Claude Bardos

Comportement asymptotique de la solution d'un système hyperbolique

Séminaire Jean Leray, nº 1 (1973-1974), exp. nº 1, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1973-1974___1_A1_0>

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SOLUTION
D'UN SYSTÈME HYPERBOLIQUE

par Claude BARDOS

On se place dans R^n (n impair) et on désigne par $A=(A_1,A_2,\dots,A_n)$ n $p\times p$ matrices à coefficients complexes, constants. On notera $A.\nabla$ l'opérateur différentiel $A.\nabla = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. On suppose que l'opérateur $A.\nabla$ est hyperbolique, c'est-à-dire que pour tout $\xi\in R^n \setminus \{0\}$ les valeurs propres $\lambda_k(\xi)$ de la matrice $A.\xi = \sum_{i=1}^{n} A_i.\xi_i$ sont réelles. Le problème de Cauchy

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} + A\nabla u = 0 \quad \text{dans} \quad R^n\times R_t \; , \; u(.,0) = f(.)\in S'(R^n)$$

est alors bien posé et admet une unique solution que l'on notera $e^{-tA\nabla}f$.

On se propose d'étudier le comportement asymptotique de cette solution, principalement lorsque f est à support compact. Pour cela on fait les hypothèses suivantes :

(h.1) Les valeurs propres sont données par k fonction analytique $(1 \leq k \leq p)$ (qui peuvent éventuellement coïncider en certains points de $R^n \setminus \{0\}$)

(h.2) S'il existe $\xi_o \in R^n \setminus \{0\}$ tel que $\lambda_k(\xi_o) = 0$ alors λ_k est identiquement nulle, ceci implique que la dimension du noyau de $A.\xi$ est constante.

(h.3) Il existe une matrice $P(\omega)$ définie sur S^{n-1} , sphère unité de R^n , analytique en ω , inversible, telle que l'on ait :

(2) $$P(\omega)\; A.\omega\; P^{-1}(\omega)=\begin{pmatrix} \lambda_1(\omega) & & & 0 \\ & \lambda_2(\omega) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_p(\omega) \end{pmatrix}$$

[Dans la plupart des calculs il sera seulement nécessaire de supposer que les fonctions $\lambda_k(.)$ et les matrices $p(\omega)$ appartiennent à $C^m(S^{n-1})$ (m assez grand) pour simplifier on prendra alors $\lambda_k(.)$, $p(.)$ dans $C^\infty(S^{n-1})$, mais un théorème d'ARTIN [1] permet alors d'affirmer que ces fonctions sont analytiques].

On dira qu'une distribution $f\in S'(R^n)$ est stationnaire si elle vérifie $A\nabla f = 0$, on dira qu'elle est non stationnaire si elle vérifie la relation

$$< f \;,\; A^*\nabla\varphi > = 0 \quad \forall\varphi\in (S(R^n))^p .$$

Toute distribution f se décompose de manière unique en la somme d'une distribution stationnaire et d'une distribution non stationnaire $f = f\ \text{stat} + f\ \text{non stat}$. Comme on a $e^{-tA.\nabla}(f\ \text{stat}) = f\ \text{stat}$, on se limitera à l'étude des distributions non stationnaires.

Les fonctions $\lambda_k(\xi)$ sont homogènes de degré 1, nous supposerons que :

(h.4) Les fonctions $\xi \to \lambda_k(\xi)$ $(1 \leq k \leq p,\ \lambda_k \neq 0)$ sont strictement convexes. Ainsi les surfaces

$$\partial\Lambda_k = \{ \frac{1}{\lambda_k(\omega)} . \vec{\omega}\ |\ \omega \in S^{n-1}\} \quad (1 \leq k, \leq p,\ \lambda_k \neq 0)$$

sont strictement convexes. La surface :

$$\bigcup_{\substack{0 \leq k \leq p \\ \lambda_k \neq 0}} \partial\Lambda_k$$

sera alors dite surface de lenteur.

∂W_k, polaire de la surface $\partial\Lambda_k$, enveloppe des hypersurfaces

$$\pi(\omega) = \{x | x.\omega = \lambda_k(\omega)\} ,$$

est alors également strictement convexe, et on a les relations :

$$\max|\lambda_k(\omega)| = \max \{|\xi|,\ \xi \in \partial W_k\}$$

$$\min|\lambda_k(\omega)| = \min \{|\xi|,\ \xi \in \partial W_k\} \quad (\lambda_k \neq 0) .$$

On désignera par ε et Λ les nombres :

$$\varepsilon = \inf_{\lambda_k \neq 0} \{|\lambda_k(\omega)|,\ \omega \in S^{n-1}\}$$

$$\Lambda = \max \{|\lambda_k(\omega)|,\ \omega \in S^{n-1}\}$$

Voici maintenant des Théorèmes :

THÉORÈME 1. <u>On suppose que</u> $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ <u>est une distribution non stationnaire dont le support est contenu dans</u> B_R [1], <u>alors le support de</u> $e^{-tA.\nabla}f$ <u>est contenu dans</u>

$$\Sigma(t) = \{x | \varepsilon t - R < |x| < \Lambda t + R\} .$$

---

[1] $B_R = \{x|\ |x| < R\}$.

THÉORÈME 2. On suppose que f est une distribution non stationnaire dont le support singulier est $\{0\}$ alors le support singulier de la distribution $e^{-tA.\nabla}f$ est contenu dans la surface $t(\bigcup_k \partial W_k)$.

THÉORÈME 3. Il existe une constante C indépendante de f et de t , telle que pour tout $f \in [W^{1,(n+1)/2}(\mathbb{R}^n)]^p$ on ait

(3) $$\|e^{-tA.\nabla}f\|_{(L^\infty(\mathbb{R}^n))^p} \leq Ct^{-(n-1)/2}\|f\|_{W^{1,(n+1)/2}}$$

THÉORÈME 4. On suppose que $f \in (L^1(\mathbb{R}^n))^p$ est une fonction non stationnaire à support contenu dans B_R . Soient $\theta, z \in \mathbb{R}^n$, $\theta \notin \bigcup_k \partial W_k$, alors il existe une constante dépendant de θ; z et R telle que l'on ait :

(4) $$|(e^{-tA.\nabla}f)(t\theta + z)| \leq C(R,\theta,z)t^{-n}\|f\|_{(L^1(\mathbb{R}^n))^p} .$$

Enfin nous supposerons que les matrices A_i sont hermitiennes et que les valeurs propres sont indépendantes de ω (cf. opérateur de Maxwell par exemple). Comme $A.\omega$ est une fonction impaire de ω , pour tout k , λ_k et $-\lambda_k$ sont des valeurs propres. Aussi on écrit $\mu_j = |\lambda_k|$ et on a les inégalités suivantes :

$$0 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_\ell \quad (\ell \leq p/2) .$$

Dans cette situation nous avons le théorème suivant

THÉORÈME 5. Soit $0 < \mu_j < \mu_{j+1}$ deux valeurs absolues successives, de valeurs propres de $A.\omega$. Soit f une fonction non stationnaire à support dans B_R . On suppose que f appartient à $L^1(\mathbb{R}^n))^p$.

Soit $\rho > 2R$, $t > 2R/\mu_j$, $t > (\rho+R)/(\mu_{j+1}-\mu_j)$, $\Sigma(t) = \{x \mid \rho+\mu_j t < |x| < \mu_{j+1} t-R\}$ alors

(5) $$\int_{\Sigma(t)} |(e^{-tA.\nabla}f)(x)|^2 dx \leq \frac{c}{\rho^n} \|f\|_{(L^1(\mathbb{R}^n))^p} .$$

où c est une constante indépendante de f et de t .

Dans (5) on désigne par $|\ |$ la norme euclidienne dans $\mathbb{C}^p$. En utilisant la propriété de conservation de l'énergie des systèmes symétriques, on déduit du théorème 5 le résultat suivant :

THÉORÈME 6. Sous les hypothèses du théorème 5 il existe une constante $C > 0$ indépendante de f et de t telle que l'on ait

(6) $$|e^{-tA.\nabla}f|_{(L^\infty(\mathbb{R}^n))^p} \geq c\, t^{-(n-1)/2} .$$

Les théorèmes 1 et 2 sont classiques ; on les cite ici pour les comparer aux théorèmes 3, 4 et 5 qui montrent que "la solution d'un problème de Cauchy avec données régulières se propage comme les singularités de la solution d'un problème de Cauchy à données singulières à l'origine." Le théorème 3 est dû à D. GOLDSTEIN COSTA [ ], les théorèmes 4, 5 et 6 ont été établis par D. GOLDSTEIN COSTA en collaboration avec l'Auteur.

Les démonstrations utilisent la transformation de RADON. La transformation de RADON associe à une fonction définie sur R^n une fonction impaire définie sur $\mathbb{R} \times S^{n-1}$. Elle est donnée par la formule

(7) $$\hat{f}(s,\omega) = \int_{x.\omega=s} f(y)\, dy .$$

Nous utiliserons les relations suivantes :

(8) $$\widehat{\frac{\partial}{\partial x_i} f} = \omega_i \frac{\partial \hat{f}}{\partial s} , \widehat{\Delta f} = \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial s^2} .$$

et la formule inverse :

(9) $$\int_{S^{n-1}} f(x.\omega,\omega) d\omega = c(n) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|} f(x-y)\, dy .$$

($C(n)$ désignera par la suite différentes constantes ne dependant que de n) .

Quand n est impair on a $\Delta^{(n-1)/2} (\frac{1}{|y|}) = C(n)\, \delta$; et ainsi on obtient :

(10) $$\Delta^{(n-1)/2}\left[\int_{S^{n-1}} \hat{f}(x.\omega,\omega) d\omega \right] = c(n) f\,(x) .$$

Lorsque n est pair, la formule (9) reste valable ; dans la formule (10) il convient de remplacer $\Delta^{(n-1)/2}$ par $(-\Delta)^{(n-1)/2}$, on obtient alors un opérateur pseudo différentiel qui n'est plus local, c'est pourquoi les propriétés de décroissance locale ne sont plus vraies en dimension paire.

$\hat{u} = \widehat{e^{-tA.\nabla} f}$ est la solution de l'équation

(11) $$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + A.\omega \frac{\partial \hat{u}}{\partial s} = 0 ,$$

On note $p_{ij}(\omega)$, $p^{-1}_{ij}(\omega)$ les coefficients des matrices $P(\omega)$, $P^{-1}(\omega)$

et on pose $\hat{v}(s,\omega,t) = P(\omega)\hat{u}(s,\omega,t)$ l'équation (11) s'écrit alors sous la forme :

$$\frac{\partial \hat{v}_k}{\partial t} + \lambda_k(\omega)\frac{\partial \hat{v}_k}{\partial s} = 0 \quad (1 \leq k \leq p) \quad ; \tag{12}$$

La solution de (12) est alors explicitement donnée par la formule :

$$\hat{v}_k(s,\omega,t) = \hat{v}_k(s - \lambda_k(\omega)t,\omega,0) \quad , \tag{13}$$

en revenant à $\hat{u}_k$ on en déduit l'expression :

$$\hat{u}(s,\omega,t) = \sum_{1\leq k\leq p} G_k(\omega)\hat{f}(s-\lambda_k(\omega)t,\omega) \tag{14}$$

où

$$G_k(\omega) = [p_{ik}(\omega)\ p^{-1}_{kj}(\omega)] \quad .$$

Comme on a supposé que f est non stationnaire, on a :

$$\hat{u}(s,\omega,t) = \sum_{\substack{1\leq k\leq p\\ \lambda_k\neq 0}} G_k(\omega)\hat{f}(s-\lambda_k(\omega)t,\omega) \tag{15}$$

et

$$u(x,t) = c(n)(\Delta)^{(n-1)/2}\int_{S^{n-1}} \sum_{\substack{1\leq k\leq p\\ \lambda_k\neq 0}} G_k(\omega)\hat{f}(x\cdot\omega-\lambda_k(\omega)t,\omega)d\omega \tag{16}$$

Tous les résultats seront déduits de cette formule. On remarque déjà que si $|x| < \varepsilon t - R$ on a :

$$|x\cdot\omega - \lambda_k(\omega)t| > R \quad \text{et} \quad \hat{f}(x\cdot\omega - \lambda_k(\omega)t,\omega) = 0$$

(dans la situation du théorème 1) car la transformation de Radon préserve les supports. On a ainsi démontré la première partie du théorème 1 . On note ensuite

$$T_k(t)(\cdot) \quad \text{et} \quad T_k(\cdot) = T_k(1)(\cdot)$$

les distributions

$$< T_k(t)(\cdot)\ ,\ f > = c(n)\int_{S^{n-1}} G_k(\omega)\left(\int_{x\cdot\omega=\lambda_k(\omega)t} f(x)dx\right)d\omega \ .$$

On a :

$$\int_{S^{n-1}} G_k(\omega)\hat{f}(x\cdot\omega - \lambda_k(\omega)t,\omega)d\omega$$

$$= \int_{S^{n-1}} G_k(\omega) \left(\int_{y\cdot\omega=x\cdot\omega-\lambda_k(\omega)t} f(y)dy \right) d\omega$$

$$= \int_{S^{n-1}} G_k(\omega) \left(\int_{(x-y)\cdot\omega=\lambda_k(\omega)t} f(y)dy \right) d\omega$$

et ainsi il vient :

(17) $$u(.,t) = c(n)(\Delta)^{(n-1)/2} \sum_{\lambda_k\neq 0} T_k(t)(.)* f(.) \quad .$$

D'autre part on a :

(18) $$T_k(t)(.) = \frac{1}{t}\; T_k\left(\frac{\cdot}{t}\right) \quad .$$

En effet on peut écrire :

$$\int_{S^{n-1}} G_k(\omega)\left(\int_{x\cdot\omega = \lambda_k(\omega)t} f(x)dx\right) d\omega$$

$$= t^{n-1} \int_{S^{n-1}} G_k(\omega) \left(\int_{\xi\cdot\omega=\lambda_k(\omega)} f(t\xi)d\xi\right) d\omega$$

$$= t^{n-1} < T_k(.) \quad , \quad f(t.) >$$

$$= \frac{1}{t} < T_k\left(\frac{\cdot}{t}\right) \quad , \quad f(.) > \quad .$$

On obtient ainsi la formule

(19) $$u(.,t) = \frac{1}{t} \sum_{\lambda_k\neq 0} (\Delta)^{(n-1)/2} \; T_k\left(\frac{\cdot}{t}\right)* f \quad .$$

On étudie ensuite la distribution T_k . La stricte convexité de la surface ∂W_k joue ici un rôle important en particulier pour tout $\sigma\in\partial W_k$ il existe un unique $\omega(\sigma)\in S^{n-1}$ tel que l'on ait :

$$\sigma\cdot\omega(\sigma) = \lambda(\omega(\sigma)) \quad .$$

Désignons par W_k l'intérieur de ∂W_k ; pour tout $x\notin W_k$ on note $\Gamma(x)$ la courbe $\Gamma(x) = \{\sigma\in\partial W_k \mid (x-\sigma)\omega(\sigma) = \lambda_k(\omega(\sigma))\}$ $\Gamma(x)$ est une variété analytique de dimension $(n-2)$ et on prouve (Cf. D. GOLOSTEIN COSTA [ ]) que $T_k(.)$ est une fonction donnée par la formule :

$$(20) \qquad T_k(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad x \in W_k \\ \dfrac{1}{|x|} \displaystyle\int_{\Gamma(x)} \dfrac{G_k(\omega(\sigma))h(\sigma)\, d\sigma}{\left(1-\left(\frac{x\cdot\sigma}{|x||\sigma|}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

où $h(\sigma)$ est une fonction analytique définie sur ∂W_k .

De la formule (20) on peut déduire que T_k est analytique partout sauf sur ∂W_k et décroit uniformément, ainsi que toutes ses dérivées, lorsque $|x| \to \infty$. Enfin D. GOLDSTEIN COSTA a montré que toutes les dérivées de T_k jusqu'à l'ordre $(n-3)/2$ sont uniformément bornées.

On écrit donc enfin :

$$(21) \qquad u(x,t) = \Delta^{(n-1)/2} \sum_{\substack{k \\ \lambda_k \neq 0}} \int_{\mathbb{R}^n} T_k\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y)dy \quad .$$

Pour terminer la démonstration du théorème 1 on remarque que u est analytique en dehors du cône $C = \{(x,t) |\ |x| < \Lambda t + R\}$. On en déduit alors la deuxième partie du théorème 1. De même l'énoncé du théorème 2 se démontre trivialement à partir des formules (20) et (21).

Prouvons le Théorème 3. On écrit :

$$\Delta^{(n-1)/2} \int \frac{1}{t} T_k \left(\frac{x-y}{t}\right) f(y)dy$$

$$\sum_{\alpha,\beta} \int_{\mathbb{R}^n} D^{\alpha}\left(T_k\left(\frac{x-y}{t}\right)\right) D^{\beta} f(y)dy \quad .$$

où les dérivées en α sont d'ordre $(n-3)/2$ et les dérivées en β d'ordre $(n+1)/2$. En utilisant le résultat de D. GOLDSTEIN COSTA on obtient :

$$|u(x,t)| \leq \frac{1}{t} \frac{1}{t^{(n-3)/2}} \sum_k \int_{\mathbb{R}^n} \left|(D^{\alpha}T_k)\left(\frac{x-y}{t}\right)\right| |D^{\beta} f(y)| dy$$

d'où l'on déduit le résultat du théorème 3.

Soit ensuite $\theta \in \cup\, \partial W_k$. On désigne par d la distance de θ à $\cup\, \partial W_k$;

soit f une fonction à support dans B_R . On choisit t tel que l'on ait $(|z|+R)/_t < d - 2\varepsilon$ et on pose $\eta = (d-\varepsilon) - (|z|+R)/_t$. Pour x tel que $|x - (t\theta + z)\theta < t\eta$ on a :

(22) $$\int_{\mathbb{R}^n} T_k(\tfrac{x-y}{t})\, f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} T_k(\tfrac{y}{t})\, f(x-y)dy \;.$$

$$= t^n \int_{\mathbb{R}^n} T_k(\xi)\, f(x-t\xi)d\xi \;.$$

$$= t^n \int_{|\frac{x}{t} - \xi| \leq R/_t} T_k(\xi)\, f(x-t\xi)d\xi \;.$$

Mais $$\{\xi \,|\, |\tfrac{x}{t} - \xi| \leq R/_t\} \subset \{\xi \,|\, |\xi - \theta| < d - \varepsilon\}$$

sur ce domaine T_k est analytique et ses dérivées sont uniformément bornées. On déduit donc de (22) l'expression :

(23) $$(\Delta)^{(n-1)/2} \int_{\mathbb{R}^n} T_k(\tfrac{x-y}{t})\, f(y)dy$$

$$= t^n \int_{|\xi - \theta| < d-\varepsilon} T_k(\xi)\, \Delta_x^{(n-1)/2} f(x-t\xi)d\xi$$

$$= t^n\, \bar{t}^{(n-1)/2} \int_{|\xi-\theta| < d-\varepsilon} T_k(\xi)\, \Delta_\xi^{(n-1)/2} f(x-t\xi)d\xi$$

$$= t^{n-(n-1)/2} \int_{|\xi-\theta| < d-\varepsilon} \Delta_\xi^{(n-1)/2} T_k(\xi)\, f(x-t\xi)d\xi$$

Le théorème 4 en résulte immédiatement.

Prouvons le théorème 5 . Pour cela on revient à la formule (16) , en écrivant

(24) $$u_k(x,t) = \int_{S^{n-1}} G_k(\omega)\, \hat{f}_k\, (x.\omega - \lambda_k t, \omega)d\omega \;.$$

Pour $|\lambda_k| \geq \mu_{j+1}$ et $|x| < \mu_{j+1}\, t - R$ on a $|x.\omega - \lambda_k t| > R$ donc u_k est nul sur $\Sigma(t)$.

Il suffit donc d'évaluer

(25) $$\int_{\Sigma(t)} |u_k(t,x)|^2\, dx \leq \int_{|x| \geq \mu_j t + \rho} |u_k(t,x)|^2\, dx \;,$$

pour k vérifiant $|\lambda_k| \leq \mu_j$.

On remarque alors que u_k est solution d'une équation des ondes :

(26) $$u''_k - \lambda^2_k \Delta u_k = 0 \quad ,$$

il en est de même de $V_k(t,x) = \int_0^t u_k(s,x)ds + h_k$, où h_k est donné par la relation :

(27) $$h_k = -(\lambda_k)^{-1} \Delta^{(n-3)/2} \int_{S^{n-1}} G_k(\omega) \frac{\partial \hat{f}}{\partial s} (x.\omega,\omega)d\omega \quad .$$

En appliquant l'inégalité de l'énergie classique on obtient :

(28) $$\int_{|x| \geq \mu_j t + \rho} |u_k(t,x)|^2 \, dx$$

$$\leq \int_{|x| \geq \mu_j t + \rho} \left(|V'_k(t,x)^2 + |\nabla V_k(t,x)|^2 \right) dx$$

$$\leq \int_{|x| \geq \rho} \left(|u_k(0,x)|^2 + |\nabla h_k(x)|^2 \right) dx \quad .$$

Pour terminer on remarque que :

(29) $$u_k(0,x) = \Delta^{(n-1)/2} \int_{S^{n-1}} G_k(\omega)\hat{f}(x.\omega,\omega)d\omega \quad ,$$

$$\frac{\partial h_k}{\partial x_i} = (\Delta)^{(n-1)/2} \int_{S^{n-1}} \omega_i \, G_k(\omega)\hat{f}(x.\omega,\omega)d\omega \quad .$$

Ces expressions sont du même type :

$$(\Delta)^{(n-1)/2} \int_{S^{n-1}} h(\omega)\hat{f}(x.\omega,\omega)d\omega$$

ou $h(\omega)$ est une fonction analytique sur S^{n-1} .

En procédant comme dans HELGASON [3] on voit que l'on a :

(30) $$\int_{S^{n-1}} h(\omega)\hat{f}(x.\omega,\omega)d\omega = \frac{1}{|\cdot|} \tilde{h}\left(\frac{\cdot}{|\cdot|}\right) * f \quad .$$

où $\tilde{h}$ est définie par

$$\tilde{h}(\sigma) = \int_{S^{n-1} \cap \sigma \cdot \omega = 0} h(\omega)\, dS_{\omega}^{n-2} .$$

($\tilde{h}$ est la transformée de Radon de h sur la sphère).

En utilisant enfin le fait que le support de f est borné, on voit que pour $|x| > 2R$ on a (d'après (29) et (30)) :

(31) $$\left(|u_k(0,x)|^2 + |\nabla h_k(x)|^2 \right) \leqq \frac{c}{|x|^n} .$$

En reportant dans (31) on obtient le théorème 5.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ARTIN, On the solution of analytic equations Inventiones Math. 5, p. 277-291, 1968.

[2] D. GOLDSTEIN COSTA, The Uniform behavior of solution of linear hyperbolic equations for large time. Ph. D., Brown University, June 1973.

[3] S. HELGASON, The Radon Transform on Euclidean Spaces... Acta Math. 113 p. 93-106, 1965.