Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

JEAN LERAY

Solutions asymptotiques des équations aux dérivées partielles (une adaptation du traité de V. P. Maslov)

Séminaire Jean Leray (1972-1973), p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1972-1973____1_0>

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES*
(une adaptation du Traité de V.P. Maslov)

par Jean LERAY

Introduction

V.P. Maslov [1] a publié en 1965 un Traité des solutions asymptotiques, qu'un article de V.I. Arnold [2] a complété en 1967 ; J. Lascoux vient de les traduire [3].

Une solution asymptotique d'une équation se calcule par intégrations le long d'une famille de bicaractéristiques de cette équation (cf. Birkhoff, méthode BKW, Lax, Ludvig) ; elle a une singularité sur l'enveloppe de ces bicaractéristiques (par exemple, en optique, sur les caustiques) ; Maslov énonce une règle générale pour la prolonger au-delà de cette singularité ; cette règle de Maslov emploie un indice, dont Arnold explicite la définition en termes de topologie algébrique ; mais il reste à justifier cette règle.

Les opérateurs pseudo-différentiels, que nous introduisons au § 1, n° 5, permettent une telle justification ; nous l'esquissons ici (voir ci-dessous § 2). Nous l'expliciterons ailleurs [4], ainsi que l'application de la théorie de Maslov aux équations de Schrödinger et Dirac (voir ci-dessous § 3).

§ 1. Fonctions formelles sur R^ℓ .

1. CLASSES ASYMPTOTIQUES.- Dans $\mathbb{C}$, notons $\mathfrak{J}$ la demi-droite imaginaire

$$\mathfrak{J} = i[1, +\infty[\ .$$

Soit $H(X)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable $X \to C$; soit $\|\dots\|$ la norme de $H(X)$. Soit $\mathcal{C}(X)$ le groupe additif des fonctions continues et bornées

$$f : \mathfrak{J} \to H(X) \ .$$

L'équivalence asymptotique

$$f_1 \sim f_2$$

signifiera que, pour tout $N \in R$

$$\|f_1(\nu) - f_2(\nu)\| = O(\nu^{-N}) \ , \qquad (\nu \in \mathfrak{J}) \ .$$

La classe asymptotique de f sera notée $\tilde{f}(\nu)$; l'ensemble de ces classes est un groupe additif $\tilde{\mathcal{A}}(X)$.

*) A paraître dans Convegno internazionale Metodi valutativi nelle fisica-matematica ; Accad. Naz. dei Lincei, Roma, 1972.

Si $\ell = 0$, $H(X) = \mathbb{C}$; $\mathcal{C}(X)$ est l'algèbre $\mathcal{C}$ des fonctions continues et bornées $f : \mathfrak{I} \to \mathcal{C}$; $\tilde{\mathcal{A}}(X)$ est une algèbre, notée $\tilde{\mathcal{A}}$.

Les classes asymptotiques des fonctions

$$\nu \longmapsto \int_X f_1(x,\nu) f_2(x,\nu) d^\ell x \ , \qquad \text{où} \qquad x = (x_1, \dots, x_\ell) \quad \text{et} \quad d^\ell x = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_\ell$$

$$\nu \longmapsto (f_1, f_2) = \int_X f_1(x,\nu) \overline{f_2(x,\nu)}\, d^\ell x \ ,$$

$$\nu \longmapsto \|f(\nu)\|$$

ne dépendent que des classes de f_1 , f_2 , f et sont notées :

$$\tilde{\int}_X f_1(x,\nu) f_2(x,\nu) d^\ell x = \int_X \tilde{f}_1(\nu) \tilde{f}_2(\nu) d^\ell x \ \in \tilde{\mathcal{A}} \ ,$$

$$\widetilde{(f_1, f_2)} = \left(\tilde{f}_1(\nu), \tilde{f}_2(\nu) \right) \in \tilde{\mathcal{A}} \ ,$$

$$\|\tilde{f}(\nu)\| \in \tilde{\mathcal{A}} \quad .$$

L'opérateur $\tilde{\int} \dots d^\ell x$ est nommé intégrale asymptotique.

Soit P le dual de X ; la valeur de x en $p = (p_1, \dots, p_\ell) \in P$ est notée

$$< p, x > = p_1 x_1 + \dots + p_\ell x_\ell \ .$$

Avec Maslov, nous nommons transformation de Fourier la bijection

$$\mathcal{F} : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(P)$$

définie, quand $f(\nu)$ est à support compact, par

$$(1.1) \qquad (\mathcal{F}f)(p,\nu) = \left(-\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\ell/2} \int_X e^{-\nu <p,x>} f(x,\nu) d^\ell x \quad ;$$

on sait qu'elle est unitaire pour tout ν

$$(1.2) \qquad \|(\mathcal{F}f)(\nu)\| = \|f(\nu)\| \ , \ (\mathcal{F}f_1, \mathcal{F}f_2) = (f_1, f_2) \qquad ;$$

quand $g(\nu)$ est à support compact, on a :

$$(1.3) \qquad (\mathcal{F}^{-1} g)(x,\nu) = \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\ell/2} \int_P e^{\nu <p,x>} g(p,\nu) d^\ell p \ ;$$

dans les formules (1.1) et (1.3), $(-\nu)^{\ell/2}$ et $\nu^{\ell/2}$ sont des nombres complexes conjugués, d'arguments respectifs $-\pi\ell/4$ et $\pi\ell/4$.

Puisqu'elle est unitaire, l'application $\mathcal{F}$ induit une bijection unitaire

$$\tilde{\mathcal{F}} : \tilde{\mathcal{A}}(X) \to \tilde{\mathcal{A}}(P) \ ;$$

$$\|\tilde{\mathcal{F}}\tilde{f}(\nu)\| = \|\tilde{f}(\nu)\| \in \tilde{\mathcal{A}}, \quad (\tilde{\mathcal{F}}\tilde{f}_1(\nu), \tilde{\mathcal{F}}\tilde{f}_2(\nu)) = (\tilde{f}_1(\nu), \tilde{f}_2(\nu)) \in \tilde{\mathcal{A}}$$

On nomme $\tilde{\mathcal{F}}$ <u>transformation de Fourier asymptotique</u>.

2. FONCTIONS ν-FORMELLES.- Supposons que f possède les propriétés suivantes : Supp $(f(\nu))$ appartient à un compact de X indépendant de ν ; il existe des fonctions <u>indéfiniment différentiables</u>

$$\alpha_{jrN} : X \to \mathbb{C} \quad , \quad \varphi_{jN} : X \to \mathbb{R}$$

$$(j \in J \ , \ J \text{ fini} \ ; \ 0 \leqq r < N \ , \ r \text{ et } N \text{ entiers})$$

telles que, pour tout N

$$\|f(\nu) - \sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{\nu^r} \sum_{j\in J} \alpha_{jrN}\, e^{\nu\varphi_{jN}}\| = O(\nu^{-N}) \ ;$$

alors, pour chaque valeur de r , la fonction de ν

$$\nu \longmapsto u_r(\nu) = \sum_{j\in J} \alpha_{jrN}\, e^{\nu\varphi_{jN}} \in H(X)$$

est définie sans ambiguité par la donnée de f et est donc indépendante de N ; nous choisirons des α_{jrN} et φ_{jN} indépendants de N , que nous noterons α_{jr} et φ_j ; nous désignerons la classe asymptotique $u(\nu)$ de f par les symboles, où les $\sum_r$ représentent des sommes formelles :

$$(2.1) \qquad u(\nu) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{u_r(\nu)}{\nu^r} \ , \qquad \text{où } u_r(\nu) = \sum_{j\in J} \alpha_{jr}\, e^{\nu\varphi_j} \ ;$$

$$= \sum_{j\in J} \alpha_j(\nu) e^{\nu\varphi_j} \ , \quad \text{où } \alpha_j(\nu) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\alpha_{jr}}{\nu^r} \ .$$

On prouve aisément que tout symbole (2.1) représente une telle classe asymptotique, quand il existe un compact K de X tel que

$$(2.2) \qquad (\forall r) \qquad \mathrm{Supp}(u_r(\nu)) \subset K \ ;$$

on nomme <u>fonctions</u> ν-<u>formelles</u> sur X ces classes asymptotiques. Elles constituent une <u>algèbre</u> $\mathcal{A}(X)$, dont le produit est défini par

$$\sum_r \frac{u'_r(\nu)}{\nu^r} \cdot \sum_r \frac{u''_r(\nu)}{\nu^r} = \sum_r \frac{u_r(\nu)}{\nu^r} \ , \quad \text{où } u_r = \sum_{s=0}^{r} u'_s \cdot u''_{r-s} \ .$$

On nomme Supp(u) l'intersection des K vérifiant (2.2). On munit $\mathcal{A}(X)$ de la <u>topologie</u> définie par le système fondamental de voisinages $V_{NMK\varepsilon}$ de O que voici :

$$u \in V_{NMK\varepsilon}$$

signifie que pour tout $\nu \in \mathfrak{I}$, tout $r \leq N$ et tout m tel que $|m| \leq M$,

$$\mathrm{Supp}(u_r(\nu)) \subset K \quad , \quad \left|\left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)^m u_r(x,\nu)\right| \leq \varepsilon \ .$$

Les fonctions φ_j et les fonctions formelles $\alpha_j(\nu)$ sont appelées <u>phases</u> et <u>amplitudes</u> de u, les amplitudes étant donc les fonctions formelles de phases nulles. La donnée de u ne définit pas de façon unique ses phases et amplitudes(1).

<u>Nombres</u> ν-<u>formels</u>.- Quand $\ell = \dim X = 0$, alors

$$\alpha_{jr} \in \mathbb{C} \quad , \quad \varphi_j \in \mathbb{R} \ ,$$

$u(\nu)$ est nommé <u>nombre</u> ν-<u>formel</u> ; l'algèbre des nombres formels est notée $\mathcal{A}$.

Une fonction formelle sur X est donc une application indéfiniment différentiable, à support compact :

$$u : X \to \mathcal{A}.$$

3. INTÉGRALE ASYMPTOTIQUE.- Soit $u(\nu) \in \mathcal{A}(X)$; rappelons que

$$(3.1) \qquad \tilde{\int}_X u(\nu) d^\ell x \in \tilde{\mathcal{A}} \ .$$

En général, ce résultat peut être précisé par "la méthode de la phase stationnaire", qui est une méthode classique de calcul de développements asymptotiques. Soit K_j l'ensemble des points critiques(2) de φ_j appartenant à $\mathrm{Supp}(u)$. Faisons l'hypothèse de <u>non dégénérescence</u> :

(3.2) <u>Aucun</u> K_j <u>ne contient de point critique dégénéré</u>.

Alors on peut préciser (3.1) comme suit :

---

(1) En particulier si deux phases sont égales sur un domaine de X les deux amplitudes correspondantes ne sont pas définies de façon unique sur ce domaine.

(2) Un point critique de φ est un point annulant $\varphi_x = \mathrm{grd}\,\varphi$; il est dégénéré s'il annule aussi le hessien de φ :

$$\mathrm{Hess}\,\varphi = \det_{h,k} |\varphi_{x_h x_k}| \ .$$

(3.3) $$\left(-\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{\ell}{2}} \tilde{\int}_X u(\nu) d^\ell x \in \mathcal{A} \;;$$

en outre $\tilde{\int}_X \ldots d^\ell x$ est alors un opérateur <u>local</u>. En effet : il est linéaire; si tous les K_j sont vides, $\tilde{\int}_X u(\nu) d^\ell x = 0$;

si

(3.4) $$u(\nu) = \alpha(\nu) e^{\nu\varphi} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\alpha_r}{\nu^r} e^{\nu\varphi}$$

a une seule phase φ , possédant un seul point critique y , alors

$$\left(-\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{\ell}{2}} \tilde{\int}_X u(\nu) d^\ell x$$

a aussi une seule <u>phase</u>, qui est la <u>valeur critique</u> $\varphi(y)$; plus précisément

(3.5) $$\left(-\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{\ell}{2}} \tilde{\int}_X u(\nu) d^\ell x = \beta(y,\nu)\, e^{\nu\varphi(y)} \in \mathcal{A} \quad ,$$

l'amplitude β ayant l'expression

(3.6) $$\beta(x,\nu) = [\text{Hess}\ \varphi]^{-\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} P_r(\alpha,\varphi;x)[\nu\ \text{Hess}\ \varphi]^{-r} \quad ;$$

$P_r(\alpha,\varphi;x)$ est un polynome des dérivées en x des fonctions φ et α_s $(s \leq r)$; P est linéaire en α ; P ne dépend pas des valeurs de φ , ni de φ_x , en x ; par exemple

(3.7) $$P_o = \alpha_o \quad .$$

Précisons les conventions de signe qu'emploient (3.5) et (3.6) : d'une part

$$\arg(-\nu)^{\ell/2} = -\pi\ell/4 \;;$$

d'autre part, si nous notons Inert φ l'indice d'inertie de la forme quadratique(3)

$$\sum_{h,k} \varphi_{x_h x_k} \dot{x}_h \dot{x}_k \quad ,$$

nous avons

$$(-1)^{\text{Inert}\ \varphi}\ \text{Hess}\ \varphi > 0 \;,$$

(3) Par hypothèse, cette forme quadratique n'est pas dégénérée; elle vaut donc

$$-\sum_{k=1}^{n} L_k^2 + \sum_{h=n+1}^{\ell} L_h^2 \quad ,$$

les L_k et L_h étant ℓ formes linéaires indépendantes ; n est son indice d'inertie.

ce qui nous permet de définir

$$(3.8) \qquad [\mathrm{Hess}\ \varphi]^{\frac{1}{2}} = i^{\mathrm{Inert}\ \varphi}\, |\mathrm{Hess}\ \varphi|^{\frac{1}{2}} .$$

4. TRANSFORMÉE DE FOURIER ASYMPTOTIQUE.- Soit $u(\nu) \in \mathcal{A}(X)$; rappelons que

$$(4.1) \qquad \tilde{\mathcal{F}}\, u(\nu) \in \tilde{\mathcal{A}}(P) .$$

En général, vu (1.1), ce résultat peut être précisé au moyen des formules (3.5), (3.6) et (3.7). Notons φ_j les phases de $u(\nu)$; faisons l'hypothèse impliquant l'inversibilité locale de l'application $x \mapsto \mathrm{grd}\ \varphi_j$:

$$(4.2) \qquad (\forall\ j) \qquad \mathrm{Hess}\ \varphi_j \neq 0 \quad \text{sur} \quad \mathrm{Supp}(u) .$$

Alors on peut préciser (4.1) comme suit :

$$\tilde{\mathcal{F}}\, u(\nu) \in \mathcal{A}(P) ;$$

en outre $\tilde{\mathcal{F}}$ <u>opère localement sur</u> u . En effet $\tilde{\mathcal{F}}$ est linéaire ; $\mathrm{Supp}[\tilde{\mathcal{F}}u(\nu)$ appartient à l'image de $\mathrm{Supp}\ u$ par l'application

$$(4.3) \qquad X \ni x \longmapsto p = \varphi_x \in P \quad ;$$

supposons la restriction à $\mathrm{Supp}\ (u)$ de cette application bijective ; alors son inverse est l'application

$$(4.4) \qquad P \ni p \longmapsto x = -\ \psi_p \in X ,$$

ψ étant la fonction de p qui se définit comme suit :

$$(4.5) \qquad \psi(p) = \varphi(x) - \sum_{k=1}^{\ell} p_k\, x_k \qquad \text{pour} \qquad p = \varphi_x\ , \quad x \in \mathrm{Supp}(u)$$

ψ , qui se nomme <u>transformée de Legendre</u> de φ , est la phase de $\tilde{\mathcal{F}}\, u(\nu)$;

$$(4.6) \qquad \tilde{\mathcal{F}}\, u(\nu) = \gamma(\nu) e^{\nu\psi}$$

l'amplitude $\gamma(\nu)$ étant la composée de l'application (4.4) $p \longmapsto x = -\psi_p$ et de la fonction formelle $\beta(\nu) : x \longmapsto \mathcal{A}$ définie par (3.6).

<u>Note</u>.- On a

$$(4.7) \qquad \mathrm{Inert}\ \varphi + \mathrm{Inert}\ \psi = \ell \ ;\ [\mathrm{Hess}_x\ \varphi]^{\frac{1}{2}}\ [\mathrm{Hess}_p\ \psi]^{\frac{1}{2}} = i^{\ell} .$$

<u>Exemple</u>.- Si φ est un polynome sur X de degré 2 tel que $\mathrm{Hess}\ \varphi \neq 0$, son transformé de Legendre ψ est un polynome de degré 2 sur P ; $\mathrm{Hess}\ \varphi$ et $\mathrm{Hess}\ \psi$ sont deux constantes vérifiant (4.7) ; on a, en employant les opérateurs pseudo-différentiels (n° 5, ci-dessous) :

(4.8) $$\tilde{\mathcal{F}}[\alpha(\nu)e^{\nu\varphi}](p) = [\text{Hess }\varphi]^{-\frac{1}{2}} \alpha(-\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial p}, \nu)e^{\nu\psi(p)} .$$

Par exemple, si $\alpha = 1$ au voisinage du point critique de φ ,

(4.9) $$\tilde{\mathcal{F}}[\alpha(\nu)e^{\nu\varphi}] = [\text{Hess }\varphi]^{-\frac{1}{2}} e^{\nu\psi} .$$

C'est en généralisant la formule (4.8) qu'on réussit à calculer explicitement les polynomes P_r figurant dans (3.6).

5. OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS.- Soit a <u>un polynome</u> ν-<u>formel</u> sur $X \oplus P \oplus \ldots X \oplus P$, c'est-à-dire un polynome de $x,\ldots,x' \in X, p,\ldots,p' \in P$ ayant pour coefficients des nombres ν-formels :

$$a(x,p,\ldots,x',p',\nu) = \sum_{m,\ldots,n'} c_{m,n,\ldots,m',n'}(\nu)x^m p^n,\ldots,x'^{m'}p'^{n'}$$

où $m = (m_1,\ldots,m_\ell)$ est un ℓ-indice (m_k : entier ≥ 0) et où $x^m = x_1^{m_1} \ldots x_\ell^{m_\ell}$. Associons à ce polynome a l'opérateur différentiel

$$a_X : \mathcal{A}(X) \to \mathcal{A}(X)$$

défini(4) par les relations, où $u_X \in \mathcal{A}(X)$:

$$(a_X u_X)(x,\nu) = a(x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x},\ldots,x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})u_X(x,\nu)$$

$$= \sum_{m,\ldots,n'} c_{m,\ldots,n'}(\nu)x^m(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})^n[\ldots x^{m'}(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})^{n'}u_X(x,\nu)] .$$

Associons aussi à a l'opérateur

$$a_P : \mathcal{A}(P) \to \mathcal{A}(P)$$

défini par la relation, où $u_P \in \mathcal{A}(P)$:

$$(a_P u_P)(p,\nu) = a(-\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial p}, p,\ldots,-\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial p}, p)u_P(p,\nu) .$$

Ces opérateurs ont les propriétés suivantes classiques :

---

(4) Evidemment $\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x_k}$ applique $\mathcal{A}(X)$ dans $\mathcal{A}(X)$; mais $\frac{\partial}{\partial x_k}$ ne le fait pas.

$$(5.1)\begin{cases} a(\ldots,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x},x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x},\ldots,\nu) = b(\ldots,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x},\ldots,\nu) \\ b(\ldots,x,p,\ldots,\nu) = \sum_{m\in M}\left[\frac{1}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^m\left(\frac{\partial}{\partial q}\right)^m a(\ldots,x,q,y,p,\ldots,\nu)\right]_{\substack{y=x\\ q=p}} \end{cases}$$

(M désigne l'ensemble des ℓ-indices) ;

$$(5.2)\qquad \tilde{\mathcal{F}}[a_X u_X] = a_P\, \tilde{\mathcal{F}}\, u_X$$

$$(5.3)\quad a(x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x},\nu)u_X(x,\nu) = e^{\nu<p,x>}a(x,p+\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x},\nu)[e^{-\nu<p,x>}u_X(x,\nu)]\ .$$

La formule (5.3) et la formule de Taylor donnent la formule suivante, où

$$\rho\varphi(y,x) = \varphi(x) - \varphi(y) - \sum_{k=1}^{\ell}(x-y)_k\,\varphi_{y_k}(y)$$

est le reste en y de la formule de Taylor limitée à l'ordre 1 :

$$(5.4)\begin{cases} a(x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x},\nu)[\alpha(x,\nu)e^{\nu\varphi(x)}] = \sum_{m\in M}\beta_m(x,\nu)e^{\nu\varphi(x)} \\ \text{où} \\ \beta_m(x,\nu) = \frac{1}{m!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^m a(x,p,\nu)\right]_{p=\varphi_x}\left[\left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)^m(\alpha(x,\nu)e^{\nu\rho\varphi(y,x)})\right]_{y=x} \end{cases}$$

$\alpha(\nu)$ désigne une amplitude ; $\beta_m(\nu)$ en est une ; l'intérêt de (5.4) est que

$$(5.5)\qquad \beta_m(\nu) = \bigcirc(|\nu|^{-|m|/2})$$

parce que $\frac{\partial}{\partial x}[\rho\varphi(y,x)] = 0$ pour $x = y$.

Pour tout $a \in \mathcal{A}(X \oplus P \oplus \ldots \oplus X \oplus P)$, polynomial ou non, (5.1) et (5.4) définissent <u>un opérateur linéaire, local, conservant la phase</u>

$$a_X : \mathcal{A}(X) \to \mathcal{A}(X)\ ,$$

car (5.5) vaut ; a_X est nommé <u>opérateur pseudo-différentiel</u> ; l'espace de ces opérateurs est un espace vectoriel topologique $\mathcal{A}_X(X,P)$.

Vu (5.4) et (5.5) l'application

$$\mathcal{A}(X \oplus P \oplus \ldots \oplus X \oplus 0) \to \mathcal{A}_X(X,P)$$

est une application continue ; vu le théorème de Weierstrass, les polynomes ν-formels sont denses dans $\mathcal{A}(X \oplus P \oplus \ldots \oplus X \oplus P)$; donc, comme ces polynomes, <u>les opérateurs pseudo-différentiels ont les propriétés</u> (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), (5.5) ; dans (5.2)

$$a_P : \mathcal{A}(P) \to \mathcal{A}(P) \; ; \quad a_P \in \mathcal{A}_P(X,P) \; .$$

6. LES INVARIANTS ATTACHÉS A UN OPÉRATEUR PSEUDO-DIFFÉRENTIEL.- Soit $a \in \mathcal{A}(X \oplus P)$; on a d'une part

(6.1) $$a(x,p,\nu) = g(x,p) + \frac{1}{\nu}\, g'(x,p) + O\left(\frac{1}{\nu^2}\right) ,$$

d'autre part :

$$a\left(x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}, \nu\right)[\alpha(x) e^{\nu\varphi(x)}] = \left[\sum_{r=0}^{\infty} \nu^{-r} b_r\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\alpha(x)\right] e^{\nu\varphi(x)}$$

b_r étant un opérateur différentiel, d'ordre $\leq r$, qui dépend de a et de φ; en particulier

(6.2) $$b_o(x) = g(x,\varphi_x)$$

(6.3) $$b_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_k g_{p_k}(x,\varphi_x)\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}[g_{p_k}(x,\varphi_x)] + j(x,\varphi_x) ,$$

où

(6.4) $$j(x,p) = g'(x,p) - \frac{1}{2}\sum_k g_{p_k x_k}(x,p) .$$

On a donc

(6.5) $$a\left(x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}, \nu\right)\left[\sum_{r=0}^{\infty} \nu^{-r}\alpha_r(x) e^{\nu\varphi(x)}\right] =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \nu^{-r} \sum_{s=0}^{r} \left[b_s\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\alpha_{r-s}(x)\right] e^{\nu\varphi(x)} .$$

Des formules précédentes résulte ceci : la donnée de l'opérateur a_X définit, indépendamment du choix des coordonnées(5) dans X :

la fonction $g(x,p)$, nommée <u>fonction</u> ν-<u>bicaractéristique</u> de a_X

---

(5) Nous envisageons, en ce moment, des changements de coordonnées non linéaires : P est l'espace des covecteurs de X.

<u>l'opérateur</u> $\sum_{k=1}^{\ell} g_{p_k} \frac{\partial}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^{\ell} g_{x_k} \frac{\partial}{\partial p_k}$;

<u>le système différentiel</u>

$$\frac{dx_h}{g_{p_h}} = - \frac{dp_k}{g_{x_k}} = dt \quad \text{pour tout } h \text{ et tout } k \in \{1,\dots,\ell\} \ ; \tag{6.6}$$

la fonction $j(x,p)$, nommée <u>fonction</u> ν-<u>sous-caractéristique</u> de a_X, que définit (6.4).

7. SOLUTION ν-FORMELLE LOCALE.– Cherchons une fonction formelle

$$u(\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu^{-r} \alpha_r e^{\nu\varphi} \in \mathcal{A}(X)$$

telle que

$$a(x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x},\nu)u(x,\nu) = 0 \tag{7.1}$$

sur un voisinage V d'un point de X. Vu (6.5), l'équation (7.1) équivaut aux suivantes :

$$g(x,\varphi_x) = 0 \ ; \tag{7.2}$$

$$b_1(x,\frac{\partial}{\partial x})\, \alpha_o(x) = 0 \ ; \tag*{$(7.3)_o$}$$

$$b_1(x,\frac{\partial}{\partial x})\, \alpha_r(x) + \sum_{s=1}^{r} b_{s+1}(x,\frac{\partial}{\partial x})\, \alpha_{r-s}(x) = 0 \qquad (r \geqq 1) . \tag*{$(7.3)_r$}$$

Puisque φ est nul et doit vérifier (7.2) nous nous limiterons à l'étude des opérateurs a_X tels que g soit une fonction <u>réelle</u> : $X \oplus P \to R$; nous exprimerons (7.2) en disant que la <u>phase</u> φ doit être ν-<u>caractéristique</u>.

Nous noterons $\mathcal{W}$ l'hypersurface de $X \oplus P$ d'équation

$$\mathcal{W}:\ g(x,p) = 0$$

et nous supposerons

$$g_p \neq 0 \ \text{ sur } \mathcal{W} \ ;$$

(on dit que a_X est à <u>caractéristiques simples</u> quand cette condition est vérifiée).

Quand x décrit V, alors $(x,p) = (x,\varphi_x)$ décrit une variété $\mathcal{l}$ de $\mathcal{W}$;

on a :

$$(7.4)\qquad \sum_{k=1}^{\ell} dp_k \wedge dx_k = 0\ ,\quad g(x,p) = 0 \quad \text{sur } \mathcal{V}\ ;\quad \dim \mathcal{V} = \ell\ ;$$

on exprime ces conditions en disant que $\mathcal{V}$ est une variété lagrangienne.

La théorie de l'équation non linéaire du premier ordre (7.2), qui est celle du système (7.4) (voir [6] et [7]), établit que $\mathcal{V}$ est engendrée par des courbes ν-bicaractiques de $X \oplus P$, c'est-à-dire vérifiant

$$(7.5)\qquad \frac{dx_h}{g_{p_h}(x,p)} = -\frac{dp_k}{g_{x_k}(x,p)}\ ,\quad g(x,p) = 0\ ,$$

pour tout h et tout $k \in \{1,\dots,\ell\}$,

(g est intégrale première du système différentiel).

Nous utiliserons le long des ν-bicaractéristiques le paramètre t que définit (6.6) ; nous aurons donc :

$$(7.6)\qquad \frac{dx_h}{g_{p_h}} = -\frac{dp_k}{g_{x_k}} = dt\ ,\qquad g = 0\ .$$

Nous choisirons, pour coordonnées locales sur $\mathcal{V}$, t et $(\ell-1)$ intégrales premières de (7.6), que nous noterons y ; puisque

$$\frac{dx}{dt} = g_p(x,\varphi_x)\ ,\quad \text{le long des } \nu\text{-bicaractéristiques}\ ,$$

le déterminant fonctionnel

$$\Delta = \frac{D(x)}{D(t,y)}\ ,\quad \text{qui, au § 2, sera noté} \quad \frac{d^\ell x}{dt \wedge d^{\ell-1}y}\ ,$$

vérifie[6]

$$\frac{d}{dt}\log \Delta = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}[g_{p_k}(x,\varphi_x)]\ ;$$

soit J une fonction $\mathcal{V} \to \mathbb{C}$ telle que

$$\frac{d}{dt}\log J(x,p) = -j(x,p)$$

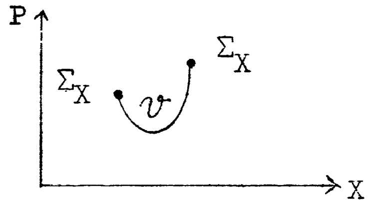
le long des ν-bicaractéristiques engendrant $\mathcal{V}$; notons

$$J(x) = J(x,\varphi_x)\ ;$$

---

(6) Ne pas confondre

$$\frac{\partial}{\partial x_k}[g_{p_k}(x,\varphi_x)] \qquad \text{avec} \qquad g_{p_k x_k}(x,\varphi_x) = [g_{p_k x_k}(x,p)]_{p=\varphi_x}\ .$$



la définition (6.3) de l'opérateur b_1 s'écrit :

$$(7.7) \qquad b_1\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)\alpha(x) = \frac{J(x)}{\sqrt{\Delta(x)}}\frac{d}{dt}\frac{\sqrt{\Delta(x)}\,\alpha(x)}{J(x)} \quad ;$$

supposons que $\mathcal{V}$ ait un bord régulier ; J ne s'annule pas sur $\overline{\mathcal{V}}$; mais Δ s'annule en les points de $\overline{\mathcal{V}}$ où $d^\ell x = 0$.

Les équations (7.3) signifient donc ceci : les solutions formelles locales u de l'équation (7.1) s'obtiennent par intégrations le long des ν-bicaractéristiques d'une variété lagrangienne $\mathcal{V}$; leurs singularités appartiennent à la projection sur X du contour apparent Σ_X de $\overline{\mathcal{V}}$; voici deux définitions équivalentes de ce contour apparent :

Σ_X est l'ensemble des points de $\overline{\mathcal{V}}$ où $d^\ell x = 0$;

Σ_X est l'ensemble des points où $\overline{\mathcal{V}}$ a un vecteur tangent parallèle à P .

Note.- Les systèmes à caractéristiques simples s'étudient comme les équations et ont les mêmes propriétés; leur étude est une adaptation de [5].

§ 2. Variétés et fonctions lagrangiennes.

En adaptant Maslov, nous définirons dans ce § 2 les solutions formelles globales ; malgré leurs singularités, nous pourrons dire en quel sens elles sont solutions de l'équation proposée. Nous devrons préciser les propriétés de l'indice que Maslov a introduit et dont Arnold a clarifié la définition.

1. L'ATLAS LAGRANGIEN.- Nous allons définir, avec Maslov, un atlas d'une variété lagrangienne, sur les cartes duquel les opérateurs pseudo-différentiels et certaines transformations de Fourier asymptotiques opèreront localement.

Comme au n°7 du § 1, donnons-nous $X = R^\ell$, son dual P et une hypersurface $\mathcal{W}$ de $X \oplus P$:

$$\mathcal{W} : g(x,p) = 0 \qquad (g_p \neq 0 \text{ sur } \mathcal{W} \text{ par hypothèse})$$

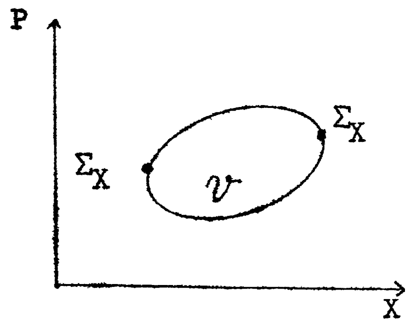
et, dans $\mathcal{W}$, une variété $\mathcal{V}$ lagrangienne, c'est-à-dire telle que :

$$(1.1) \qquad \sum_{k=1}^{\ell} dp_k \wedge dx_k = 0 \ , \quad g(x,p) = 0 \text{ sur } \mathcal{V} \ ; \quad \dim \mathcal{V} = \ell \ ;$$

mais nous ne supposons plus que x soit un système de coordonnées sur $\mathcal{V}$.

Nous emploierons sur $\mathcal{V}$ <u>divers systèmes</u> t_K <u>de coordonnées locales</u>, définis comme suit : K et H désignent des parties quelconques de $L = \{1,\dots,\ell\}$; $K^* = L\backslash K$ et $H^* = L\backslash H$ sont leurs complémentaires ; étant donné $(x,p)\in\mathcal{V}$, nous définissons

$$t_K = \tau_K(x,p) = \{x_k, p_h \mid h\in K\ ,\ h\in K^*\} \in T_K \ .$$



Donc T_K est un R^ℓ ; par exemple :

$$t_L = x\ ,\quad T_L = X\ ;\ t_\emptyset = p\ ,\ T_\emptyset = P\ .$$

Nous notons

$$d^\ell t_K = \bigwedge_{k\in K} dx_k \bigwedge_{h\in K^*} dp_h$$

et Σ_K la partie de $\mathcal{V}$ où $d^\ell t_K = 0$, c'est-à-dire où $\mathcal{V}$ possède un vecteur tangent (dx,dp) tel que $dt_K = 0$. Au voisinage de tout point de

$$\mathcal{V}_K = \mathcal{V}\backslash\Sigma_K$$

t_K est donc un système de coordonnées locales.

Maslov [1], puis Arnold [2] ont prouvé ceci : en tout point de $\mathcal{V}$ l'un au moins de ces systèmes est utilisable : autrement dit :

$$\mathcal{V} = \bigcup_K \mathcal{V}_K \ .$$

Vu (1.1), on peut définir, sur le revêtement simplement connexe $\check{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$, une fonction

$$\varphi : \check{\mathcal{V}} \to R$$

telle que

$$d\varphi = \sum_{k=1}^{\ell} p_k\, dx_k \ ;$$

nous définirons $\varphi_L = \varphi$ et

$$\varphi_K : \check{\mathcal{V}} \to R$$

par

$$(\varphi_K - \varphi)(x,p) = -\sum_{h\in K^*} p_h x_h \ ;$$

donc

(1.2) $d\varphi_K = \sum_{k\in K} p_k\, dx_k - \sum_{h\in K^*} x_h\, dp_h$, où $\{x_k, p_h\} = t_K$.

Nous nommerons $\mathcal{U}_K$ <u>l'ensemble</u>[7] <u>des fonctions</u> ν-<u>formelles</u> $U_K(\nu)$ <u>définies sur les ouverts de</u> $\mathcal{V}_K$ <u>et ayant pour phase</u> φ_K :

(1.3) $$U_K(\nu) = \alpha(\nu)e^{\nu\varphi_K} = \sum_{r=0}^{\infty} \nu^{-r} \alpha_r\, e^{\nu\varphi_K} ;$$

l'amplitude $\alpha(\nu)$ est définie sur un ouvert de $\check{\mathcal{V}}$; elle est telle que $\alpha(\nu)e^{\nu\varphi_K}$ <u>soit défini sur</u> $\mathcal{V}_K$ (c'est-à-dire : prenne une même valeur en tous les points de $\check{\mathcal{V}}$ ayant même projection sur $\mathcal{V}_K$).

Nous nommerons <u>projection</u> $u_K(\nu) = \tau_K U_K(\nu)$ de $U_K(\nu)$ sur T_K la fonction formelle (de phase φ_K) valant en t_K :

(1.4) $$u_K(t_K,\nu) = \sum_{(x,p)\in\tau_K^{-1} t_K} U_K(x,p,\nu) ;$$

ses points singuliers appartiennent à $\tau_K \Sigma_K$, moyennant <u>l'hypothèse</u> suivante que nous ferons :

<u>l'ensemble</u> $\tau_K^{-1} t_K$ <u>est fini quand</u> $t_K \in T_K - \tau_K \Sigma_K$.

Soit $a \in \mathcal{A}(X \oplus P)$; pour chaque $K \subset L$, définissons un <u>opérateur local</u> a_K qui opère sur les fonctions ν-formelles de $t_K \in T_K$:

$a_K(t_K, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial t_K}, \nu)$ s'obtient en substituant dans $a(x,p,\nu)$:

$\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x_k}$ à p_k quand $k \in K$;

$-\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial p_h}$ à x_h quand $h \in K^*$;

la permutation de $\frac{\partial}{\partial p_h}$ et p_h s'effectue suivant (5.1) § 1.

En employant t_K comme système de coordonnées locales en chaque point de $\mathcal{V}_K$, on fait opérer a_K sur ceux des éléments de $\mathcal{U}_K$ dont le support est projeté injectivement par τ_K sur T_K ; l'opérateur ainsi construit se prolonge évidemment en un <u>opérateur linéaire et local</u> A_K tel que :

---

(7) C'est un faisceau de groupes additifs.

$$A_K : \mathcal{U}_K \to \mathcal{U}_K ;$$

(1.5) $$a_K\, \tau_K\, U_K(\nu) = \tau_K\, A_K\, U_K(\nu) .$$

A_K conserve la phase de $U_K(\nu)$ et a_K celle de $\tau_K\, U_K(\nu)$, qui est φ_K par définition.

<u>Note</u>.- C'est le germe de a sur $\mathcal{V}$ qui définit a_K et A_K : soient a et $a' \in \mathcal{A}(X \oplus P)$ tels que ~~a-a'~~ et toutes ses dérivées en x et p s'annulent sur $\mathcal{V}$, alors $a_K = a'_K$ et $A_K = A'_K$, pour tout K .

Définissons <u>des transformations de Fourier partielles</u> $\mathcal{F}_H^K$ au moyen de la transformation de Fourier $\mathcal{F}^k$ des fonctions de $x_k \in R$ en fonctions de $p_k \in R$ et de son inverse $\mathcal{F}_k = (\mathcal{F}^k)^{-1}$:

$$\mathcal{F}_H^K = \prod_{k \in K \cap H^*} \mathcal{F}^k \prod_{h \in H \cap K^*} \mathcal{F}_h \qquad (K \text{ et } H \subset L) ;$$

on a sur $\mathcal{V}$

(1.6) $$\left| \frac{\bigwedge_{K \cap H^*} dp_k \bigwedge_{H \cap K^*} dx_h}{\bigwedge_{K \cap H^*} dx_k \bigwedge_{H \cap K^*} dp_h} \right| = \left| \frac{d^\ell t_H}{d^\ell t_K} \right| ;$$

donc $\tilde{\mathcal{F}}_H^K$ transforme toute fonction formelle $U_K(\nu)$ de $t_K \in T_K \backslash \tau_K(\Sigma_K \cup \Sigma_H)$, ayant φ_K pour phase,,en une fonction $u_H(\nu)$ de $t_H \in T_H \backslash \tau_H(\Sigma_K \cup \Sigma_H)$, ayant pour phase φ_H ; $\tilde{\mathcal{F}}_H^K$ <u>opère linéairement et localement</u> ; vu (5.2) § 1 :

(1.7) $$\begin{cases} \tilde{\mathcal{F}}_H^K\, a_K\, u_K(\nu) = a_H\, \tilde{\mathcal{F}}_H^K\, u_K(\nu) ; \\ \tilde{\mathcal{F}}_H^J\, \tilde{\mathcal{F}}_J^K = \tilde{\mathcal{F}}_H^K \ (\text{pour tout } J \subset L) ; \ \tilde{\mathcal{F}}_K^K = I \ (\text{identité}) . \end{cases}$$

En employant t_K comme système de coordonnées locales en chaque point de $\mathcal{V}_K$ on fait opérer $\tilde{\mathcal{F}}_H^K$ sur ceux des éléments de $\mathcal{U}_K$ dont les supports sont disjoints de Σ_H et sont projetés injectivement par τ_K sur T_K ; l'opérateur ainsi construit se prolonge évidemment en <u>un opérateur linéaire et local</u> F_H^K tel que :

$$F_H^K : \mathcal{U}_K \to \mathcal{U}_H ;$$

<u>le domaine de définition et le support de</u> $F_H^K\, U_K(\nu)$ <u>sont les intersections de ceux de</u> $U_K(\nu)$ <u>par</u> $\mathcal{V}_H$;

(1.8) $$\tilde{\mathcal{F}}_H^K \tau_K U_K(\nu) = \tau_H F_H^K U_K(\nu)$$

(1.9) $$F_H^K A_K U_K(\nu) = A_H F_H^K U_K(\nu) \; ; \; F_H^J F_J^K = F_H^K \; ; \; F_K^K = I \; .$$

On peut expliciter $F_H^K U_K(\nu)$ grâce à (3.6) § 1 ;

(1.10) $$F_H^K U_K(\nu) = \left(\frac{d^\ell t_K}{d^\ell t_H}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu}\frac{d^\ell t_K}{d^\ell t_H}\right)^r \beta_r \, e^{\nu\varphi_H} \; ;$$

les β_r sont définies sur l'ouvert de $\check{\mathcal{V}}$ où est définie l'amplitude $\alpha(\nu)$ de $U_K(\nu)$ [voir (1.3)] : <u>ces β_r sont régulières même en les points de $\check{\mathcal{V}}$ se projetant sur</u> Σ_H. Vu (3.7) § 1, on a

(1.11) $$\beta_o = \alpha_o \; .$$

Dans (1.9), le signe de $(d^\ell t_K/d^\ell t_H)^{\frac{1}{2}}$ est défini par la convention (3.8) § 1. Explicitons-la. Etant donné $(x,p) \in \mathcal{V}_H \cap \mathcal{V}_K$, notons $\mathcal{C}(x,p)$ l'espace des vecteurs $(\dot{x},\dot{p})$ de $X \oplus P$ qui sont tangents à $\mathcal{V}$ en (x,p) et qui vérifient les conditions :

$$\dot{x}_k = 0 \;\text{ si }\; k \in K \cap H \quad , \quad \dot{p}_h = 0 \;\text{ si }\; h \in K^* \cap H^* \quad ;$$

nous avons, en notant $\mathrm{Card}\, K \cap H = |K \cap H|$:

$$\dim \mathcal{C}(x,p) = \ell - |K \cap H| - |K^* \cap H^*| = |K \cap H^*| + |K^* \cap H| \; ;$$

sur $\mathcal{C}(x,p)$ la forme quadratique

$$\sum_{h \in K \cap H^*} \dot{x}_k \dot{p}_k - \sum_{h \in K^* \cap H} \dot{x}_h \dot{p}_h$$

n'est pas dégénérée, vu (1.6), puisque $(x,p) \notin \Sigma_H \cup \Sigma_K$; son indice d'inertie $\mathrm{Inert}_H^K(x,p)$ permet de définir sur $\mathcal{V}_H \cap \mathcal{V}_K$ la fonction[8] localement constante, à valeurs dans $\mathbb{Z}$:

$$(x,p) \longmapsto n_H^K(x,p) = \mathrm{Inert}_H^K(x,p) - |K^* \cap H| = -n_K^H(x,p) \; .$$

La convention (3.8) § 1 signifie que

(8) Une fonction lacalement constante est une fonction constante sur chaque composante connexe de son domaine de définition : $\mathbb{Z}$ et l'anneau des entiers.

(1.12) $$\left(\frac{d^\ell t_H}{d^\ell t_K}\right)^{\frac{1}{2}} = \left|\frac{d^\ell t_H}{d^\ell t_K}\right|^{\frac{1}{2}} i^{n_H^K(x,p)} \quad .$$

2. L'INDICE DE MASLOV $n_K : \check{\mathcal{V}}_K \to \mathbb{Z}$.- Notons $\check{\mathcal{V}}_K$ la partie de $\check{\mathcal{V}}$ se projetant sur $\mathcal{V}_K$. Suivant Maslov [1], *on peut décomposer la fonction localement constante*

$$n_H^K : \mathcal{V}_H \cap \mathcal{V}_K \to \mathbb{Z}$$

en la différence

(2.1) $$n_H^K = n_H - n_K$$

de deux fonctions localement constantes

$$n_H : \check{\mathcal{V}}_H \to \mathbb{Z} \quad , \quad n_K : \check{\mathcal{V}}_K \to \mathbb{Z} \ ;$$

les sauts de n_H *à travers* Σ_H (et ceux de $-n_K$ à travers Σ_K) *sont ceux de* n_H^K .

Ce résultat n'est pas évident : il exige qu'on complète la théorie de l'indice de Maslov qu'a faite *Arnold* [2].

Supposons $\mathcal{V}$ *orientable* et notons η *un élément de volume de* $\mathcal{V}$ (c'est-à-dire : une forme différentielle de degré ℓ ne s'annulant en aucun point de $\mathcal{V}$) ; l'indice de Maslov permet de définir la fonction $\check{\mathcal{V}}_H \to \mathbb{C}$;

(2.2) $$\left(\frac{d^\ell t_H}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} = \left|\frac{d^\ell t_H}{\eta}\right|^{\frac{1}{2}} i^{n_H} \quad ;$$

la formule (1.12) s'écrit

(2.3) $$\left(\frac{d^\ell t_H}{d^\ell t_K}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{d^\ell t_H}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} \Big/ \left(\frac{d^\ell t_K}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} \quad ;$$

les relations (1.10) et (1.11) s'énoncent comme suit :

Il existe des fonctions indéfiniment différentiables

$$\gamma_r : \check{\mathcal{V}}_K \to \mathbb{C}$$

telles que

$$F_H^K U_K(\nu) = \left(\frac{\eta}{d^\ell t_H}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\eta}{\nu d^\ell t_H}\right)^r \gamma_r \, e^{\nu\varphi_H} \; ; \tag{2.4}$$

$$\gamma_o = \alpha_o \left(\frac{d^\ell t_K}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} , \tag{2.5}$$

α_o étant défini par (1.3).

3. FONCTIONS LAGRANGIENNES.- Nous définissons une fonction lagrangienne $U(\nu) = \{U_K(\nu)\}$ par la donnée, pour chaque $K \subset L$, d'une fonction ν-formelle $U_K(\nu)$, définie sur $\mathcal{V}_K$ et de phase φ_K , ces $U_K(\nu)$ étant assujettis à la condition de compatibilité(9) suivante :

en tout point $(x,p) \in \mathcal{V}_K \cap \mathcal{V}_H$,

$$U_H(x,p,\nu) = (F_H^K U_K)(x,p,\nu) \; . \tag{3.1}$$

Vu (2.4) et (2.5), cette définition exige l'existence de fonctions indéfiniment différentiables

$$\beta_{K,r} : \mathcal{V} \to \mathbb{C}$$

telles que

$$U_K = \left(\frac{\eta}{d^\ell t_K}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu} \frac{\eta}{d^\ell t_K}\right)^r \beta_{Kr} \, e^{\nu\varphi_K} \tag{3.2}$$

$$\beta_{Ko} = \beta_o \text{ est indépendant de } K \; ; \tag{3.3}$$

ceci exige que

$$\left(\frac{\eta}{d^\ell t_K}\right)^{\frac{1}{2}} \beta_o \, e^{\nu\varphi} \;\; \underline{\text{et}} \text{ (si } \beta_o \text{ ne s'annule pas) } \beta_{Kr}/\beta_o \tag{3.4}$$

<u>soient définis sur</u> $\mathcal{V}$, et non pas seulement sur $\mathcal{V}$.

Nous définirons

$$\tau_K U = \tau_K U_K \; . \tag{3.5}$$

---

(9) <u>Ce n'est pas</u> la condition qui définit sur $\mathcal{V}$ une fonction formelle $U(\nu) = \{U_K(\nu)\}$ et qui est :

$$U_K(x,p,\nu) = U_H(x,p,\nu) \quad \text{sur} \quad \mathcal{V}_K \cap \mathcal{V}_H \; .$$

4. OPÉRATEURS LAGRANGIENS.- Nous définirons de même un <u>opérateur lagrangien</u> $A = \{A_K\}$, tous les A_K étant définis par une même fonction formelle $a \in \mathcal{A}(X \oplus P)$ (plus précisément par un germe sur $\mathcal{V}$). Vu (1.9), $A = \{A_K\}$ transforme $U = \{U_K\}$ en la fonction lagrangienne :

(4.1) $$A\ U = \{A_K\ U_K\} \quad .$$

Evidemment :

(4.2) $$\tau_K\ A\ U = a_K\ \tau_K\ U \ .$$

5. SOLUTIONS LAGRANGIENNES ET FORMELLES.- Nous nommons <u>solution lagrangienne</u> d'un opérateur lagrangien A toute fonction lagrangienne U telle que

(5.1) $$A\ U = 0\ .$$

Rappelons que $t_L = x, T_L = X$; notons $a_L = a_X$, $\tau_L = \tau_X$, $\Sigma_L = \Sigma_X$. Nous nommons <u>solutions formelle</u> de a_X toute projection sur X

$$u(\nu) = \tau_X\ U(\nu)$$

d'une solution lagrangienne $U(\nu)$ de A .

Sur $X \setminus \tau_X\ \Sigma_X$, u est <u>régulier</u> et vérifie $a_X u = 0$; <u>mais sur</u> $\tau_X\ \Sigma_X$ <u>aussi</u> u <u>est solution de</u> a_X <u>en le sens suivant</u> :

(5.2) $$u_K = \tilde{\mathcal{F}}^L_K\ u = \tau_K\ U \ \ \underline{\text{vérifie}}\ \ a_K\ u_K = 0\ ,\ \underline{\text{sur}}\ \ T_K \setminus \tau_K \Sigma_K\ ;$$

(5.2) résulte aisément de (1.8) et de la définition (3.1).

<u>Note</u>.- Vu le n° 7 § 1, les <u>solutions lagrangiennes</u> de l'opérateur A , défini par $a = g + \frac{1}{\nu} g' + \ldots \in \mathcal{A}(X \oplus P)$, résultent de l'emploi des <u>variétés lagrangiennes</u> $\mathcal{V}$ telles que :

(5.3) $$g(x,p) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathcal{V}\ .$$

Ces solutions se construisent par <u>intégrations le long des</u> ν-<u>bicaractéristiques engendrant</u> $\mathcal{V}$; les diverses coordonnées locales t_K doivent être employées. afin d'expliciter les intégrations à faire.

6. SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES.- Considérons les fonctions lagrangiennes $U(\nu)$ telles que

(6.1) $$A\ U(\nu) = \bigcirc(1/\nu^2)$$

la condition (5.3) doit être vérifiée ; $U(\nu)$ est défini mod $1/\nu$; vu (3.2) et (3.3) ,

$$U_X(\nu) = \left(\frac{\eta}{d^\ell x}\right)^{\frac{1}{2}} \beta e^{\nu\varphi} + O(\tfrac{1}{\nu}) \quad , \quad U_K(\nu) = \left(\frac{\eta}{d^\ell t_K}\right)^{\frac{1}{2}} \beta e^{\nu\varphi_K} + O(\tfrac{1}{\nu}) \ ,$$

β étant une fonction régulière $\check{\mathcal{V}} \to \mathbb{C}$; elle se construit par une intégration le long des ν-bicaractéristiques ; $(7.3)_0$ et (7.7) § 1 définissent explicitement cette intégration.

Suivant Maslov, nous nommerons <u>solution asymptotique</u> de a_X toute projection sur X

$$u(\nu) = \tau_X\, U(\nu)$$

d'une fonction lagrangienne $U(\nu)$ vérifiant (6.1).

Sur $X \backslash \tau_X \Sigma_X$, u est <u>régulière</u> et vérifie $a_X\, u = O(1/\nu^2)$; <u>mais sur $\tau_X \Sigma_X$ aussi</u> u <u>est solution asymptotique de</u> a_X <u>en le sens suivant</u> :

$$u_K = \tilde{\mathcal{F}}_K^L\, u = \tau_K\, U \quad \text{vérifie} \quad a_K\, u_K = O(1/\nu^2) \ .$$

<u>Note</u> 1.- Supposons que l'élément de volume η de $\mathcal{V}$ puisse être choisi d type

(6.2) $$\eta = dt \wedge \varpi \quad ,$$

la <u>forme différentielle sur</u> $\mathcal{V}$, ϖ , <u>étant une forme invariante</u>(10) <u>du système différentiel</u> (7.5) § 1 <u>des</u> ν-<u>bicaractéristiques</u> ; alors le n° 7 § 1 peut choisir

$$\Delta = \frac{D(x)}{D(t,y)} = \frac{d^\ell x}{dt \wedge \varpi} \quad ;$$

$(7.3)_0$ et (7.7) § 1 montrent que β/J <u>est constant sur les</u> ν-<u>bicaractéristiques engendrant</u> $\mathcal{V}$.

<u>Note</u> 2.- Supposons, en outre, que $j = 0$, c'est-à-dire, vu (6.4) § 1, que

(6.3) $$g'(x,p) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\ell} g_{p_k x_k}(x,p) \quad ;$$

J est donc constant sur chaque ν-bicaractéristique : par suite β <u>est constant sur les</u> ν-<u>bicaractéristiques engendrant</u> $\mathcal{V}$.

---

(10) c'est-à-dire : ϖ s'exprime localement avec des intégrales premières de ce système : voir [6] et [7].

Note 3.- Supposons enfin ceci :

(6.4) l'une des ν-bicaractéristiques est dense dans $\mathcal{V}$;

alors la fonction β , qui est continue, est constante sur $\mathcal{V}$: on peut choisir $\beta = 1$.

Moyennant les trois hypothèses (6.2), (6.3) et (6.4), on a donc la solution asymptotique

(6.5) $$U_X(\nu) = \left(\frac{\Omega}{d^\ell x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\nu\varphi}$$

à condition qu'elle soit définie sur $\mathcal{V}$ (cf. (3.4)).

Vu la définition (2.2), cette condition s'énonce :

$$e^{-\frac{\pi i}{2} n_X + \nu\varphi} \text{ est définie sur } \mathcal{V} \ ;$$

notons γ un lacet arbitraire de $\mathcal{V}$ et $[n]_\gamma$ la variation(11) de n_X le long de γ ; cette même condition s'énonce

(6.6) $$\frac{\nu}{2\pi i} \int_\gamma \sum_k p_k \, dx_k \equiv \frac{1}{4} [n]_\gamma \mod 1 \ ;$$

ce sont les conditions quantiques de Maslov. Sous les hypothèses (6.2), (6.3) et (6.4), elles précisent les valeurs de ν auxquelles correspond une solution asymptotique.

Si ces valeurs de ν sont grandes, cette solution asymptotique est évidemment solution approchée de l'opérateur a_X .

Note 4.- Le calcul de l'indice de Maslov n_X est aisé quand

(6.7) $$\sum_{h,k} g_{p_h p_k}(x,p)\, \dot{x}_h \dot{x}_k > 0 \quad \text{pour} \quad \dot{x} \neq 0 \ , \ (x,p) \in \mathcal{V} \ ;$$

alors, le long d'une bicaractéristique orientée dans le sens $dt > 0$, n_X a le saut $+1$ à chaque traversée transverse de Σ_X . L'indice de Maslov s'identifie alors à l'indice de Marston MORSE des géodésiques d'un problème régulier de calcul des variations.

---

(11) γ est la projection d'un arc $\check{\gamma}$ de $\check{\mathcal{V}}$; soient v_o l'origine de $\check{\gamma}$, v_1 son extrémité ;

$$[n]_\gamma = n_K(v_1) - n_K(v_o) \ , \text{ valeur indépendante des choix de } \check{\gamma} \text{ et } K \ .$$

§ 3. Application à la mécanique quantique.

Les équations de la mécanique ondulatoire sont du type :

$$a(x,\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x})u = 0 \quad ,$$

où $2\pi\hbar$ est la constante de Planck, qui est très petite à l'échelle macroscopique ; on obtient donc des approximations des solutions de ces équations en construisant les solutions asymptotiques (n°7, § 2) de l'opérateur $a(x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})$ et en y prenant :

$$\nu = \frac{i}{\hbar} .$$

1. L'ÉQUATION RELATIVISTE DE SCHRÖDINGER, indépendante(12) du temps x_0 , a pour ν-bicaractéristiques les trajectoires de l'électron de l'atome d'hydrogène ; ce sont les ellipses de Képler, en lente rotation dans leur plan (correction relativiste), qui tourne lui-même lentement autour du champ magnétique (rotation de Larmor) ; chacune de ces ν-bicaractéristiques est dense dans un tore $\mathcal{V}$ de $X \oplus P$, qui est lagrangien et vérifie (6.2) ; l'opérateur de Schrödinger $a(x,\frac{\partial}{\partial x})$ vérifie (6.3), car

$$\sum_{k=1}^{3} a_{p_k x_k}(x,p) = 0 \qquad (g = a \ , \quad g' = 0) \ ;$$

les solutions asymptotiques sont donc $u = \tau_X U_X$, U_X ayant l'expression (6.5). La condition (6.4) est vérifiée : l'indice de Maslov est celui de Morse.

$\mathcal{V}$ dépend de E et de deux intégrales premières des ν-bicaractéristiques (la longueur et la projection(13) sur le champ magnétique du moment cinétique de l'électron) ; E et ces deux paramètres doivent vérifier <u>les conditions quantiques de Maslov</u>, qui sont au nombre de 3, puisque $\mathcal{V}$ est un tore de dimension 3.

On obtient ainsi une expression de l'énergie E en fonction de trois entiers: les trois nombres quantiques

---

(12) $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_0}$ est remplacé par la multiplication par l'énergie E .

(13) respectivement proportionnelle à $\ell + \frac{1}{2}$ et à m .

n (total) , ℓ (azimutal) , m (magnétique) ,

qui sont liés par les inégalités :

$$0 \leqq \ell < n \quad ; \qquad -\ell \leqq m \leqq \ell \; ;$$

cette expression est (en négligeant H^2 et α^4) :

$$E = \mu c^2 - \frac{\mu \varepsilon^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}\left[1 + \frac{\alpha^2}{n(\ell+\frac{1}{2})} - \frac{3}{4}\frac{\alpha^2}{n^2}\right] + \varkappa\, H\, m \; ;$$

(c : vitesse de la lumière ; μ et ε : masse et charge de l'électron ; H : charge magnétique ; E : énergie ;

$$\alpha = \frac{\varepsilon^2}{\hbar c} = 7{,}29 \times 10^{-3} \; ; \quad \varkappa = \frac{\varepsilon \hbar}{2\mu c} : \text{magnéton de Bohr}).$$

Cette expression de E est celle que donnait la première théorie des quanta, à cela près que cette théorie obtenait dans [...] :

$$\frac{\alpha^2}{n(\ell+1)} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{\alpha^2}{n(\ell+\frac{1}{2})} \; .$$

La solution asymptotique donne aussi une approximation de la solution de l'équation de Schrödinger ; rappelons que cette solution est nommée fonction d'onde.

Ces approximations de E et des fonctions d'onde ne valent *a priori* que pour les nombres quantiques élevés ; on constate qu'elles valent pour tous les nombres quantiques ; c'est pourquoi la première théorie des quanta est une approximation de la mécanique ondulatoire.

2. L'ÉQUATION DE DIRAC peut être résolue approximativement de façon analogue, bien qu'elle ait des caractéristiques doubles et qu'il faille se contenter d'une solution asymptotique approchée. On obtient ainsi une description corpusculaire de l'atome d'hydrogène rendant correctement compte de l'effet du champ magnétique (structure fine de l'effet Zeeman).

BIBLIOGRAPHIE

[1] V.P. MASLOV, Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques (en russe, M.G.U., Moscou, 1965).

[2] V.I. ARNOLD, Une classe caractéristique intervenant dans les conditions de quantification, Analyse fonctionnelle (en russe), 1, 1967, p. 1-14.

[3] Traduction de [1], de [2] et d'un article de V.C. Bouslaev par J. Lascoux et R. Seneor, Dunod, 1972.

[4] Une première version ronéotypée paraîtra dans le Séminaire du Collège de France sur les équations aux dérivées partielles.

[5] L. GÅRDING, T. KOTAKE et J. LERAY, Uniformisation... ; analogie avec la théorie des ondes asymptotiques et approchées ; Bull. Soc. math. France, 92, 1964, p. 263-361.

[6] E. CARTAN, Leçons sur les Invariants intégraux, Hermann, 1922.

[7] Y. CHOQUET-BRUHAT, Géométrie différentielle et systèmes extérieurs, Dunod, 1968.

...E I
...UES PU
INSTITUT FOURIER