Haïm Brézis

Solutions à support compact d'inéquations variationnelles

Séminaire Jean Leray, n° 1 (1973-1974), exp. n° 3, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1973-1974___1_A3_0>

SOLUTIONS À SUPPORT COMPACT D'INÉQUATIONS VARIATIONNELLES

par Haïm BRÉZIS

Soit Ω un ouvert non borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière. Etant donnés f et φ, soit u la solution de l'équation

$$-\Delta u + u = f \quad \text{sur } \Omega \text{ , } u = \varphi \quad \text{sur } \partial\Omega \text{ .}$$

On ne connaît pas d'hypothèses simples (sur f et φ) permettant de conclure que u est à support compact (dans $\bar{\Omega}$). Par contre, dans le cas des inéquations variationnelles, la situation est totalement différente. Considérons, par exemple, la solution u du problème.

(1) $$\text{Min} \left\{ \int_\Omega \left(\tfrac{1}{2} |\text{grad}\, u|^2 + \tfrac{1}{2} |u|^2 - fu \right) dx \text{ ; } u \geq 0 \text{ sur } \Omega \text{ ; } u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

dont l'interprétation est :

$$u \geq 0 \text{ sur } \Omega \text{ , } -\Delta u + u = f \text{ sur } [u > 0] \text{ , } f \leq 0 \text{ sur } [u = o] \text{ .}$$

De sorte que s'il existe une solution à support compact; on voit apparaître les conditions nécessaires

(2) $$f(x) \leq 0 \quad \text{pour } |x| \text{ assez grand}$$

(3) $$\varphi(x) = 0 \quad \text{pour } |x| \text{ assez grand}$$

Nous allons montrer que ces conditions sont "presque" suffisantes. En fait si φ vérifie (3) et si

(4) il existe $\varepsilon > 0$ et r_o tels que $f(x) \leq -\varepsilon$ pour $|x| \geq r_o$, alors (1) admet une solution à support compact.

Plus généralement, soit L l'opérateur

$$L = -\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a$$

On suppose que

(5) $$a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ , } a_{ij} \text{ , } a_i \text{ , } a \in L^\infty(\Omega)$$

(6) $$\sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha(r) |\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega \text{ , } |x| \leq r \text{ , } \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \text{avec} \quad \alpha(r) > 0 \quad \forall r \text{ ,}$$

(7) $$a(x) \geq \delta > 0 \quad \forall x \in \Omega \text{ .}$$

Soit β un graphe maximal monotone de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; on pose $\beta(o) = [\gamma^- , \gamma^+]$.

Question Trouver des conditions sur f et φ qui assurent que la solution u du problème

$$(8)\qquad \begin{cases} Lu + \beta(u) \ni f & \text{sur } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

est à support compact.

Notons que cette formulation englobe le problème (1) ; il suffit de prendre $L = -\Delta + I$ et $\beta(r) = 0$ si $r > 0$, $\beta(0) =]-\infty, 0]$.

Ici aussi on voit apparaître les conditions nécessaires (3) et

$$(9)\qquad f(x) \in [\gamma^-, \gamma^+] \quad \text{pour } |x| \text{ assez grand .}$$

Réciproquement, on a le

THEOREME 1. Soit $\varphi \in C^2(\partial\Omega)$, φ à support compact, avec $\beta^\circ(\varphi) \in L^\infty(\partial\Omega)$.

Soit $f \in L^\infty{}_{loc}(\Omega)$ vérifiant

(10) il existe $\varepsilon > 0$ et r_0 tels que $f(x) \in [\gamma^- + \varepsilon, \gamma^+ - \varepsilon]$ pour $|x| \geq r_0$.

Alors (8) admet une solution unique u , à support compact avec $u \in W^{2,p}(\Omega)$ pour tout $p < +\infty$.

On en déduit aussitôt que sous les hypothèses (3) et (4) , le problème (1) admet une solution à support compact.

Le corollaire suivant en découle aussi aisément

COROLLAIRE 1. Soit $\varphi \in C^2(\partial\Omega)$, φ à support compact. Alors il existe une solution unique u à support compact, du problème

$$(11)\qquad \text{Min}\left\{ \int_\Omega \left(\tfrac{1}{2} |\text{grad}\, u|^2 + \tfrac{1}{2} |u|^2 + |u| \right) dx \; ; \; u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

En effet, il suffit d'appliquer le Théorème 1 avec $f = 0$, $L = -\Delta + I$ et $\beta(r) = +1$ si $r > 0$ $\beta(r) = -1$ si $r < 0$, $\beta(0) = [-1, +1]$.

Plus généralement, le problème

$$\text{Min}\left\{ \int_\Omega \left(\tfrac{1}{2} |\text{grad}\, u|^2 + \tfrac{1}{2} |u|^2 \right) dx + \left(\int_\Omega |u| dx \right)^p \; ; \; u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

admet une solution à support compact. Il suffit d'appliquer le Théorème 1 avec $f = 0$, $L = -\Delta + I$ et $\beta(r) = +C$ si $r > 0$, $\beta(r) = -C$ si $r < 0$, $\beta(0) = [-C, +C]$ et $C = p\left(\int_\Omega |u| dx \right)^{p-1}$.

<u>Remarque 1</u>. La conclusion du Théorème 1 peut être comparée aux résultats obtenus par Auchmuty-Beals [1], Berkovitz - Pollard [2], R. Redheffer [4].

<u>Principe de la démonstration du Théorème 1</u>. On établit une estimation à priori sur le support de u en construisant une sur-solution et une sous-solution à supports compacts. Le problème de l'existence et de l'unicité se ramène alors

au cas du domaine borné pour lequel on a des résultats. Une sur-solution v est une fonction telle que

(12) $$Lv + \beta(v) \ni g \quad \text{sur } \Omega \quad \text{avec} \quad g \geqq f \quad \text{sur } \Omega$$

(13) $$v \geqq \varphi \qquad \text{sur } \partial\Omega$$

Nous allons montrer que l'on peut fabriquer une fonction v de la forme $v(x) = G(|x|)$ où

$$G(r) = \begin{cases} -\dfrac{\lambda r^2}{2} + C & 0 \leqq r \leqq r_o \\ \dfrac{\mu}{2}(r - R)^2 & r_o \leqq r \leqq R \\ 0 & r \geqq R \end{cases}$$

Les paramètres λ, μ, R; C sont à notre disposition. Exprimons d'abord la condition de contact au premier ordre en $r = r_o$

(14) $$-\frac{\lambda}{2} r_o^2 + C = \frac{\mu}{2}(r_o - R)^2$$

(15) $$-\lambda r_o = \mu(r_o - R)$$

Pour satisfaire (13), il suffit de supposer que

(16) $$-\frac{\lambda r_o^2}{2} + C \geqq \operatorname*{Max}_{\partial\Omega} \varphi = N\ .$$

Distinguons 3 régions

Région I $= \{x \in \Omega \ , \quad |x| \leqq r_o\}$

Région II $= \{x \in \Omega \ , \quad r_o \leqq |x| \leqq R\}$

Région III $= \{x \in \Omega \ , \quad |x| \geqq R\}$

Sur I, on a $v > 0$, donc $\beta(v) \geqq \gamma^+$ et il suffit de choisir v vérifiant

(17) $$Lv + \gamma^+ \geqq \operatorname*{Max}_{I} f = M.$$

Sur II, on a encore $\beta(v) \geqq \gamma^+$, mais comme $f \leqq \gamma^+ - \varepsilon$, il suffit de choisir v vérifiant

(18) $$Lv \geqq -\varepsilon$$

Sur III, $v = 0$, $Lv = 0$ et (12) est satisfait avec $g = f$.

Les calculs déterminant λ, μ, R; et C étant assez fastidieux dans le cas général, nous nous limiterons au cas où $L = -\Delta + \delta I$. On a alors

$$Lv = -G'' - \frac{(n-1)}{r}G' + \delta G\ .$$

Sur I, il vient

$$Lv = n\lambda + \delta \left[-\frac{\lambda}{2}|x|^2 + C \right] \geqq M - \gamma^+ \quad \text{pour} \quad 0 \leqq |x| \leqq r_o$$

i.e.

$$n\lambda + \delta \left[-\frac{\lambda}{2} r_o^2 + C \right] \geqq M - \gamma^+ \quad . \tag{19}$$

Sur II, il vient

$$Lv = -n\mu + (n-1)\mu\frac{R}{|x|} + \frac{\delta\mu}{2}(|x| - R)^2 \geqq -\varepsilon \quad \text{pour} \quad r_o \leqq |x| \leqq R$$

i.e.

$$\mu \leqq \varepsilon \tag{20}$$

On choisit alors $\mu = \varepsilon$ et R assez grand pour que

$$\frac{\varepsilon}{2}(R - r_o)^2 \geqq N \tag{21}$$

$$n\varepsilon\left(-1 + \frac{R}{r_o}\right) + \frac{\delta\varepsilon}{2}(R - r_o)^2 \geqq M - \gamma^+ \tag{22}$$

Enfin, λ et C se déduisent des équations (15) et (14).

<u>Remarque 2</u>. L'Hypothèse (9) (condition nécessaire) n'est pas suffisante pour conclure que le support de u est compact. Même la condition $\gamma^- < f(x) < \gamma^+$ pour $|x| \geqq r_o$, n'est pas suffisante. Par exemple $u(x) = e^{-kx}$ $(k > 1)$ vérifie sur $\Omega = [o, +\infty[$ l'équation $-u'' + u + \beta(u) \ni (1 - k^2)e^{-kx}$ où $\beta(r) = 0, r > 0$, $\beta(0) =]-\infty, 0]$.

Néanmoins, si $\gamma^- < f(x) < \gamma^+$ pour $|x| \geqq r_o$ et si $f(x)$ ne converge pas "trop rapidement" vers γ^+ ou γ^- quand $|x| \to +\infty$; alors u est encore à support compact. Plus précisément la conclusion du Théorème 1 est encore valable si l'on remplace l'hypothése (10) par

$$\begin{cases} \forall\omega > 0 & \lim\limits_{|x| \to +\infty} e^{\omega|x|}(f(x) - \gamma^+) = -\infty \\ \forall\omega > 0 & \lim\limits_{|x| \to +\infty} e^{\omega|x|}(f(x) - \gamma^-) = +\infty \ . \end{cases} \tag{23}$$

Dans certains cas l'hypothèse (7) peut être affaiblie. Nous indiquons maintenant quelques résultats valables pour $L = -\Delta$.

<u>Théorème 2.</u> Soit $\varphi \in C^2(\partial\Omega)$, φ à support compact avec $\beta^\circ(\varphi) \in L^\infty(\partial\Omega)$. Soit $f \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ vérifiant

$$\overline{\lim_{|x| \to +\infty}} |x|^n(f(x) - \gamma^+) < 0. \tag{24}$$

$$\underline{\lim}_{|x| \to +\infty} |x|^n(f(x) - \gamma^-) > 0.$$

Alors le problème

$$- \Delta u + \beta(u) \ni f \quad \text{sur} \quad \Omega, \; u = \varphi \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

admet une solution unique à support compact.

Pour la démonstration, cf. [3].

Remarque 3. L'hypothèse (24) est en quelque sorte optimale. En effet si $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $\beta(r) = 0 \quad r > o$, $\beta(o) =]-\infty, o]$, alors pour tout $q > n$, il existe M et r_o tels que le problème $-\Delta u + \beta(u) \ni f$ sur $\mathbb{R}^n$

avec
$$f(x) = \begin{cases} M & |x| \leqq r_o \\ -\frac{1}{|x|^q} & |x| > r_o \end{cases}$$

n'admette pas de solution à support compact.

Remarque 4 . Les techniques précédentes peuvent être adaptées à certains problèmes d"évolution.

Ainsi, soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soit u la solution du problème.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \beta(u) \quad f \ni & \text{sur} \quad \Omega \times]0, +\infty[\\ u(x, t) = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times]0, +\infty[\\ u(x, 0) = u_o(x) & \text{sur} \quad \Omega . \end{cases}$$

On suppose que $u_o(x) \in L^\infty(\Omega)$ et que il existe $\varepsilon > 0$ et t_o tels que

$$\gamma^- + \varepsilon \leqq f\,(x, t) \leqq \gamma^+ - \varepsilon \quad \text{pour} \quad x \in \Omega, \; t \geqq t_o.$$

Alors il existe T tel que $u(x,t) = 0$ pour $x \in \Omega$, $t \geqq T$.

On a même une variante abstraite de ce résultat. Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H.

On considére le problème

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f \quad \text{sur} \quad [0, +\infty[\quad , \quad u(0) = u_o.$$

On suppose qu'il existe t_o et $\rho(t)$ tels que

$$B(f(t), \rho(t)) \subset A0 \quad \text{et} \quad \int_{t_o}^{+\infty} \rho(s)ds = +\infty$$

Alors il existe T tel que $u(t) = 0$ pour $t \geqq T$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. AUCHMUTY - R. BEALS, Variational solutions of some non linear free boundary value problems, Arch. Rat. Mech. Anal. 43 (1971) p. 255-271.

[2] L. BERKOVITZ - H. POLLARD, A non classical variational problem arising from an optimel filter problem, Arch. Rat. Mech. Anal. 26 (1967) p. 281-304.

[3] H. BREZIS (à paraître Uspekhi Mat. Nank).

[4] R. REDHEFFER, On a non linear functional of BERKOVITZ and POLLARD, Arch. Rat. Mech. Anal. 50 (1973) p. 1 - 9.