition du §1 :

$$K_x \in [X,Y]_{1/2}$$

$K_x$ est donc une fonction continue sur $\Omega$ , pour chaque $x \in \Omega$ .

Soit $K$ la fonction définie sur $\Omega \times \Omega$ associée :

$$(x,y) \longmapsto K(x,y) = K_x(y)$$

$\overline{K}$ sera appelé le noyau d'Agmon associé à $T$ .

On s'intéresse à la régularité du noyau d'Agmon.

PROPOSITION 2.2 : <u>Avec les données de la proposition 2.1 et avec (2.2), le noyau d'Agmon est une fonction séparément continue.</u>

<u>Preuve</u> : Il est clair que, pour $x$ fixé, $K$ est continue de la deuxième variable $y$ .

La continuité, pour $y$ fixé, de $K$ pour la première variable va résulter de la considération de $T^*$ .

En effet, $T^*$ vérifie aussi les hypothèses de la proposition 2.1 puisque $R(T^{**}) = R(T) \subset X$ et l'inégalité (2.1) est vraie pour $T^*$ .

Pour $y \in \Omega$, il existe $L_y \in [X,Y]_{1/2}$, donc continue sur $\Omega$ tel que

(2.4) $$T^* g(y) = (g.L_y)_Y \qquad \forall g \in Y$$

et on note par $L$ la fonction des deux variables associée.

En vertu de l'identification $X = Y'$, la relation :

$$(Tf,g)_Y = (f,T^* g)_Y \qquad \forall f,g \in Y$$

s'écrit encore :

$$<f.T^* g>_{-1/2,1/2} = \overline{<g, Tf>}_{-1/2,1/2} \qquad \forall f,g \in Y$$

Si l'on note par $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^*$ les prolongements de $T$ et $T^*$ suivant la remarque qui précède la preuve de la proposition 2.1, on a donc :

(2.5) $$<f,\mathcal{T}^* g>_{-1/2,1/2} = \overline{<g, \mathcal{T}f>}_{-1/2,1/2} \qquad \forall f,g \in [X,Y]_{-1/2}$$

(2.3) et (2.4) s'écrivent :

$$\mathcal{T}f(x) = <f, K_x>_{-1/2,1/2} \qquad \forall f \in [X,Y]_{-1/2}$$

$$\mathcal{T}^* g(y) = <g, L_y>_{-1/2,1/2} \qquad \forall g \in [X,Y]_{-1/2}$$

D'une manière évidente, pour tout $\xi \in \Omega$, la forme anti-linéaire :

$$h \longmapsto \overline{h(\xi)}$$

est continue de $[X,Y]_{1/2}$ dans $\mathbb{C}$, donc il existe $\theta_\xi \in [X,Y]_{-1/2}$ tel que :

$$\overline{h(\xi)} = <\theta_\xi . h>_{-1/2,1/2}$$

Alors, pour $x,y \in \Omega$, on a, en vertu de (2.5) :

$$<\theta_y, \mathcal{T}^*\theta_x>_{-1/2,1/2} = \overline{<\theta_x, \mathcal{T}\theta_y>}_{-1/2,1/2}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\mathcal{T}^*\theta_x(y) = \overline{\mathcal{T}\theta_y(x)}$$

Comme $$\mathcal{T}\theta_y(x) = <\theta_y, K_x>_{-1/2,1/2} = \overline{K(x,y)}$$

$$\mathcal{T}\ \theta_x(y) = <\theta_x, L_y>_{-1/2,1/2} = \overline{L(y,x)}$$

on a :

(2.6) $$K(x,y) = \overline{L(y,x)}$$

Puisque $L$ est continue en $x$ pour $y$ fixé, $K$ est bien séparément continue sur $\Omega \times \Omega$.

En général, $K$ n'est pas nécessairement une fonction continue sur $\Omega \times \Omega$. Voici une condition suffisante de continuité :

THÉORÈME 2.3 : Avec les données de la proposition 2.1 et avec (2.2), supposons que $j$ est compacte de $[X,Y]_{1/2}$ dans $\mathcal{C}(\Omega)$.

Alors, la fonction $x \longmapsto K_x$ de $\Omega$ dans $[X,Y]_{1/2}$ est continue.

Le noyau d'Agmon est une fonction continue de $\Omega \times \Omega$.

Preuve : La continuité de l'application $x \longmapsto K_x$ de $\Omega$ dans $[X,Y]_{1/2}$ entraine la continuité de cette application de $\Omega$ dans $\mathcal{C}(\Omega)$. Alors cette application appartient à $\mathcal{C}(\Omega, \mathcal{C}(\Omega))$ et comme $\Omega$ est localement compact, il résulte d'un théorème de [4] que $K$ est continue pour l'ensemble des deux variables. Il suffit donc de prouver une propriété plus forte : la continuité de $x \longmapsto K_x$ de $\Omega$ dans $[X,Y]_{1/2}$.

Pour cela, soit $\theta \in [X,Y]_{-1/2}$ et considérons la fonction $G_\theta$ définie sur $\Omega$ à valeur dans $\mathbb{C}$ :

$$x \longmapsto G_\theta(x) = \langle \theta, K_x \rangle_{-1/2,1/2}$$

Alors $G_\theta$ est une fonction continue sur $\Omega$ en vertu de ce qui précède. Comme $[X,Y]_{1/2}$ est réflexif, prouver la continuité de $x \longmapsto K_x$ revient à prouver que $\{G_\theta\}$ est un ensemble équicontinue de $\mathcal{C}(\Omega)$ lorsque $\theta$ varie dans la boule unité $b$ de $[X,Y]_{-1/2}$. Or cet ensemble n'est autre que $j\,\mathcal{T}(b)$ qui est relativement compacte dans $\mathcal{C}(\Omega)$ puisque $\mathcal{T}$, le prolongement de $T$, est continue de $[X,Y]_{-1/2}$ dans $[X,Y]_{1/2}$ et que l'injection $j$ est compacte par hypothèse. Elle est même compacte puisque $[X,Y]_{-1/2}$ est réflexif. En vertu du théorème d'Ascoli [4], $j\,\mathcal{T}(b)$ est équicontinue car $\Omega$ est localement compact, d'où le théorème.

Dans la pratique, il arrive fréquemment que $[X,Y]_{1/2}$ soit un sous-espace de $\mathcal{C}_b(\Omega)$, fonctions continues bornées sur $\Omega$. $\mathcal{C}_b(\Omega)$ sera muni de sa norme naturelle. Désignons par $i$ l'injection de $[X,Y]_{1/2}$ dans $\mathcal{C}_b(\Omega)$, par $\|i\|$ sa norme si elle est continue.

Alors on a le :

COROLLAIRE 2.4 : Avec les hypothèses du théorème 2.3, supposons en plus que $[X,Y]_{1/2} \subset \mathcal{C}_b(\Omega)$ et que $i$ l'injection de $[X,Y]_{1/2}$ dans $\mathcal{C}_b(\Omega)$ est continue. Alors le noyau d'Agmon est une fonction continue bornée sur $\Omega \times \Omega$ et on a :

$$\sup_{(x,y)\in\Omega\times\Omega} |K(x,y)| \leq \|i\|^2 \left(\|T\|_1 \, \|T^*\|_1\right)^{1/2} \tag{2.7}$$

Preuve : Il reste à prouver (2.7).

Comme $Y$ est dense dans $[X,Y]_{-1/2}$, on a, pour $x \in \Omega$ :

$$|K_x|_{1/2} = \sup_{f \in Y} \frac{|(f.K_x)_Y|}{|f|_{-1/2}}$$

Comme $(f.K_x)_Y = Tf(x)$, il vient :

$$|(f.K_x)| \leqq \| i \| \ |Tf|_{1/2}$$

En vertu de (2.1), calculé pour $\theta = 1/2$,

$$|(f.K_x)| \leqq \| i \| \ \| T \|_1^{1/2} \ \| T^* \|_1^{1/2} \ |f|_{-1/2}$$

Il vient de là :

$$\sup_{x \in \Omega} |K_x|_{1/2} \leqq \| i \| \ (\| T \|_1 \ \| T^* \|_1)^{1/2} .$$

d'où (2.7) car $|K(x,y)| \leqq \| i \| \ |K_x|_{1/2}$ $\forall y \in \Omega$.

On se demande quelle est la régularité de $K_x$ et du noyau d'Agmon lorsqu'on a en plus :

(2.8) $$[X,Y]_{1/2} \subset \mathcal{C}^m(\Omega) \qquad m \text{ entier} \geqq 1$$

où $\mathcal{C}^m(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continûment différentiables jusqu'à l'ordre $m$ muni de la topologie naturelle de la convergence uniforme sur tout compact de toutes les dérivées d'ordre $m$. On note encore par $j$ l'injection de $[X,Y]_{1/2}$ dans $\mathcal{C}^m(\Omega)$ et on suppose $j$ continue.

Dans ce cas, pour $x \in \Omega$, $K_x \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ et pour $\theta \in [X,Y]_{-1/2}$, la fonction $G_\theta \in \mathcal{C}^m(\Omega)$.

Si $q$ est un multi-indice de dérivation d'ordre $\leqq m$, pour tout $\xi \in \Omega$, la forme antilinéaire :

$$h \longmapsto \overline{D^q h(\xi)}$$

est continue sur $[X,Y]_{1/2}$ et définit un élément $\theta_\xi^q \in [X,Y]_{-1/2}$ tel que :

$$\overline{D^q h(\xi)} = \langle \theta_\xi^q . h \rangle_{-1/2,1/2}$$

Donc, si $p$ et $q$ sont deux multi-indices de dérivation d'ordre $\leqq m$ et pour tout $x,y \in \Omega$, il vient de (2.5) :

$$\langle \theta_y^q . \mathcal{T}^* \theta_x^p \rangle_{-1/2,1/2} = \overline{\langle \theta_x^p , \mathcal{T} \theta_y^q \rangle}_{-1/2,1/2}$$

De cette relation, on a :

$$D_y^q D_x^p L(y,x) = \overline{D_x^p D_y^q K(x,y)}$$

En utilisant (2.6), on a :

$$D_y^q D_x^p K(x,y) = D_x^p D_y^q K(x,y)$$

Ces dérivées existent donc et sont égales pour tout $p$ et $q$ d'ordre $\leq m$. De plus, pour chaque $x$ fixé et pour $p$ d'ordre $\leq m$, la fonction :

$$y \longmapsto D_x^p K(x,y)$$

appartient à $\mathcal{E}^m(\Omega)$.

Il en est de même, pour $y$ fixé et $q$ d'ordre $\leq m$, pour la fonction

$$x \longmapsto D_y^q K(x,y)$$

En effet, $\mathcal{T}\theta_y^q \in [X,Y]_{1/2}$, donc $\mathcal{T}\theta_y^q \in \mathcal{E}^m(\Omega)$ et comme on a :

$$\mathcal{T}\theta_y^q(x) = \langle \theta_y^q , K_x \rangle_{-1/2,1/2} = D_y^q K_x(y) = D_y^q K(x,y)$$

la fonction $x \longmapsto D_y^q K(x,y)$ appartient bien à $\mathcal{E}^m(\Omega)$. L'autre se prouve de même avec $\mathcal{T}^*\theta_x^p$.

On en déduit facilement que les dérivées d'ordre $\leq m$ en $x$ et d'ordre $\leq m$ en $y$ de $K$ existent et sont indépendantes de l'ordre de dérivations.

De ce qui précède, la fonction $(x,y) \longmapsto D_x^p D_y^q K(x,y)$ est séparément continue sur $\Omega \times \Omega$.

Dans quelle condition a-t-on la continuité des dérivées ?

D'après un résultat classique [5], la fonction $x \longmapsto K_x$ appartient à $\mathcal{E}^{m-1}(\Omega, [X,Y]_{1/2})$ car on vérifie facilement que cette fonction appartient à $\mathcal{E}^m(\Omega, [X,Y]_{1/2}$ faible).

Pour atteindre à $\mathcal{E}^m(\Omega, [X,Y]_{1/2})$, une condition suffisante est donnée par la :

PROPOSITION 2.5 : <u>Avec les hypothèses de la proposition 2.1, supposons que l'injection</u> $j$ <u>de (2.8) compacte. Alors la fonction</u>

$$x \longmapsto K_x$$

<u>appartient à</u> $\mathcal{E}^m(\Omega, [X,Y]_{1/2})$.

<u>Le noyau d'Agmon appartient à</u> $\mathcal{E}^{m,m}(\Omega \times \Omega)$, <u>espace des fonctions</u> $f$ <u>sur</u> $\Omega \times \Omega$ <u>telles que</u> $D_x^p D_y^q f(x,y)$ <u>existent et sont continues pour tout</u> $p$ <u>et</u> $q$ <u>d'ordre</u> $\leq m$.

<u>Preuve</u> : Comme dans le théorème 2.3, il suffit de prouver l'assertion plus forte : $x \longmapsto K_x$ appartient à $\mathcal{E}^m(\Omega, [X,Y]_{1/2})$.

Par récurrence, il suffit aussi de la prouver pour $m = 1$.

On a vu que l'application $x \longmapsto K_x$ appartient à $\mathcal{E}^1(\Omega, [X,Y]_{1/2}$ faible).

Soit $\frac{\partial}{\partial x_i} K_x$ une dérivée d'ordre 1.

L'application

$$x \longmapsto \frac{\partial}{\partial x_i} K_x$$

est continue de $\Omega$ dans $[X,Y]_{1/2}$ faible ; on va prouver qu'elle est aussi continue de $\Omega$ dans $[X,Y]_{1/2}$.

Cela revient à prouver que $\{\frac{\partial}{\partial x_i} G_\theta\}$ parcourt un ensemble équicontinu dans $\mathscr{C}(\Omega)$ lorsque $\theta$ parcourt la boule unité $b$ de $[X,Y]_{-1/2}$.

Comme $j\mathcal{T}(b)$ est relativement compact dans $\mathscr{C}^1(\Omega)$, $\frac{\partial}{\partial x_i} j\mathcal{T}(b)$ est relativement compact dans $\mathscr{C}(\Omega)$, d'où la conclusion.

Pour achever la preuve de la proposition, il suffit alors d'utiliser le résultat classique suivant [5] : Si $E$ est un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, $\mathcal{T}$ désignant sa topologie et $\mathcal{T}_\sigma$ la topologie affaiblie et si $x \longmapsto f(x)$ est une application d'un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ dans $E$ telle que $f \in \mathscr{C}^m(\Omega, E_{\mathcal{T}_\sigma})$ et telle que chaque dérivée d'ordre $\leqq m$ est continue de $\Omega$ dans $E_{\mathcal{T}}$, alors $f \in \mathscr{C}^m(\Omega, E_{\mathcal{T}})$.

Remarques :

1) Si l'on suppose en plus que $[X,Y]_{1/2} \subset \mathscr{C}^m_b(\Omega)$ espace des fonctions $\mathscr{C}^m(\Omega)$ bornées ainsi que toutes les dérivées d'ordre $\leqq m$ et si l'on suppose que l'injection est continue, $\mathscr{C}^m_b(\Omega)$ étant muni de sa norme naturelle, on voit facilement que $D^p_x D^q_y K(x,y)$ est continue et bornée sur $\Omega \times \Omega$ pour tout $p$ et $q$ d'ordre $\leqq m$.

2) Il est évident que les résultats concernant $m = 0$ restent valables quand on prend $\Omega$ un espace localement compact arbitraire.

§ 3. Les considérations suivantes sont des conséquences faciles des résultats précédents ; elles sont utiles dans la pratique.

On suppose dans ce paragraphe seulement $X \subset \mathscr{C}(\Omega)$.

Soient alors $T$ et $S$ deux opérateurs continus de $Y$ dans $Y$ tels que $R(T) \subset X$ ainsi que $R(S) \subset X$.

Posons $P = TS^*$.

Alors on a :

$$|Pf|_1 \leqq \|T\|_1 \, \|S\|_1 \, |f|_{-1} \qquad \forall f \in Y \tag{3.1}$$

En effet :

$$|Pf|_1 \leqq \|T\|_1 \, |S^* f|_Y$$

Comme

$$|(S^*f,g)_Y| = |(f,Sg)_Y| \leq \|S\|_1 \; |g|_Y \; |f|_{-1} \qquad \forall g \in Y$$

il vient :

$$|S^*f|_Y = \sup_{g\in Y} \frac{|(S^*f,g)_Y|}{|g|_Y} \leq \|S\|_1 \; |f|_{-1}$$

d'où (3.1)

Il existe donc pour chaque $s \in \Omega$ , $K_x \in X$ tel que

$$Pf(x) = (f.K_x)_Y \qquad \forall f \in Y$$

La fonction de deux variables associée

$$(x,y) \longmapsto K(x,y) = K_x(y)$$

est séparément continue sur $\Omega \times \Omega$ : on le voit comme dans le §2 en considérant $P^* = ST^*$.

De la même manière, si l'injection $X \subset \mathcal{C}(\Omega)$ est compacte, $K$ est une fonction continue sur $\Omega \times \Omega$ , bornée si $X \subset \mathcal{C}_b(\Omega)$ , de classe $\mathcal{C}^{m,m}(\Omega \times \Omega)$ si $X \subset \mathcal{E}^m(\Omega)$ avec une injection compacte.

<u>Remarque</u> : Puisque $R(T) \subset X \subset \mathcal{C}(\Omega)$ , pour tout $x \in \Omega$ , la forme

$$f \longmapsto Tf(x)$$

est linéaire et continue sur $Y$ . Il existe donc $T_x \in Y$ tel que

$$Tf(x) = (f,T_x)_Y \qquad \forall f \quad Y \qquad \forall x \quad \Omega$$

De la même manière, pour $\forall y \in \Omega$ , il existe $S_y \in Y$ tel que

$$Sf(y) = (f,S_y)_Y \qquad \forall f \in Y \qquad \forall y \in \Omega$$

Alors :

$$Pf(x) = TS^*f(x) = (S^*f,T_x)_Y = (f,ST_x)_Y \qquad \forall f \in Y$$

D'où :

$$ST_x = K_x$$

On a donc :

$$K(x,y) = (T_x,S_y)_Y \qquad \forall x,y \in \Omega \times \Omega \tag{3.2}$$

§ 4. On va envisager quelques applications aux espaces de Sobolev-Besov. La plupart des résultats sont dus à S. AGMON [1] [2] dans le cas d'espaces de Sobolev ; on les généralise ici au cas d'espaces de Sobolev-Besov. Les minorations concernant les valeurs propres s'obtiennent ici sans aucune hypothèse sur la résolvante.

Rappelons les définitions usuelles suivantes :

Pour tout $m$ réel $\geqq 0$ , $H^m(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des (classes) de fonctions $u$ telles que

$$(1 + |\xi|^2)^{m/2}\, \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$\hat{u}$ est la transformation de Fourier de $u$ . $H^m(\mathbb{R}^n)$ est muni de sa norme hilbertienne naturelle.

Si $\Omega$ est une partie de $\mathbb{R}^n$ , $H^m(\Omega)$ est l'espace des restrictions à $\Omega$ des fonctions de $H^m(\mathbb{R}^n)$ muni de la norme hilbertienne

$$|u|_{m,\Omega} = \inf |U|_{m,\mathbb{R}^n} \qquad U = u \text{ sur } \Omega$$

On sait que si $\Omega$ est un ouvert très régulier, lorsque $m$ est un entier, $H^m(\Omega)$ est encore l'espace des fonctions qui ont leurs dérivées jusqu'à l'ordre $m$ dans $L^2(\Omega)$ .

D'après [8] , on a l'identité suivante, pour $\theta \in [0,1]$

$$[H^m(\Omega),\, L^2(\Omega)]_\theta = H^{m\theta}(\Omega) \tag{4.1}$$

avec des normes équivalentes.

Pour $m \geqslant 0$ , on note $H^{-m}(\Omega)$ l'anti-dual de $H^m(\Omega)$ , ayant auparavant identifié l'anti-dual de $L^2(\Omega)$ à $L^2(\Omega)$ . $H^{-m}(\Omega)$ est muni de produit scalaire naturel transporté de celui de $H^m(\Omega)$ .

On supposera dans tout ce paragraphe que $\Omega$ est un ouvert très régulier pour avoir les espaces de Sobolev usuels dans le cas $m$ entier $\geqq 0$ .

On utilisera les notations suivantes : Si $T$ est un opérateur continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ , $\| T \|_{0,\Omega}$ désignera sa norme.

Si en plus $R(T) \subset H^m(\Omega)$ , $T$ est continu de $L^2(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$ , $\| T \|_{m,\Omega}$ désignera la norme de $T$ dans ce cas.

Dans toute la suite, $C$ désignera une constante qui ne dépend que de $n$, $m$, $\Omega$ .

On a le :

THÉORÈME 4.1 : Soit $T$ un opérateur continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ d'image $R(T) \subset H^m(\Omega)$ ainsi que $R(T^*) \subset H^m(\Omega)$ avec $m > n$ . Alors :

a) $T$ est un opérateur intégral avec un noyau d'Agmon $K$ continu et borné sur $\Omega \times \Omega$ :

$$Tf = \int_\Omega K(x,y)f(y)dy \qquad f \in L^2(\Omega)$$

avec :

$$\sup_{(x,y)\in\Omega\times\Omega} |K(x,y)| \leq C(\|T\|_{m,\Omega} + \|T^*\|_{m,\Omega})^{n/m} \|T\|_{0,\Omega}^{1-(n/m)} \tag{4.2}$$

b) S'il existe $k$ entier $\geq 1$ tel que $m - n > 2k$ , alors $K$ appartient à $\mathcal{C}_b^{k,k}(\Omega\times\Omega)$ , espace des fonctions $f$ appartenant à $\mathcal{C}^{k,k}(\Omega\times\Omega)$ tel que les dérivées $D_x^p D_y^q f(x,y)$ sont bornées sur $\Omega\times\Omega$ pour tout $p$ et $q$ d'ordre $\leq k$ .

Preuve : a) On considère le couple hilbertien $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ . Utilisant (4.1), on a $[H^m(\Omega), L^2(\Omega)]_{1/2} = H^{m/2}(\Omega)$ avec des normes équivalentes.

Le théorème classique de Sobolev montre (avec modification usuelle sur un ensemble de mesure nulle) que $H^{m/2}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega)$ avec une injection compacte, ainsi que $H^{m/2}(\Omega) \subset \mathcal{C}_b(\Omega)$ avec une injection continue puisque $\frac{m}{2} > \frac{n}{2}$ . Le théorème 2.3 montre alors que $T$ est intégral avec un noyau d'Agmon $K$ continu sur $\Omega \times \Omega$ .

Le corollaire 2.4 prouve ensuite que $K$ est borné sur $\Omega\times\Omega$ et on a la majoration :

$$\sup_{(x,y)\in\Omega\times\Omega} |K(x,y)| \leq C\,(\|T\|_{m,\Omega}\,\|T^*\|_{m,\Omega})^{1/2}$$

De là, on déduit (4.2) par un argument d'homogénéité comme dans [2].

b) Puisque $\frac{m}{2} - k > \frac{n}{2}$ , le théorème de Sobolev montre que $H^{m/2}(\Omega) \subset \mathcal{C}^k(\Omega)$ avec une injection compacte et on applique la proposition 2.5 .

Remarque : Le théorème 2.3 donne en fait une régularité plus forte sur $K$ : pour $x \in \Omega$ fixé, la fonction $K_x : y \longmapsto K(x,y)$ appartient à $H^{m/2}(\Omega)$ et l'application $x \longmapsto K_x$ est continu de $\Omega$ dans $H^{m/2}(\Omega)$ . Même chose pour la deuxième variable.

Le résultat suivant est nouveau et utile lorsque l'on a seulement $m > \frac{n}{2}$ .

THÉORÈME 4.2 : Soient $T$ et $S$ deux opérateurs continus de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ tels que $R(T) \subset H^m(\Omega)$ ainsi que $R(S) \subset H^m(\Omega)$ avec $m > \frac{n}{2}$.

Notons $P = TS^*$. Alors :

a) $P$ est un opérateur intégral avec un noyau d'Agmon $K$ continu et borné sur $\Omega \times \Omega$ :

$$Pf = \int_\Omega K(x,y)f(y)dy \qquad f \in L^2(\Omega)$$

avec :

$$\sup_{(x,y)\in\Omega\times\Omega} |K(x,y)| \leq C(\|T\|_{m,\Omega}\|S\|_{m,\Omega})^{n/2m}(\|T\|_{0,\Omega}\|S\|_{0,\Omega})^{1-(n/2m)} \tag{4.3}$$

b) S'il existe $k$ entier $\geq 1$ tel que $m - \frac{n}{2} > k$, alors $K$ appartient à $\mathcal{C}_b^{k,k}(\Omega \times \Omega)$.

Preuve : a) On applique les considérations du §3 qui montrent que $P$ est intégra avec un noyau d'Agmon continu et borné sur $\Omega \times \Omega$, puisque $m > \frac{n}{2}$. Reste à prouver (4.3).

On a :

$$|Pf|_{0,\Omega} \leq \|T\|_{0,\Omega}\ |S^*f|_{0,\Omega} \qquad \forall f \in L^2(\Omega)$$

Mais :

$$|S^*f|_{0,\Omega} = \sup_{g\in L^2(\Omega)} \frac{|(S^*f,g)_{0,\Omega}|}{|g|_{0,\Omega}} = \sup_{g\in L^2(\Omega)} \frac{|(f,Sg)_{0,\Omega}|}{|g|_{0,\Omega}}$$

Comme : $|(f,Sg)_{0,\Omega}| \leq C|Sg|_{m,\Omega}|f|_{-m,\Omega} \leq C\|S\|_{m,\Omega}|g|_{0,\Omega}|f|_{-m,\Omega}$

il vient :

$$|Pf|_{0,\Omega} \leq C\|T\|_{0,\Omega}\|S\|_{m,\Omega}|f|_{-m,\Omega}$$

De la même manière :

$$|Pf|_{m,\Omega} \leq \|T\|_{m,\Omega}|S^*f|_{0,\Omega}$$

D'où

$$|Pf|_{m,\Omega} \leq C\|T\|_{m,\Omega}\|S\|_{m,\Omega}|f|_{-m,\Omega}$$

L'inégalité classique d'interpolation de Sobolev donne :

$$\sup_{x\in\Omega}|Pf(x)| \leq C|Pf|_{m,\Omega}^{n/2m}\ |Pf|_{0,\Omega}^{1-(n/2m)}$$

D'où :

$$\sup_{x\in\Omega}|Pf(x)| \leq C(\|T\|_{m,\Omega}\|S\|_{m,\Omega})^{n/2m}(\|T\|_{0,\Omega}\|S\|_{m,\Omega})^{1-(n/2m)}|f|_{-m,\Omega} \tag{4.4}$$

Par un calcul analogue, on a aussi :

$$\sup_{x\in\Omega}|Pf(x)| \leq C(\|T\|_{m,\Omega}\|S\|_{0,\Omega})^{n/2m}(\|T\|_{0,\Omega}\|S\|_{0,\Omega})^{1-(n/2m)}|f|_{0,\Omega} \tag{4.5}$$

Soit alors $x \in \Omega$ et $K_x$ la fonction : $y \longmapsto \overline{K(x,y)}$ . On sait que $K_x \in H^m(\Omega)$ et que l'on a :

$$(f,K_x)_{0,\Omega} = Pf(x)$$

D'où, en utilisant (4.4), on a :

$$(4.5) \qquad |K_x|_{m,\Omega} = \sup_{f \in L^2(\Omega)} \frac{|Pf(x)|}{|f|_{-m,\Omega}} \leqq C\| T \|_{m,\Omega}^{n/2m} \| T \|_{0,\Omega}^{1-(n/2m)} \| S \|_{m,\Omega}$$

Par un calcul analogue, on a aussi, en utilisant (4.5) :

$$|K_x|_{0,\Omega} = \sup_{f \in L^2(\Omega)} \frac{|Pf(x)|}{|f|_{0,\Omega}} \leqq C\| T \|_{m,\Omega}^{n/2m} \| T \|_{0,\Omega}^{1-(n/2m)} \| S \|_{0,\Omega}$$

De nouveau, par l'inégalité d'interpolation appliquée à $K_x$ :

$$\sup_{y \in \Omega} |K(x,y)| \leqq C|K_x|_{m,\Omega}^{n/2m} |K_x|_{0,\Omega}^{1-(n/2m)}$$

donne immédiatement (4.3).

b) se démontre comme dans le théorème 4.1 .

Remarque : Le noyau $K$ s'obtient en vertu de (3.2) par :

$$(4.6) \qquad \overline{K(x,y)} = \int_\Omega T_x(\xi)\, \overline{S_y(\xi)}\, d\xi$$

$T_x$ et $S_y$ étant les fonctions $\in L^2(\Omega)$ telles que

$$Tf(x) = (f.T_x)_{0,\Omega} \qquad \text{et} \qquad Sf(y) = (F.S_y)_{0,\Omega}$$

Si $\Omega$ est un ouvert borné et $T$ un opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ d'image $R(T) \subset H^m(\Omega)$ avec $m > 0$ , alors $T$ est opérateur compact de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ .

Dans ce cas, le spectre de $T$ est dénombrable et on désigne par $(\lambda_j)$ la suite des valeurs propres de $T$ , rangée par ordre de module décroissant, et répétée suivant la multiplicité. On sait que si les $(\lambda_j)$ sont infinies, la suite converge vers $0$ . Dans toute la suite, on adoptera cette convention pour les valeurs propres d'un opérateur compact.

Si $T$ est un opérateur de Hilbert Schmidt de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on sait que $T$ est intégral avec un noyau de Hilbert Schmidt $T(x,y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$ :

$$Tf = \int_\Omega T(x,y)f(y)dy$$

Dans ce cas, on désignera par $|||T|||$ la norme de Hilbert Schmidt de $T$ .

Le lemme suivant est bien connu [1] ; nous le prouvons en suivant les méthodes ci-dessus pour la commodité du lecteur et pour les applications qui vont suivre.

LEMME 4.3 : *Supposons* $\Omega$ *borné et* $m > \frac{n}{2}$ . *Soit* $T$ *un opérateur continu de* $L^2(\Omega)$ *dans* $L^2(\Omega)$ *d'image* $R(T) \subset H^m(\Omega)$ .

*Alors* $T$ *est un opérateur de Hilbert Schmidt.*

*Si on note par :*

$$K(x,y) = \int_\Omega T(x,\xi)\,\overline{T(y,\xi)}\,d\xi \qquad x,y \in \Omega \times \Omega \tag{4.7}$$

*où* $T(x,y)$ *est le noyau de Hilbert Schmidt de* $T$ , $K$ *est une fonction continue bornée sur* $\Omega \times \Omega$ .

*De plus :*



$$|||T||| \leq \left(\int_\Omega K(x,x)dx\right)^{1/2} \tag{4.8}$$

$$|||T||| \leq c\| T \|_{m,\Omega}^{n/2m} \ \| T \|_0^{1-(n/2m)} \tag{4.9}$$

*Preuve* : On va utiliser le théorème 4.2 avec $P = TT^*$ .

Comme $\Omega$ est borné, $T$ est compact de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ ; soit $(\lambda_j)$ $j = 1,2,\ldots$ la suite des valeurs propres de $T$.

Alors $P$ est compact auto-adjoint positif, soit $(\mu_j)$ $j = 1,2,\ldots$ la suite des valeurs propres de $P$ . Evidemment $\mu_j \geq 0$ .

$P$ est intégral avec un noyau d'Agmon $K$ continu et borné. Puisque $P$ est auto-adjoint positif, on a :

$$K(x,y) = \overline{K(y,x)}$$
$$K(x,x) \geq 0$$

$\Omega$ étant borné, $K(x,x)$ est intégrable sur $\Omega$ et en vertu de (4.3), on obtient :

$$\int_\Omega K(x,x)dx \leq \gamma\ \mathrm{mes}(\Omega)\ \| T \|_{m,\Omega}^{n/m} \ \| T \|_{0,\Omega}^{2-(n/m)} \tag{4.10}$$

Le théorème de Mercer montre alors que l'on a :

$$\sum_j \mu_j = \int_\Omega K(x,x)dx \ .$$

Donc $P$ est un opérateur nucléaire de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ . On en déduit, par la décomposition polaire de $T^*$ , que $T$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

De plus :

$$|||T||| \leq \left(\sum_j \mu_j\right)^{1/2} \leq \left(\int_\Omega K(x,x)dx\right)^{1/2} . \tag{4.11}$$

Soit $T(x,y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$ , le noyau de Hilbert Schmidt de $T$ ; alors, en vertu de (4.6), appliquée à $T$ et $S = T$ , on a :

$$K(x,y) = \int_\Omega T(x,\xi)\,\overline{T(y,\xi)}\,d\xi$$

Ceci donne (4.7).

Alors (4.10) et (4.11) avec (4.7) donnent (4.8) et (4.9) .

Rappelons maintenant une formule importante des opérateurs nucléaires.

Si $T$ est un opérateur nucléaire de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, alors $\sum_j \lambda_j$ est une série convergente, $(\lambda_j)$ étant la suite des valeurs propres de $T$. Par ailleurs, on sait aussi que pour toute base orthonoramle $(e_i)$ de $L^2(\Omega)$, la série $\sum_i (Te_i, e_i)$ est absolument convergente et sa somme est indépendante de la base $(e_i)$. On la note par $\mathcal{T}r(T)$, c'est la trace de $T$.

Alors, on a le résultat suivant de V. LIDSKI [7] :

$$\mathcal{T}r(T) = \sum_j \lambda_j \tag{4.12}$$

pour tout opérateur nucléaire $T$.

On a alors la :

PROPOSITION 4.4. : <u>Supposons $\Omega$ borné et $m > \frac{n}{2}$. Soient $T$ et $S$ deux opérateurs continus de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ d'images $R(T) \subset H^m(\Omega)$, $R(S) \subset H^m(\Omega)$. Alors $P = TS^*$ est un opérateur nucléaire de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ avec un noyau d'Agmon $K$ continu et borné sur $\Omega \times \Omega$.</u>

<u>On a</u> :

$$K(x,y) = \int_\Omega T(x,\xi)\, \overline{S(y,\xi)}\, d\xi . \tag{4.13}$$

<u>où $T(x,\xi)$ et $S(y,\xi)$ sont respectivement les noyaux de Hilbert-Schmidt de $T$ et $S$.</u>

<u>Si $(\lambda_j)$ est la suite des valeurs propres de $P$, on a</u> :

$$\sum_j \lambda_j = \int_\Omega K(x,x)\,dx \tag{4.14}$$

<u>Preuve</u> : $T$ et $S$ sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ en vertu du lemme 4.3, donc $P = TS^*$ est nucléaire.

$P$ est intégral avec un noyau d'Agmon $K$ continu, borné sur $\Omega \times \Omega$ en vertu du théorème 4.2 et la formule (4.13) provient de (4.6).

Pour avoir (4.14), il suffit de prouver, en vertu de (4.12) que :

$$\mathcal{T}r(P) = \int_\Omega K(x,x)\,dx .$$

Or cette dernière est bien connue, voir [1] par exemple.

Remarquons enfin que l'on a la majoration (4.3) pour le noyau $K$.

De la proposition précédente, on peut déduire le résultat suivant, prouvé par S. AGMON [1], avec une hypothèse supplémentaire sur le comportement à l'infini de la résolvante.

Avant de l'énoncer, on aura besoin du :

LEMME 4.5 : Soient un couple hilbertien $X \underset{\to}{\subset} Y$ et $T$ un opérateur continu de $Y$ dans $Y$ d'image $R(T) \subset X$ . Posons $Q = (TT^*)^{1/2}$ .

Alors l'image $R(Q) \subset X$ .

Preuve : Puisque $Q$ est auto-adjoint, on sait que :

$$Y = \overline{R(Q)} \oplus N(Q)$$

Donc tout $y \in Y$ se décompose d'une manière unique en

$$\nu = \xi + \eta$$

avec $\xi \in \overline{R(Q)}$ et $\eta \in N(Q)$ .

On a :

$$Q\nu = Q\xi \quad .$$

Il suffit donc de prouver que $Q\xi \in X$ pour tout $\xi \in \overline{R(Q)}$ .

On a, avec la notation du §2 :

$$(4.15) \qquad |Qf|_X \leqq \| T \|_1 \, |f|_Y \qquad \forall f \in R(Q)$$

En admettant un instant (4.15), montrons que $Q\xi \in X$ . Il existe une suite $f_n \in R(Q)$ telle que $f_n \longmapsto \xi$ dans $Y$ . En vertu de (4.15), $Qf_n$ est une suite de Cauchy dans $X$ , donc converge dans $X$ vers un élément $x$ $X$ . Donc $Qf_n$ converge aussi vers $x$ dans $Y$ .

Comme $f_n$ converge vers $\xi$ dans $Y$ , $Qf_n$ converge vers $Q\xi$ dans $Y$ d'où $Q\xi = x$ qui appartient bien à $X$.

On prouve maintenant (4.15).

Soit $f \in R(Q)$ , donc de la forme $f = Qg$ avec $g \in Y$ .

Alors :

$$Qf = TT^* g \in X$$

D'après la décomposition polaire de $T^*$ , on sait que $T^* = UQ$ où $U$ est partiellement isométrique de $Y$ dans $Y$ , d'où

$$|T^* g|_Y = |Qg|_Y$$

Puisque :

$$|Qf|_X \leqq \| T \|_1 \, |T^* g|_Y$$

(4.15) s'obtient aisément.

PROPOSITION 4.6 : Supposons $m > \frac{n}{2}$ et $\Omega$ borné. Soit $T$ un opérateur continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ d'image $R(T)$ $H_m(\Omega)$. Si $(\lambda_j)$ est la suite des valeurs propres de $T$, on a :

$$(4.16) \qquad \left(\sum_j |\lambda_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\Omega K(x,x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\| T \|_{m,\Omega}^{n/2m} \| T \|_0^{1-(n/2m)}$$

où $K$ est le noyau d'Agmon continu borné de $TT^*$.

De plus, il existe une constante $C$ tel que

$$(4.17) \qquad |\lambda_j| \leq C\, j^{-m/n} \qquad \forall j .$$

Preuve : $T$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt, on sait alors que ;

$$\sum_j |\lambda_j|^2 \leq |||T|||^2$$

d'où (4.16) en vertu de (4.8) et (4.9).

Reste à prouver la majoration (4.17).

On va d'abord la prouver dans le cas où $T$ est auto-adjoint positif et dans ce cas, on utilise la méthode de S. AGMON, que l'on va décrire ici.

Soit $t$ réel $< 0$ et considérons $T_t = T(I - tT)^{-1}$ qui est bien définie car $t^{-1}$ est dans la résolvante de $T$, $T$ étant supposé positif.

$T_t$ est aussi auto-adjoint positif et si l'on pose par $\mu_j = \eta_j^{-1}$ pour tout $\eta_j \neq 0$, la suite des valeurs propres de $T_t$ est $(\frac{1}{\mu_j - t})$, celle de $T_t^2$ est $(\frac{1}{(\mu_j-t)^2})$.

Evidemment $R(T_t) \subset H^m(\Omega)$, donc $T_t^2$ est intégral avec un noyau d'Agmon continu et borné $K_t$ ; de plus, on a :

$$(4.18) \qquad \sum_j \frac{1}{(\mu_j-t)^2} = \int_\Omega K_t(x,x)dx$$

en vertu de (4.14) appliqué à $T = S = T_t$.

Soit $\tau > 0$ et $N(\tau)$ le nombre des $\mu_j$ tel que $\mu_j \leq \tau$.

En utilisant (4.18) avec $t = -\tau$, on obtient :

$$(4.19) \qquad N(\tau)\frac{1}{4\tau^2} \leq \sum_{\mu_j \leq \tau} \frac{1}{(\mu_j+\tau)^2} \leq \int_\Omega K_{-\tau}(x,x)dx$$

Or $T$ étant auto-adjoint, suivant un résultat de S. AGMON [1] (*), on a les majorations :

$$(4.20)\qquad \begin{aligned} \| T_{-\tau} \|_{0,\Omega} &\leqq \frac{1}{\tau} \\ \| T_{-\tau} \|_{m,\Omega} &\leqq 2\| T \|_{m,\Omega} \end{aligned}$$

La majoration (4.10) donne dans le cas présent ; en vertu de (4.20)

$$\int_\Omega K_{-\tau}(x,x)dx \leqq C(\tfrac{1}{\tau})^{2-(n/m)}$$

D'où en vertu de (4.19)

$$(4.21)\qquad N(\tau) \leqq C\,\tau^{n/m}$$

De (4.21), (4.17) s'obtient aisément.

Dans le cas où $T$ est quelconque, on considère $Q = (TT^*)^{1/2}$ et en vertu du lemme (4.5), $R(Q) \subset H^m(\Omega)$.

Les considérations précédentes s'appliques à $Q$ : si $(s_j)$ est la suite des valeurs propres de $Q$, on a :

$$s_j \leqq C\, j^{-m/n} \qquad \forall\, j$$

Il suffit de remarquer, que entre les $(\lambda_j)$ et les $(s_j)$, on a :

$$(4.22)\qquad \prod_{j=1}^{n} (1 + r|\lambda_j|) \leqq \prod_{j=1}^{n} (1 + r\, s_j)$$

pour tout $r > 0$ et tout entier $n$ et d'utiliser un résultat de I. C. GOHBERG et M. G. KREIN [7] qui prouve que si $(s_j)$ est une suite positive décroissante vérifiant une majoration du type (4.17) et si $|\lambda_j|$ est une autre suite positive décroissante vérifiant (4.22), alors les $(|\lambda_j|)$ vérifient une majoration du même type avec le même exposant $-\frac{m}{n}$, d'où (4.17).

---

(*) (4.20) *n'était pas tout-à-fait explicite dans* [1], *mais sa preuve est aisée ; en effet* $((I + \tau T)f,Tf)_Y = (f,Tf)_Y + \tau(Tf,Tf)_Y \geqslant \tau\| Tf \|_Y^2$ *car* $(f,Tf)_Y \geqslant 0$. *D'où, en vertu de l'inégalité de SCHWARZ, on a :* $\tau \|Tf \|_Y \leqslant \| (I + \tau T)f \|_Y$. *Cette dernière inégalité donne* (4.20).

Remarques : a) On va voir plus loin, qu'une majoration de type (4.17) est encore valable même dans le cas $m \lneq \frac{n}{2}$.

b) On a donné, avec le cadre général du §2, une application aux opérateurs agissant dans les espaces de Sobolev-Besov.

Mais, il y a dans la pratique, d'autres situations rentrant dans le cadre du couple hilbertien $X \subsetneq Y$.

On pourra par exemple étudier avec les mêmes méthodes les noyaux et le comportement des valeurs propres d'opérateurs compacts dans $L^2(\Omega)$ avec $\Omega$ non borné, vérifiant des hypothèses raisonnables à l'infini. (Voir les travaux de C. CLARK, Pacific J. Math. (1966) et R. A. ADAMS, A. R. Mech. Analysis (1968)).

On y reviendra dans un autre travail.

## - DEUXIEME PARTIE -

§ 5. On va considérer une situation plus générale que celle du §2.

De nouveau, soit un couple hilbertien $X \subsetneq Y$.

Soit $T$ un opérateur continu de $Y$ dans $Y$ tel qu'il existe deux valeurs $\theta_1$ et $\theta_2$ appartenant à $[0,1]$ telles que :

$$R(T) \subset [X,Y]_{\theta_1} \qquad \text{et} \qquad R(T^*) \subset [X,Y]_{\theta_2}$$

Les opérateurs étudiés par H. TRIEBEL [13] entrent dans ce cadre comme nous allons le voir.

Avec les hypothèses précédentes, $T$ est continu aussi de $Y$ dans $[X,Y]_{\theta_1}$ et on note par $\| T \|_{\theta_1}$ cette norme de $T$. De même, $T^*$ est continu de $Y$ dans $[X,Y]_{\theta_2}$ et on note par $\| T^* \|_{\theta_2}$ cette norme de $T^*$.

Alors, on a le résultat suivant qui généralise la proposition 2.1 .

PROPOSITION 5.1 : <u>Soit</u> $T$ <u>un opérateur continu de</u> $Y$ <u>dans</u> $Y$ <u>avec</u> $R(T) \subset [X,Y]_{\theta_1}$ <u>et</u> $R(T^*) \subset [X,Y]_{\theta_2}$. <u>Alors, pour tout</u> $\theta \in [0,1]$ :

$$(5.1) \qquad |Tf|_{\theta_1(1-\theta)} \leq \|T\|_{\theta_1}^{1-\theta} \|T^*\|_{\theta_2}^{\theta} \, |f|_{-\theta_2\theta} \qquad \forall f \in Y$$

<u>Preuve</u> : On va donner une preuve rapide en utilisant le théorème de réitération de J. L. LIONS et J. PEETRE qui donnera (5.1) avec une constante $C$ multiplicative. On peut prouver que l'on peut prendre $C = 1$ avec la méthode holomorphe ; cela est effectivement prouvé plus loin (théorème 5.4) dans un cadre plus général que celui qui nous occupe ici.

Pour $f,g \in Y$, on a :

$$|(Tf.g)_Y| \leq |T^*g|_{\theta_2} \, |f|_{-\theta_2}$$

D'où :

$$|Tf|_Y \leq \| T^* \|_{\theta_2} \, |f|_{-\theta_2}$$

Ceci prouve que $T$ se prolonge en un opérateur continu $\mathcal{T}$ de $[X,Y]_{-\theta_2}$ dans $Y$ avec une norme $\leq \| T^* \|_{\theta_2}$.

Comme $\mathcal{T}$ est également continu de $Y$ dans $[X,Y]_{\theta_1}$ avec une norme $\leq \| T \|_{\theta_1}$, le théorème d'interpolation prouve que $\mathcal{T}$ est continu de :

$$[Y,[X,Y]_{-\theta_2}]_{1-\theta} \qquad \text{dans} \qquad [[X,Y]_{\theta_1},Y]_{1-\theta} \qquad \text{pour tout } \theta \in [0,1]$$

avec une norme $\leq C \, \| T \|_{\theta_1}^{1-\theta} \, \| T^* \|_{\theta_2}$

Le théorème de réitération donne :

$$[[X,Y]_{\theta_1},Y]_{1-\theta} = [X,Y]_{\theta_1(1-\theta)} \quad \text{et} \quad [[X,Y]_{\theta_2},Y]_{\theta} = [X,Y]_{\theta_2\theta}$$

(avec des normes équivalentes).

Le théorème de dualité donne avec ce qui précède :

$$[Y,[X,Y]_{-\theta_2}]_{1-\theta} = [X,Y]_{-\theta_2\theta}$$

(avec des normes équivalentes)
ce qui prouve (5.1).

Rappelons ici quelques notations et résultats bien connus [7]. Soient $A$ et $B$ deux espaces de Hilbert, $\mathcal{L}(A,B)$ l'algèbre des opérateurs continus de $A$ dans $B$ muni de la norme des opérateurs, $\mathcal{C}_\infty(A,B)$ l'idéal(*) des opérateurs compacts de $A$ dans $B$ muni de la norme induite par celle de $\mathcal{L}(A,B)$ et $\mathcal{F}(A,B)$ l'idéal des opérateurs de rang fini. $\mathcal{L}(A,B)$ est dense dans $\mathcal{C}_\infty(A,B)$. Si $T \in \mathcal{C}_\infty(A,B)$, la suite(**) $(s_j(T))$ des valeurs propres de $(T^*T)^{1/2}$ sera appelée suite des valeurs caractéristiques de $T$.

Pour $p \geq 1$, $\mathcal{C}_p(A,B)$ désigne l'ensemble des opérateurs $T \in \mathcal{C}_\infty(A,B)$ tel que la suite $(s_j(T))$ des valeurs caractéristiques vérifie :

$$\|T\|_p = (\sum s_j(T)^p)^{1/p} < +\infty \tag{5.2}$$

$\mathcal{C}_p(A,B)$ est un idéal et (5.2) est une norme qui en fait un idéal de Banach. $\mathcal{F}(A,B)$ est dense dans $\mathcal{C}_p(A,B)$.

$\mathcal{C}_1(A,B)$ est connu sous le nom d'espace d'opérateurs nucléaires de $A$ dans $B$. On vérifie facilement que si $T \in \mathcal{C}_p(A,B)$ et $S \in \mathcal{C}_q(B,A)$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $ST \in \mathcal{C}_1(A,A)$ et $TS \in \mathcal{C}_1(B,B)$.

Pour un opérateur nucléaire $T \in \mathcal{C}_1(A,A)$, on définit de la même manière qu'au §4 la trace $\mathcal{T}r\, T$ et on sait que [7] la forme trace

$$T \longmapsto \mathcal{T}r\, T$$

est continue de $\mathcal{C}_1(A,A)$ dans $\mathbb{C}$.

$\mathcal{C}_p(A,B)$ est mis en dualité avec $\mathcal{C}_q(B,A)$ par la forme trace ; plus précisément, pour $p \in ]1,\infty]$, le dual de $\mathcal{C}_p(A,B)$, via la forme trace, est isométrique à $\mathcal{C}_q(B,A)$ où $q$ est le conjugué de $p$.

Le dual de $\mathcal{C}_1(A,B)$ est isométrique à $\mathcal{L}(B,A)$. Les preuves de ces résultats de dualité, faites dans [7] [12] pour le cas $A = B$, sont aussi valables ici.

---

(*) *Par excès de langage, nous utilisons ici le terme idéal dans un sens généralisé évident.*

(**) *On rappelle que la famille dénombrable des valeurs propres d'un opérateur compact est rangée en une suite, par ordre de module décroissant, et répétée suivant la multiplicité.*

Le résultat suivant est attribué à P. ZAKHRYUTA (Siberian Math. J. - 8 - 1967), bien que la preuve est déjà implicite dans J. L. LIONS (Acta Math. - 94 - 1955).

LEMME 5.2 : <u>Soit un couple hilbertien</u> $X \subsetneq Y$ <u>tel que l'injection de</u> $X$ <u>dans</u> $Y$ <u>est compacte (ce qui implique que ces espaces sont séparables).</u>

<u>Il existe une famille dénombrable d'éléments de</u> $X$ , $(e_j)$ , <u>totale et orthonormale dans</u> $Y$ <u>qui est aussi totale dans</u> $[X,Y]_\theta$ <u>pour tout</u> $\theta \in [-1,1]$ .

<u>Preuve</u> : Soit $\Lambda$ l'opérateur auto-adjoint positif engendré par le couple hilbertien $X \subsetneq Y$ . $\Lambda^{-1}$ est compacte de $Y$ dans $Y$ car l'injection de $X$ dans $Y$ est compacte ; soient $(\lambda_j > 0)$ la suite des valeurs propres de $\Lambda^{-1}$ convergente vers $0$ et $(e_j)$ la suite des vecteurs propres correspondant que l'on suppose ortho-normale dans $Y$ . On sait que $(e_j)$ est totale dans $Y$ .

On a :

$$(5.3) \qquad \Lambda e_j = \mu_j e_j \qquad \forall j \text{ avec } \mu_j = \lambda_j^{-1}$$

Comme $\Lambda^\theta$ est une isométrie de $[X,Y]_\theta$ sur $Y$ pour $\theta \in [0,1]$ , (5.3) montre que $(e_j)$ est aussi totale dans $[X,Y]_\theta$ pour $\theta \in [0,1]$ .

Comme $Y$ est dense dans $[X,Y]_\theta$ pour $\theta \in [-1,0]$ , $(e_j)$ est aussi totale dans $[X,Y]_\theta$ .

Dans toute la suite de ce paragraphe on suppose que l'injection de $X$ dans $Y$ est compacte ; avec le lemme 5.2 , on considère la famille d'opérateurs $\mathcal{D}$ qui sont des combinaisons linéaires finis d'opérateurs $d_{i,j}$ définis par :

$$d_{i,j} = (\cdot,e_i)_Y \, e_j \ .$$

Si $\theta_1$ et $\theta_2 \in [0,1]$ et si $A = [X,Y]_{\theta_1}$ et $B = [X,Y]_{-\theta_2}$ , un élément $d \in \mathcal{D}$ peut être considéré comme opérateur de $A$ dans $B$ . De cette façon, $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}(A,B)$ .

On a le :

LEMME 5.3 : <u>Soient</u> $\theta_1,\theta_2 \in [0,1]$ <u>et</u> $A = [X,Y]_{\theta_1}$ , $B = [X,Y]_{-\theta_2}$ <u>et</u> $p \geq 1$ . <u>Alors</u> $\mathcal{D}$ <u>est dense dans</u> $\mathcal{C}_p(A,B)$ .

<u>Preuve</u> : On sait que $\mathcal{F}(A,B)$ est dense dans $\mathcal{C}_p(A,B)$ ; il suffit donc de prouver que tout $T \in \mathcal{F}(A,B)$ est approchable pour la norme de $\mathcal{C}_p(A,B)$ par une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ . Comme $T$ est de rang fini, on se ramène immédiatement au cas où $T$ est rang $1$, c'est-à-dire $T$ de la forme :

$$T = (\cdot,\alpha)_A \, \beta$$

avec $\alpha \in A$ et $\beta \in B$.

Dans ce cas, $\| \quad \|_p$ étant une norme tensorielle :

$$\| T \|_p = |\alpha|_{\theta_1} |\beta|_{-\theta_2}$$

Ceci montre que l'application bilinéaire :

$$A \times B \longrightarrow \mathcal{F}(A,B)$$

qui à $(\alpha,\beta) \in A \times B$ associe $T = (.,\alpha)_A \beta$ est continu de $A \times B$ dans $\mathcal{F}(A,B)$ muni de la norme $\| \quad \|_p$.

D'après le lemme 5.1, la famille $(e_j)$ forme une base commune de $A$ et $B$, donc le sous-espace engendré par la famille $(\{e_i, e_j\})$ est dense dans $A \times B$, d'où le lemme.

COROLLAIRE 5.4 : <u>Soient</u> $A$, $B$ <u>comme dans le lemme</u> 5.3 <u>et</u> $T \in \mathcal{L}(B,A)$.

<u>Soient</u> $p \in [1,\infty[$ <u>et</u> $q$ <u>son conjugué</u>.

<u>Pour que</u> $T \in \mathcal{C}_p(B,A)$, <u>il faut et il suffit que</u>

$$\sup_{S \in \mathcal{B}} \frac{|\mathcal{T}r(TS)|}{\| S \|_q} < +\infty \tag{5.4}$$

<u>Preuve</u> : En vertu du lemme 5.3, $\mathcal{B}$ est dense $\mathcal{C}_q(A,B)$, et ce corollaire est une conséquence directe du théorème de dualité entre $\mathcal{C}_q(A,B)$ et $\mathcal{C}_p(B,A)$ rappelé auparavavant.

On peut maintenant énoncer le résultat qui généralise la proposition 5.1 et dont la preuve fournit également l'inégalité (5.1) avec la constante égale à 1.

THÉORÈME 5.5 : <u>Soit</u> $T$ <u>un opérateur continu de</u> $Y$ <u>dans</u> $Y$ <u>tel que</u> $R(T) \subset [X,Y]_{\theta_1}$ <u>et</u> $R(T^*) \subset [X,Y]_{\theta_2}$ <u>avec</u> $\theta_1, \theta_2 \in [0,1]$.

<u>Supposons que</u> $T$, <u>considéré comme opérateur continu de</u> $Y$ <u>dans</u> $[X,Y]_{\theta_1}$ <u>soit de la classe</u> $\mathcal{C}_{p_1}(Y,[X,Y]_{\theta_1})$ <u>et</u> $T^*$, <u>considéré comme opérateur continu de</u> $Y$ <u>dans</u> $[X,Y]_{\theta_2}$, <u>soit de la classe</u> $\mathcal{C}_{p_2}(Y,[X,Y]_{\theta_2})$ <u>avec</u> $p_1, p_2 \in [1,\infty[$.

<u>Alors</u> $T$ <u>se prolonge en un opérateur continu de</u> $[X,Y]_{-\theta_2\theta}$ <u>dans</u> $[X,Y]_{\theta_1(1-\theta)}$ <u>pour tout</u> $\theta \in [0,1]$ <u>et ce prolongement est de la classe</u> $\mathcal{C}_p([X,Y]_{-\theta_2\theta}, [X.Y]_{\theta_1(1-\theta)})$ <u>où</u> :

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2} \tag{5.5}$$

<u>De plus</u>,

$$\| T \|_p \leq \| T \|_{p_1}^{1-\theta} \, \| T^* \|_{p_2}^{\theta} \tag{5.6}$$

(<u>les normes</u> $\| \quad \|_p$, $\| \quad \|_{p_1}$, $\| \quad \|_{p_2}$ <u>sont prises dans les espaces respectifs de</u> $T$).

Preuve : En vertu de la proposition 5.1, $T$ se prolonge en un opérateur continu de $[X,Y]_{-\theta_2\theta}$ dans $[X,Y]_{\theta_1(1-\theta)}$, pour tout $\theta \in [0,1]$.

Pour la commodité des notations, on a désigné dans (5.6) par $T$ encore ce prolongement ; nous le faisons désormais.

En vertu du corollaire 5.4, il suffit de prouver que :

$$\sup_{S\in\mathcal{D}} \frac{|\mathcal{C}r(TS)|}{\|S\|_q} < +\infty$$

avec $q$ le conjugué de $p$, $p$ étant déterminé par (5.5), la norme $\|S\|_q$ étant prise dans $\mathcal{C}_q([X,Y]_{\theta_1(1-\theta)},[X,Y]_{-\theta_2\theta})$.

Remarquons tout de suite que le cas d'opérateurs continus entre dans le cadre de la preuve qui suit comme cas limite car on sait que le dual de $\mathcal{C}_1(A,B)$ est $\mathcal{L}(B,A)$, donc (5.4) est utilisable pour $q = 1$ à condition de considérer $T \in \mathcal{L}(B,A)$. Cette remarque montre que la proposition 5.1 est un cas particulier du théorème 5.5 dont la preuve fournit une deuxième démonstration de la proposition 5.1. (On peut voir, en effet, que dans ce cas limite, l'hypothèse de l'injection compacte de $X$ dans $Y$ est inutile.)

Ceci étant, considérons $S \in \mathcal{D}$ avec $\|S\|_q = 1$.

$S$ s'écrit de la forme :

$$S = \sum_{j=1}^{n} c_j(\cdot,f_j)_Y\, h_j$$

avec $f_j$, $h_j$ des éléments de la base commune $(e_j)$.

En écrivant :

$$c_j = \rho_j\omega_j \qquad \text{avec } \rho_j = |c_j|$$

et en posant, $(\mu_j)$ étant la suite définie dans (5.3) :

$$(5.7)\qquad \begin{aligned} a_j &= \mu_j^{\theta_1(1-\theta)} f_j \\ b_j &= \mu_j^{\theta_2\theta}\,\omega_j h_j \end{aligned}$$

$S$ s'écrit encore :

$$(5.8)\qquad S = \sum_{j=1}^{n} k_j(\cdot,a_j)_Y\, b_j$$

où, on a posé :

$$(5.9)\qquad k_j = \rho_j\,\mu_j^{-\theta_1(1-\theta)-\theta_2\theta} > 0$$

En vertu de (5.3) et puisque la famille $(e_j)$ est orthonormale dans $Y$, on a, pour tout $\eta \in [-1,1]$ :

(5.10) $$(e_m,e_n)_\eta = \mu_m^\eta \mu_n^\eta \delta_{m,n}$$

où $\delta_{m,n}$ est le symbole de Kronecher.

En effet, pour $\eta \in [0,1]$ :

$$(e_m,e_n)_\eta = (\Lambda^\eta e_m, \Lambda^\eta e_n)_Y = \mu_m^\eta \mu_n^\eta (e_m,e_n)_Y$$

d'où (5.10) pour $\eta \in [0,1]$ .

Mais de (1.4), on a :

$$(e_m,e_n)_{-\eta} = (J_\eta e_m, J_\eta e_n)$$

et, on a, puisque $J_\eta$ est, en vertu de (1.3), le prolongement de $\Lambda^{-2\eta}$ :

$$(e_m,e_n)_{-\eta} = (\Lambda^{-\eta} e_m, \Lambda^{-\eta} e_n)_Y = \mu_m^{-\eta} \mu_n^{-\eta} (e_m,e_n)_Y$$

d'où (5.10) pour $\eta \in [-1,1]$ .

$S$ s'écrit encore, lorsque l'on restrint à $[X,Y]_{\theta_1(1-\theta)}$

(5.11) $$S = \sum_{j=1}^n k_j(\cdot,\mu_j^{-2\theta_1(1-\theta)} a_j)_{\theta_1(1-\theta)}\, b_j$$

En vertu des définitions (5.7), on vérifie sans peine que les $\mu_j^{-2\theta_1(1-\theta)} a_j$ sont orthonormales dans $[X,Y]_{\theta_1(1-\theta)}$ et les $b_j$ sont orthonormales dans $[X,Y]_{-\theta_2\theta_1}$ donc (5.11) est la décomposition polaire de $S$ , considéré comme opérateur de $[X,Y]_{\theta_1(1-\theta)}$ dans $[X,Y]_{-\theta_2}$ .

Puisque, par hypothèse $\|S\|_q = 1$ , on a :

(5.12) $$\sum_{j=1}^n k_j^q = 1$$

En notant $q_1$ et $q_2$ respectivement les conjugués de $p_1$ et $p_2$ , considérons la fonction d'une variable complexe :

$$F(z) = \sum_{j=1}^n k_j^{q(\frac{1-z}{q_1}+\frac{z}{q_2})} (T\Lambda^{\theta_2 z}\omega_j h_j \,,\, \Lambda^{\theta_1(1-\bar z)} f_j)_Y$$

qui est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée sur toute bande $\alpha \leq \operatorname{Re} z \leq \beta$ . On a de nouveau utilisé le théorème des trois droites sur la bande $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ .

Pour $\operatorname{Re} z = 0$ , on a :

$$F(it) = \sum_{j=1}^n k_j^{q(\frac{1-it}{q_1}+\frac{it}{q_2})} (T\Lambda^{\theta_2 it}\omega_j h_j \,,\, \Lambda^{\theta_1(1+it)} f_j)_Y \qquad t \in \mathbb{R}$$

Alors, pour ce $t$ , on considère l'opérateur de rang fini :

$$K_t = \sum_{j=1}^n K_j^{q(\frac{1-it}{q_1}+\frac{it}{q_2})} (\,\cdot\,,\Lambda^{\theta_1(1+it)} f_j)_Y\, \Lambda^{\theta_2 it}\omega_j h_j$$

Considérant $K_t$ comme opérateur de $[X,Y]_{\theta_1}$ dans $Y$ et $T$ comme opérateur de $Y$ dans $[X,Y]_{\theta_1}$, on a, par un calcul évident :

$$F(it) = \mathscr{T}r(TK_t)$$

En vertu du corollaire 5.4 :

(5.13) $$|F(it)| \leq \| T \|_{p_1} \| K_t \|_{q_1}$$

En écrivant $K_t$ de la forme :

$$K_t = \sum_{j=1}^{n} k_j^{q(\frac{1-it}{q_1} + \frac{it}{q_2})} ( \cdot , \mu_j^{-\theta_1} f_j)_{\theta_1} \omega_j h_j$$

les $\mu_j^{-\theta} f_j$ étant orthonormales dans $[X,Y]_{\theta_1}$ et les $h_j$ orthonormales dans $Y$ on a :

$$\| K_t \|_{q_1}^{q_1} = \sum_{j=1}^{n} ( | k_j^{q(\frac{1-it}{q_1} + \frac{it}{q_2})} | )^{q_1}$$

Comme :

$$q(\frac{1-it}{q_1} + \frac{it}{q_2}) = \frac{q}{q_1} + itq(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1})$$

il vient :

$$\| K_t \|_{q_1}^{q_1} = \sum_{j=1}^{n} k_j^{q} = 1$$

en vertu de (5.12).

(5.13) donne alors :

(5.14) $$|F(it)| \leq \| T \|_{p_1} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Pour $\operatorname{Re} z = 1$, on a :

$$F(1 + it) = \sum_{j=1}^{n} k_j^{q(\frac{-it}{q_1} + \frac{1+it}{q_2})} (\Lambda^{\theta_2(1+it)} \omega_j h_j , T^* \Lambda^{\theta_1 it} f_j)_Y \qquad t \in \mathbb{R}$$

Pour ce $t$, considérons l'opérateur de rang fini :

$$G_t = \sum k_j^{q(\frac{it}{q_1} + \frac{1-it}{q_2})} \overline{(\Lambda^{\theta_2(1+it)} \omega_j h_j , \cdot )_Y} \Lambda^{\theta_1 it} f_j$$

Considérant $G_t$ comme opérateur de $[X,Y]_{\theta_2}$ dans $Y$ et $T^*$ comme opérateur de $Y$ dans $[X,Y]_{\theta_2}$, on a :

$$F(1 + it) = \overline{\mathscr{T}r\, (T^* G_t)}$$

De nouveau, par le corollaire 5.4 :

(5.15) $$|F(1+it)| \leq \| T^* \|_{p_2} \, \| G_t \|_{q_2}$$

Par un calcul analogue, en remarquant maintenant :

$$q\left(\frac{it}{q_1} + \frac{1-it}{q_2}\right) = \frac{q}{q_2} + itq\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right)$$

on obtient :

$$\| G_t \|_{q_2}^{q_2} = \sum_{j=1}^{n} k_j^q = 1$$

D'où, en vertu de (5.15) :

(5.16) $$|F(1+it)| \leq \| T^* \|_{p_2} \qquad t \in \mathbb{R} .$$

D'où, pour la valeur $\theta \in [0,1]$ considérée, le théorème des trois droites donne avec (5.14) et 5.16) :

$$|F(\theta)| \leq \| T \|_{p_1}^{1-\theta} \, \| T^* \|_{p_2}^{\theta}$$

Or, en vertu de (5.5) :

$$q\left(\frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2}\right) = 1$$

d'où :

$$F(\theta) = \sum_{j=1}^{n} k_j (T\Lambda^{\theta_2 \theta} \omega_j h_j \, , \, \Lambda^{\theta_1 (1-\theta)} f_j)_Y$$

donc en vertu des formules (5.7) :

$$F(\theta) = \sum_{j=1}^{n} k_j (T\, b_j, a_j)$$

En utilisant (5.8) et $S$ considéré comme opérateur de $[X,Y]_{\theta_1(1-\theta)}$ dans $[X,Y]_{-\theta_2\theta}$ et $T$ comme opérateur de $[X,Y]_{-\theta_2\theta}$ dans $[X,Y]_{\theta_1(1-\theta)}$, on a :

$$F(\theta) = \mathcal{C}r(TS)$$

$S$ étant arbitraire de norme $\| S \|_q = 1$, on en déduit

$$\sup_{S \in \mathcal{B}} \frac{|\mathcal{C}r(TS)|}{\| S \|_q} < \| T \|_{p_1}^{1-\theta} \, \| T^* \|_{p_1}^{\theta}$$

d'où, en utilisant de nouveau le corollaire 5.4, le théorème ainsi que l'inégalité (5.6).

<u>Remarque</u> : Dans le travail de J.L. LIONS et J. PEETRE [10], ces auteurs ont établi les résultats suivants :

1) Soit $B$ un espace de Banach et $\{A_0, A_1; \mathcal{A}\}$ un triplet d'interpolation. Soit $\pi$ une application linéaire de $B$ dans $\mathcal{A}$ telle que

$\pi$ est compact de $B$ dans $A_0$

$\pi$ est continu de $B$ dans $A_1$

alors $\pi$ est compact de $B$ dans $A$ si $A$ est de classe $\underline{\mathcal{K}_\theta}(A_0, A_1)$, avec $0 < \theta < 1$.

2) si $\pi$ est une application linéaire de $\mathcal{A}$ dans $B$ telle que :

$\pi$ est compact de $A_0$ dans $B$

$\pi$ est continu de $A_1$ dans $B$

alors $\pi$ est compact de $A$ dans $B$ si $A$ est de classe $\overline{\mathcal{K}_\theta}(A_0, A_1)$, avec $0 < \theta < 1$.

Un résultat du genre du théorème 5.4 est, à notre connaissance, nouveau au point de vue interpolation car on interpolle à la fois les espaces de départ et d'arrivée ainsi que les classes de compacité de l'opérateur considéré. On se place ici dans le cadre restreint d'espaces hilbertiens $X \underset{\rightarrow}{\subseteq} Y$ avec une injection compacte ; le problème reste ouvert dans tous les autres cas.

§ 6 - Une autre classe d'opérateurs compacts importante dans la pratique est la suivante : on dira qu'un opérateur $T \in \mathcal{E}_\infty(B,A)$ est de la classe $\mathcal{C}_{p,\infty}(B,A)$ avec $p \in ]0,\infty[$ si la suite des valeurs caractéristiques $(s_j(T))$ vérifie :

$$\sup_j (j^{1/p} s_j(T)) < +\infty$$

On vérifie facilement que $\mathcal{C}_{p,\infty}(B,A)$ est un idéal et que la quantité

$$\sup_j (j^{1/p} s_j(T))$$

est une quasi-norme sur $\mathcal{C}_{p,\infty}(B,A)$.

On étudie ici, dans le cadre abstrait $X \subsetneq Y$, quelques propriétés des injections de $[X,Y]_s \subset [X,Y]_r$ lorsque $s > r$.

On a le :

LEMME 6.1 : <u>Soit un couple hilbertien</u> $X \subsetneq Y$. <u>Alors l'injection</u> $I$ <u>de</u> $X$ <u>dans</u> $Y$ <u>est compacte si et seulement si</u> $\Lambda^{-1}$ <u>est compacte</u>.

<u>Dans ce cas, si</u> $(s_j)$ <u>est la suite des valeurs caractéristiques de</u> $I$ et $\mu_j$ <u>la suite des valeurs propres de</u> $\Lambda$, <u>alors</u>

$$s_j = \mu_j^{-1} \qquad \forall j . \tag{6.1}$$

<u>Preuve</u> : Soit :

$$B = \{x \quad X \; ; \; |x|_X \leqq 1\} .$$

On sait [7] que $(s_j)$ est la suite des $n^{\text{ièmes}}$ diametres de $B$ dans $Y$.

Posons $T = \Lambda^{-1}$.

Comme $|x|_X = |\Lambda x|_Y$

$$B = \{x \; ; \; |\Lambda x|_Y \leqq 1\} = \{Ty \; ; \; |y|_Y \leqq 1\} .$$

Donc $B$ est l'image par $T$ de la boule unité de Y, ce qui montre que $I$ est compacte si et seulement si $\Lambda^{-1}$ est compacte.

Dans ce cas, on sait aussi [7] que la suite des valeurs propres $\mu_j^{-1}$ de $T$ est aussi la suite des $n^{\text{ièmes}}$ diamètres de l'image par $T$ de la boule unité de $Y$, d'où (6.1).

On en déduit le résultat suivant qui précise un résultat de J. L. LIONS et J. PEETRE [10].

PROPOSITION 6.2 : <u>Soit le couple hilbertien</u> $X \subsetneq Y$ <u>et supposons que l'injection</u> $I$ <u>de</u> $X$ <u>dans</u> $Y$ <u>est compacte et de la classe</u> $\mathscr{C}_{p,\infty}(X,Y)$ <u>avec</u> $p \in \,]0,\infty[$.

<u>Alors pour tout</u> $-1 \leqq r < s \leqq 1$, <u>l'injection de</u> $[X,Y]_s$ <u>dans</u> $[X,Y]_r$ <u>est compacte et est de la classe</u> $\mathscr{C}_{(p/(s-r)),\infty}([X,Y]_s, [X,Y]_r)$.

<u>Preuve</u> : Suivant [10], l'injection de $[X,Y]_s$ dans $[X,Y]_r$ est compacte pour tout $-1 \leqq r < s \leqq 1$.

Si l'on désigne par $(s_j)$ la suite des valeurs caractéristiques de l'injection $I$ se $X$ dans $Y$, on va prouver que la suite des valeurs caractéristiques de l'injection de $[X,Y]_s$ dans $[X,Y]_r$ est

$$(s_j^{s-r}) \tag{6.2}$$

ce qui prouve le théorème.

Par diagonalisation [9], il est facile de voir que l'opérateur $\Lambda_{s,r}$ engendrant le couple hilbertien $[X,Y]_s \subsetneq [X,Y]_r$ a une suite de valeurs propres égales à $(\mu_j^{s-r})$, d'où (7.2) en vertu du lemme 7.1.

§ 7. On considère quelques applications aux espaces de Sobolev-Besov dont les définitions et notations sont rappelées au §4. On suppose dans toute la suite $\Omega$ ouvert et borné.

La proposition 6.2 donne le résultat suivant, déjà prouvé par H. TRIEBEL [13] :

PROPOSITION 7.1 : <u>Soient</u> $-\infty < s < r < +\infty$. <u>Alors l'injection</u> $I_{r,s}$ <u>de</u> $H^r(\Omega)$ <u>dans</u> $H^s(\Omega)$ <u>est compacte et est de la classe</u> :

$$\mathscr{C}_{(n/(r-s)),\infty}(H^r(\Omega),H^s(\Omega))$$

<u>Preuve</u> : En vertu de la proposition 6.2, il suffit de prouver le cas particulier $r > 0$ et $s = 0$.

Dans ce cas, si on suppose $r > \frac{n}{2}$ et en posant $T = \Lambda^{-1}$ avec $\Lambda$ l'opérateur auto-adjoint positif engendrant le couple hilbertien $(H(\Omega), L^2(\Omega))$, $T$ vérifie toutes les hypothèses de la proposition 4.6, on en déduit que la suite $(\lambda_j)$ des valeurs propres de $T$ vérifie :

$$\lambda_j \leqq C\, j^{-r/n} \qquad \forall j .$$

Donc, en vertu du lemme 6.1, $I_{r,0}$ est de la classe $\mathscr{C}_{(n/r),\infty}(H^r(\Omega), L^2(\Omega))$.

Si $r > 0$ quelconque, on considère $m > \sup(r,\frac{n}{2})$, alors $I_{m,0}$ est de la classe $\mathscr{C}_{(n/m),\infty}(H^m(\Omega), L^2(\Omega))$, donc puisque $H^r(\Omega) = [H^m(\Omega), L^2(\Omega)]_{r/m}$, $I_{r,0}$ est de la classe $\mathscr{C}_{(n/m).(m/r),\infty}(H^r(\Omega), L^2(\Omega))$, en vertu de la proposition 6.2.

Ceci achève la preuve de la proposition.

On a le :

COROLLAIRE 7.2. : <u>Soit</u> $T$ <u>un opérateur de</u> $L^2(\Omega)$ <u>dans</u> $L^2(\Omega)$ <u>tel que</u> $R(T) \subset H^m(\Omega)$, $m > 0$.

<u>Si</u> $(\lambda_j)$ <u>est la suite des valeurs propres de</u> $T$, <u>alors</u> :

(7.1) $$|\lambda_j| \leqq C\, j^{-m/n} \qquad \forall j .$$

<u>Preuve</u> : Ce résultat généralise donc, au cas $m$ quelconque $> 0$, non nécessairement $> \frac{n}{2}$, l'inégalité (7.1) qui était prouvée dans le §4 avec l'hypothèse $m > \frac{n}{2}$.

Pour prouver (7.1), on factorise

$$T = I_{m,0}\,\tilde{T}$$

où $I_{m,0}$ est l'injection de $H^m(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et $\tilde{T}$ est l'opérateur $T$ considéré comme opérateur continu de $L^2(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$ .

On vérifie alors sans peine [11] que $T$ est de la classe $\mathscr{C}_{(n/m),\infty}(L^2(\Omega),L^2(\Omega))$ puisque $I_{m,0}$ est de la classe $\mathscr{C}_{(n/m)\infty}(H^m(\Omega),L^2(\Omega))$ en vertu de la proposition 7.1, d'où (7.1) en utilisant (4.22) et le théorème rappelé ee I.C. GOHBERG et M.G. KREIN [7].

Remarque : Comme on l'a déjà remarqué, un tel résultat ne nécessite pas d'hypothèse supplémentaire sur le comportement de la résolvante de $T$ .

L'application des résultats d'interpolation des § 5 et § 6 aux espaces de Sobolev donne le :

THÉORÈME 7.3 : Soit $T$ un opérateur continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ tel que $R(T) \subset H^r(\Omega)$ et $R(T^*) \subset H^s(\Omega)$ avec $r$ et $s \geqq 0$ .

Supposons que $T$ soit de la classe $\mathscr{C}_{p_1}(L^2(\Omega),H^r(\Omega))$ et que $T^*$ soit de la classe $\mathscr{C}_{p_2}(L^2(\Omega),H^s(\Omega))$ avec $p_1$ , $p_2 \in [1,\infty[$) .

Alors pour tout $\rho,\sigma \geqq 0$ tels que :

$$\frac{\rho}{r} + \frac{\sigma}{s} = 1 \tag{7.2}$$

(avec $\sigma = s$ si $r = 0$ et $\rho = r$ si $s = 0$)

$T$ se prolonge en un opérateur continu de $H^{-\sigma}(\Omega)$ dans $H^\rho(\Omega$ et ce prolongement est de la classe :

$$\mathscr{C}_p(H^{-\sigma}(\Omega),H^\rho(\Omega))$$

avec $\rho$ tel que :

$$\frac{1}{p} = \frac{\rho}{r}\frac{1}{p_1} + \frac{\sigma}{s}\frac{1}{p_2} \tag{7.3}$$

De plus :

$$\|T\|_p \leqq C\|T\|_{p_1}^{\rho/r}\ \|T^*\|_{p_2}^{\sigma/s}$$

(les différentes normes sont prises dans les espaces respectifs de $T$) .

Preuve :

On applique le théorème 5.5 avec $Y = L^2(\Omega)$ et $X = H^m(\Omega)$ où $m \geq \sup(r,s$ . étant borné, l'injection de $X$ dans $Y$ est compacte. Alors :

$$H^r(\Omega) = [X,Y]_{\theta_1} \qquad \text{avec } \theta_1 = \frac{r}{m}$$

$$H^s(\Omega) = [X,Y]_{\theta_2} \qquad \text{avec } \theta_2 = \frac{s}{m}$$

Donc, pour tout $\theta \in [0,1]$, $T$ admet un prolongement continu de $[X,Y]_{-\theta_2\theta}$ dans $[X,Y]_{\theta_1(1-\theta)}$.

Si on pose :

$$\rho = (1-\theta)r \qquad \text{et} \qquad \sigma = \theta s$$

on a (7.2) et :

$$H^\rho(\Omega) = H^{(1-\theta)r}(\Omega) = [X,Y]_{\theta_1(1-\theta)}$$

$$H^{-\sigma}(\Omega) = H^{-\theta s}(\Omega) = [X,Y]_{-\theta_2\theta}$$

d'où $T$ est continu de $H^{-\sigma}(\Omega)$ dans $H^\sigma(\Omega)$.

De plus, si $p$ est tel que :

$$\frac{1}{p} = \frac{\rho}{r}\frac{1}{p_1} + \frac{\sigma}{s}\frac{1}{p_2}$$

$T$ est de la classe $\mathscr{C}_p(H^{-\sigma}(\Omega), H^\sigma(\Omega))$ avec (8.4).

En utilisant la définition des espaces $\mathscr{C}_{q,p}$, on a le :

COROLLAIRE 7.4 : <u>Dans les conditions du théorème 8.3, soit $\tau$ avec $-\infty < \tau \leq \rho$. Alors $T$ considéré comme un opérateur continu de $H^{-\sigma}(\Omega)$ dans $H^\tau(\Omega)$, est de la classe</u> :

$$\mathscr{C}_{\frac{pn}{n+p(\rho-\tau)},p}(H^{-\sigma}(\Omega), H^\tau(\Omega)) \tag{8.5}$$

Preuve : En vertu du théorème 7.3, dans le cas $\mathscr{C}_p$, $T$, considéré comme opérateur de $H^{-\sigma}(\Omega)$ dans $H^\rho(\Omega)$ est de la classe

$$\mathscr{C}_p(H^{-\sigma}(\Omega), H^\rho(\Omega))$$

Pour la commodité de la preuve, désignons par $\tilde{T}$ cet opérateur.

Alors, $T$, considéré comme opérateur de $H^{-\sigma}(\Omega)$ dans $H^{\tau}(\Omega)$ se factorise :

$$T = I_{\rho,\tau}\,\tilde{T}$$

En vertu de la proposition 8.1, $I_{\rho,\tau}$ est de la classe

$$I_{\rho,\tau} \in \mathscr{C}_{(n/\rho-\tau),\infty}\,(H^{\rho}(\Omega)\,,\,H^{\tau}(\Omega))$$

D'après [11], on a le résultat de composition suivant pour les $\mathscr{C}_{q,p}$ : Soit $T_1 \in \mathscr{C}_{q_1,p_1}$ et $T_2 \in \mathscr{C}_{q_2,p_2}$, alors $T_1\,T_2 \in \mathscr{C}_{q,p}$ avec

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$$

Un calcul immédiat donne alors (8.5).

Remarque :

1) Les résultats précédents, dans le cas $\mathscr{C}_p$, généralisent des résultats de H. TRIEBEL [13], établi pour $p = 2$.

Dans ce travail, cet auteur adopte le point de vue suivant : $A \mathbin{\hat{\otimes}_2} B$ désignant le produit tensoriel hilbertien de deux espaces de Hilbert $A$ et $B$, il considère un "noyau" $K(x,y)$ tel que :

$$K \in [H^{r}(\Omega) \mathbin{\hat{\otimes}_2} L^2(\Omega)] \cap [L^2(\Omega) \mathbin{\hat{\otimes}_2} H^{s}(\Omega)]$$

Comme il est clair qu'un produit tensoriel hilbertien de deux espaces de Hilbert $A$ et $B$ peut être regardé comme l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt de $A$ dans $B$, à un tel noyau $K$ correspond un opérateur $T$ de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ vérifiant les hypothèses du théorème 8.3 et corollaire 8.4 pour $p = 2$.

Dans notre cas général des $\mathscr{C}_p$ par exemple, il est clair qu'à un opérateur $T$ vérifiant les hypothèses du théorème 8.3, $T$ est intégral avec un noyau d'Agmon $K$ tel que :

$$K \in [H^{r}(\Omega) \mathbin{\hat{\otimes}_{p_1}} L^2(\Omega)] \cap [L^2(\Omega) \mathbin{\hat{\otimes}_{p_2}} H^{s}(\Omega)]$$

où $A \mathbin{\hat{\otimes}_p} B$ désigne le produit tensoriel complété correspondant à la norme tensorielle $\| \ \|_p$ de $\mathcal{C}_p$. Précisément, K est continu lorsque r et s sont assez grands.

2) Supposons que $R(T) \subset H^s(\Omega)$ et $R(T^*) \subset H^s(\Omega)$ avec $s > n$.

Soit $\ell$ le plus grand entier $< S - \frac{n}{2}$.

Alors T considéré comme opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $H^\ell(\Omega)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt car l'injection de $H^s(\Omega)$ dans $H^\ell(\Omega)$ est de Hilbert-Schmidt en vertu de la proposition 7.1, $s - \ell$ étant plus grand que $\frac{n}{2}$.

De la même manière, $T^*$ considéré comme opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $H^\ell(\Omega)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Donc le noyau K de T vérifie :

$$K \in [H^\ell(\Omega) \hat{\otimes}_2 L^2(\Omega)] \cap [L^2(\Omega) \hat{\otimes}_2 H^\ell(\Omega)]$$

d'où, d'après [13] l'espace précédent étant $H^\ell(\Omega \times \Omega)$ :

$$K \in H^\ell(\Omega \times \Omega)$$

On retrouve ainsi un résultat d'Agmon [1].

## BIBLIOGRAPHIE


[1] S. AGMON : Lectures on elliptic boundary value problems.
Van Nostrand - (1965).

[2] - - : On Kernels, Eigenvalues and Eigenfunctions of operators related to elliptic problems.
Communication on Pure and Applied Mathematics - Vol. XIII - (1965).

[3] J. M. BEREZANSKI : Expansions in Eingenfunctions of self-adjoint operators.
Transl. Mathematical Monographs - (1968).

[4] N. BOURBAKI : Topologie générale - Espaces fonctionnels.
Hermann - (1961).

[5] H. G. GARNIR - M. DE WILDE - J. SCHMETS : Analyse fonctionnelle. Théorie constructive.
Birkhauser - Vol. I - (1968).

[6] C. GAPAILLARD - PHAM THE LAI : Remarques sur les propriétés de dualité et d'interpolation des idéaux de R. Schatten.
C. R. Acad. Sc. Paris - t. 274 - p. 1794-1797 - (1972).

[7] I. C. GOHBERG - M. G. KREIN : Introduction to the theory of linear nonself-adjoint operators.
Transl. Mathematical Monographs - (1969).

[8] J. L. LIONS - E. MAGENES : Problèmes aux limites non homogènes (IV).
Annali Scuola Norm. Sup. Pisa - 15 - p. 311-326 - (1961).

[9] - - - - E. MAGENES : Problèmes aux limites non homogènes. Vol. I
Dunod - (1968).

[10] - - - - J. PEETRE : Sur une classe d'espaces d'interpolation.
I. H. E. S. - n° 19 - p. 5-68 - (1968).

[11] C. MERUCCI : Interpolation dans $C^{\omega}(H)$ .
C. R. Acad. Sc. Paris - t. 274 - p. 1163-1166 - (1972).

[12] PHAM THE LAI : L'analogue dans $\mathfrak{S}^p$ des théorèmes de convexité de M. Riesz et G. O. Thorin.
Studia Mathématica - Tome XLVI - (1973).

[13] H. TRIEBEL : Über die Verteilung der Approximationszahlen kompakter Operatoren in Sobolev-Besov Raümen.
Inventiones math. 4 - p. 275-293 - (1967).

[14] - - : Interpolationseigenschaften von Eutropie und Durchmesseridealen kompakter Operatoren.
Studia Mathematica - Tome XXXIV - (1970).