Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Pierre Grisvard

Le comportement asymptotique des valeurs propres d'un opérateur

Séminaire Jean Leray (1971), exp. n° 4, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1971____A4_0>

LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES D'UN OPÉRATEUR

par Pierre GRISVARD (Nice)

Dans le premier exposé, on indiquera quelques procédés permettant d'évaluer le comportement asymptotique des valeurs propres d'un opérateur ; ces procédés seront mis en oeuvre sur des exemples concrets en équations aux dérivées partielles, dans le second exposé.

1. Les valeurs propres d'un opérateur compact.

Le très célèbre principe du "mini-max" de Courant-Fischer donne un moyen très simple de calculer les valeurs propres d'un opérateur compact symétrique (dans un espace de Hilbert). Il sera commode, pour ce qui suit, de l'exprimer à l'aide de la notion de $n^{\text{ième}}$ épaisseur (ou $n^{\text{ième}}$ diamètre) d'un ensemble, due à Kolmogorov. Soit K une partie de H espace de Hilbert, on appelle $n^{\text{ième}}$ épaisseur de K dans H la quantité :

$$d_n^H(K) = \inf_F \left(\sup_{u\in K} \left[\inf_{f\in F} \|u-f\|\right]\right)$$

où F décrit l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension n dans H. Il est naturel d'introduire ce nombre lorsqu'on cherche un sous-espace vectoriel F de dimension n dans H, qui réalise la meilleure approximation possible des éléments de K par des éléments de F. Dans le cas particulier où K est un ellipsoïde, c'est-à-dire un ensemble de la forme

$$K = \{u = \sum_{k\geq 1} \alpha_k\varphi_k \ ; \ \sum_{k\geq 1} \frac{|\alpha_k|^2}{\delta_k^2} \leq 1\}$$

où φ_k, $k = 1,2,\dots$ est un système orthonormé dans H et δ_k, $k = 1,2,\dots$ est une suite décroissante de nombres ≥ 0, on a évidemment :

$$d_n^H(K) = \delta_{n+1} \qquad n = 0,1,\dots .$$

Si T désigne un opérateur linéaire compact et symétrique $(T = T^*)$ dans H, soit λ_k, $k = 1,2,\dots$ la suite de ses valeurs propres en ordre décroissant de modules [(1)] et soit φ_k, $k = 1,2,\dots$ un système orthonormé correspondant de fonctions propres, alors

$$K_T = \{Tf \ ; \ \|f\| \leq 1\} = \{u = \sum_{k\geq 1} \alpha_k\varphi_k \ ; \ \sum_{k\geq 1} \frac{|\alpha_k|^2}{|\lambda_k|^2} \leq 1\}$$

(1) Bien entendu, chaque valeur propre est répétée conformément à sa multiplicité.

est un ellipsoïde et, par conséquent, on a :

$$d_n^H(K_T) = |\lambda_{n+1}| \ , \qquad n = 0,1,\dots . \tag{1}$$

Si maintenant on considère un opérateur linéaire compact T, non nécessairement symétrique dans H, on obtient seulement une inégalité : soit $T = US$ la décomposition polaire de T avec S compact symétrique (en fait $S = |T| = \sqrt{T^*T}$) et U isométrie définie sur la fermeture de l'image de S ; on a évidemment $K_T = UK_S$ et, puisque U conserve la distance, on a

$$d_n^H(K_T) = d_n^H(K_S) = \mu_{n+1} \ , \quad n = 0,1,\dots$$

où μ_k, $k = 1,2,\dots$ désigne la suite des valeurs propres de S en ordre décroissant. Ces valeurs propres sont reliées à celles de T par la célèbre inégalité de <u>Herman-Weyl</u> :

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \mu_k^2 \ , \quad n = 1,2,\dots .$$

(En fait, l'inégalité de Herman-Weyl est relative au cas où 2 est remplacé par $p > 0$ quelconque ; dans ce cas général la démonstration en est beaucoup plus difficile). Pour conclure, on a donc l'inégalité :

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} d_k^H(K_T)^2 \ , \quad n = 1,2,\dots \tag{2}$$

sous la seule hypothèse que T est linéaire compact dans H.

2. Les valeurs propres d'un opérateur à inverse compact.

Cette étude sera justifiée par le fait que l'opérateur de Green de beaucoup de problèmes aux limites usuels est compact (c'est le cas, par exemple, pour les problèmes aux limites elliptiques dans un domaine borné).

On considère donc un opérateur linéaire fermé A à domaine D_A dense dans H ; on suppose A inversible et A^{-1} compact ou, ce qui revient au même, que l'injection de D_A muni de la norme du graphe, dans H est compacte ; on sait qu'il résulte de la théorie de Riesz que le spectre de A est une suite λ_k, $k = 1,2,\dots$ de valeurs propres (de multiplicité finie) qu'on supposera dorénavant en ordre croissant de modules, chaque valeur propre étant répétée conformément à sa multiplicité.

On peut appliquer les résultats du n° 1 à $T = A^{-1}$. Lorsque A est autoadjoint, T est symétrique et on voit que

$$K_T = \{u\in D_A \;;\; \|Au\| \leq 1\} = L_A \;;$$

de (1) on déduit l'égalité :

(3) $$|\lambda_{n+1}|^{-1} = d_n^H(L_A)\ , \qquad n = 0,1,\dots .$$

Dans le cas général où A n'est pas nécessairement autoadjoint, on utilise la décomposition polaire $A = UB$ où B est autoadjoint positif avec $D_B = D_A$ (en fait $B = \sqrt{A^*A}$) et U est une isométrie dans H. On a évidemment :

$$K_T = \{u\in D_A \;;\; \|Au\| \leq 1\} = \{u\in D_B \;;\; \|Bu\| \leq 1\} = L_B$$

et de (2) on déduit l'inégalité

(4) $$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^{-2} \leq \sum_{k=0}^{n-1} d_k^H(L_B)^2, \quad n = 1,2,\dots$$

et si β_k, $k = 1,2,\dots$ désigne la suite croissante des valeurs propres de B, on voit aussi, utilisant (3), que

(5) $$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^{-2} \leq \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{-2}\ , \qquad n = 1,2,\dots$$

ceci bien que $\sqrt{T^*T}$ ne soit pas égal à B^{-2} (car on a évidemment $T^*T = UB^{-2}U^*$).

De l'inégalité (5) on déduit le

THÉORÈME 1. <u>Soit</u> A <u>un opérateur à inverse compact et soit</u> $B = \sqrt{A^*A}$ <u>l'opérateur autoadjoint entrant dans la décomposition polaire de</u> A. <u>On désigne par</u> λ_k, $k = 1,2,\dots$ <u>la suite des valeurs propres de</u> A <u>en ordre croissant de modules et par</u> β_k, $k = 1,2,\dots$ <u>la suite des valeurs propres de</u> B. <u>On suppose qu'il existe</u> $\theta < \frac{1}{2}$ <u>tel que</u>

$$\liminf_{k\to\infty} k^{-\theta}\,\beta_k > 0$$

<u>alors</u>

$$\liminf_{k\to\infty} k^{-\theta}|\lambda_k| > 0\ .$$

<u>Démonstration</u>. On désigne par $N(t)$ le nombre des valeurs propres λ_k telles que $|\lambda_k| \leq t$, alors on a :

$$N(t)t^{-2} \leq \sum_{k=1}^{N(t)} |\lambda_k|^{-2}$$

d'où, en utilisant (5) :

$$N(t) \leq t^2 \sum_{k=1}^{N(t)} \beta_k^{-2} \leq M\, t^2 \sum_{k=1}^{N(t)} k^{-2\theta}$$

avec M indépendant de t. Comme on a $\theta < \frac{1}{2}$, on voit que

$$N(t) \leq M\, t^2 \int_0^{N(t)} S^{-2\theta}\, dS = M\, t^2\, \frac{N(t)^{1-2\theta}}{1-2\theta}$$

puis

$$N(t) \leq \left(\frac{M}{1-2\theta}\right)^{\frac{1}{2\theta}} t^{1/\theta}, \qquad t > 0,$$

d'où le résultat.

Pour étendre ce théorème au cas où $\theta \geq \frac{1}{2}$, on fera l'hypothèse suivante :

(h) <u>L'opérateur</u> $(A+tI)$ <u>est inversible pour</u> $t \geq 0$ <u>et il existe</u> C_A <u>tel que</u> $\|(A+tI)^{-1}\| \leq C_A(t+1)^{-1}$ <u>pour tout</u> $t \geq 0$.

THÉORÈME 1'. <u>Le résultat du théorème</u> 1 <u>est vrai pour</u> $\theta \geq \frac{1}{2}$ <u>si on suppose que</u> A <u>vérifie</u> (h).

<u>Démonstration</u>. On applique l'inégalité (2) à $T = (A+tI)^{-1}$; on a donc

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k+t|^{-2} \leq \sum_{k=0}^{n-1} d_k^H(K_T)^2, \qquad n = 1,2,\ldots$$

avec $K_T \subset \gamma_A\, L_A(t)$ où $\gamma_A^2 = C_A^2 + (C_A+1)^2$ et

$$L_A(t) = \{u \in D_A \;;\; \|Au\|^2 + t^2\|u\|^2 \leq 1\}.$$

Evidemment, on a $L_A(t) = L_B(t) = K_R$ avec $R = (B+itI)^{-1}$; de plus on a

$$S = \sqrt{R^*R} = (B^2+t^2I)^{-\frac{1}{2}}$$

d'où $K_R = K_S$ et comme les valeurs propres de S sont évidemment les $(\beta_k^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}$, il vient d'après (1)

$$d_k^H(L_A(t)) = d_k^H(K_S) = (\beta_{k+1}^2 + t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k+t|^{-2} \leq \gamma_A^2 \sum_{k=1}^{n} (\beta_k^2+t^2)^{-1}, \quad n = 1,2,\ldots \quad t > 0$$

puis

$$N(t) \leq 4\gamma_A^2\, t^2 \sum_{k=1}^{N(t)} (\beta_k^2+t^2)^{-1}, \qquad t > 0$$

et, en utilisant l'hypothèse sur la suite β_k , $k = 1,2,\ldots$, on voit qu'il existe M tel que

$$N(t) \leq M\, t^2 \sum_{k=1}^{N(t)} (k^{2\theta}+t^2)^{-1} \quad , \quad t > 0 \ ,$$

on en déduit la majoration $N(t) \leq M'\, t^{1/\theta}$, d'où le résultat.

Remarque. Le cas particulier $\theta > \frac{1}{2}$ correspond au cas où A^{-1} est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

3. Le cas des problèmes variationnels.

On considère à présent le cas particulier où A est l'opérateur associé à la donnée de V espace de Hilbert contenu avec injection continue dans H , V dense dans H et de

$$\begin{aligned} u,v &\longmapsto a(u;v) \\ V \times V &\longrightarrow \mathbb{C} \end{aligned}$$

forme sesquilinéaire continue et V-elliptique, c'est-à-dire qu'il existe α et M tels que

$$|a(u;v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V \quad , \quad u,v\in V$$
$$\operatorname{Re} a(u;u) \geq \alpha\|u\|_V^2 \ , \quad u\in V \ .$$

Suivant Lions, A est l'opérateur fermé à domaine D_A dense défini par

$$(Au;v) = a(u;v) \quad , \quad u\in D_A \ , \quad v\in V \ .$$

L'opérateur A est évidemment inversible et son inverse A^{-1} est compact si on suppose que l'injection de V dans H est compacte.

Dans le cas particulier où a est hermitienne, A est autoadjoint positif et $V = D_{A^{\frac{1}{2}}}$; l'inégalité (1) appliquée à $T = A^{-\frac{1}{2}}$ montre que (dans les notations du n° précédent) :

$$\lambda_{k+1}^{-\frac{1}{2}} = d_k^H(K_a) \quad , \quad k = 0,1,\ldots \tag{6}$$

où $K_a = \{u\in V;\ |a(u;u)| \leq 1\}$.

Dans le cas général où a n'est pas hermitienne, l'opérateur A est maximal accrétif ; on ne peut pas comparer l'espace V au domaine de $B^{\frac{1}{2}}$ comme dans le cas autoadjoint, cependant on a, d'après Kato

$$D_{B^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \subset V \subset D_{B^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0 \ .$$

Alors, si on suppose que $d_k^H(K_a)$ est connu et, plus précisément, que

(7) $$\limsup_{k \to \infty} k^{\theta}\, d_k^H(K_a) < +\infty ,$$

alors, appliquant (3) à l'opérateur $B^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, on voit que

$$\beta_{k+1}^{-(\frac{1}{2}+\varepsilon)} = d_k^H(L_{B^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}) \leq C_o\, d_k^H(K_a) \leq C_1\, k^{-\theta}$$

avec C_o et C_1 indépendants de k, on en déduit alors que

$$\liminf_{k \to \infty} k^{-(2\theta+\varepsilon)} \beta_k > 0 \quad , \quad \varepsilon > 0$$

d'où, en appliquant le th. 1 ou le th. 1'

(8) $$\liminf_{k \to \infty} k^{-(2\theta+\varepsilon)} |\lambda_k| > 0 \quad , \quad \varepsilon > 0 .$$

On a ainsi prouvé que (7) implique (8).

4. Application aux problèmes aux limites elliptiques "usuels".

Soit A un opérateur (proprement) elliptique d'ordre $2m$ à coefficients assez réguliers dans un ouvert borné Ω à frontière régulière dans $\mathbb{R}^{\nu}$.

Si A est fortement elliptique, on peut considérer des problèmes aux limites variationnels relatifs à A qui est alors "réalisé" comme opérateur fermé défini dans $L^2(\Omega) = H$, par une certaine forme sesquilinéaire a continue et V-elliptique avec

$$H_o^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega)$$

et (dans les notations du n° 3) il existe deux nombres α et M tels que

$$\frac{1}{\sqrt{M}} S_V \subset K_a \subset \frac{1}{\sqrt{\alpha}} S_V$$

où S_V désigne la boule unité de V. Pour évaluer les diamètres de K_a on utilisera le résultat suivant dû à <u>El Kolli</u> où s est réel positif quelconque :

(9) $$0 < \liminf_{n \to \infty} n^{s/\nu}\, d_n^{L^2(\Omega)}(S_{H_o^s(\Omega)}) \leq \limsup_{n \to \infty} n^{s/\nu}\, d_n^{L^2(\Omega)}(S_{H^s(\Omega)}) < +\infty ;$$

on en déduit que $d_n^H(K_a)$ se comporte comme $n^{-m/\nu}$ lorsque $n \to +\infty$ et par conséquent, utilisant les résultats du n° 3, on voit que :

(10) $$0 < \liminf_{k \to \infty} k^{-\frac{2m}{\nu}} \lambda_k \leq \limsup_{k \to \infty} k^{-\frac{2m}{\nu}} \lambda_k < +\infty .$$

Lorsque le problème est autoadjoint et que

$$(10') \qquad \liminf_{k \to \infty} k^{-\frac{2m}{\nu} - \varepsilon} |\lambda_k| > 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$ dans le cas général ; on va améliorer ce résultat en utilisant des résultats de régularité.

On considère à présent un système normal de conditions aux limites $\{B_1, \dots B_m\}$ vérifiant la condition de recouvrement relative à A au sens de Agmon-Douglis-Niremberg (ou condition de Shapiro-Lopatinski) ; suivant ces auteurs, on "réalise" A comme opérateur fermé dans $H = L^2(\Omega)$ avec

$$D_A = \{u \in H^{2m}(\Omega) \ ; \ B_j u = 0 \text{ sur } \Gamma, \ j = 1,2,\dots m\}$$

i.e.

$$H_0^{2m}(\Omega) \subset D_A \subset H^{2m}(\Omega) \ .$$

En utilisant le résultat cité plus haut de El Kolli (et les notations du n° 2), on voit que $d_n^H(L_A)$ se comporte comme $n^{-2m/\nu}$. Lorsque $n \to +\infty$ et par conséquent, utilisant les résultats du n° 2, on obtient (10) (ci-dessus) lorsque le problème est autoadjoint et sinon, dans le cas général, on obtient :

$$(11) \qquad \liminf_{k \to \infty} k^{-\frac{2m}{\nu}} |\lambda_k| > 0$$

à condition que (i) $2m < \nu/2$ et A est inversible (existence et unicité de la solution du problème aux limites) ou que (ii) $2m \geq \nu/2$ et $(A+tI)$ est inversible pour $t \geq 0$, d'inverse majoré par $C_A(t+1)^{-1}$ (c'est-à-dire que l'axe réel négatif est un "rayon de croissance minimale" au sens de Agmon qui donne des conditions très générales sous lesquelles cette hypothèse est vérifiée).

On a ainsi retrouvé d'une manière très simple une partie des résultats de Agmon.

5. Application à certains problèmes elliptiques dégénérés.

Suivant Baouendi et Goulaouic, on considère le problème variationnel où $H = L^2(\Omega)$,

$$V = \{u ; u, \sqrt{\varphi} \text{ grad } u \in L^2(\Omega)\}$$

où φ désigne une fonction de classe C^2 au voisinage de $\bar{\Omega}$ avec $\varphi > 0$ dans Ω et φ nulle à l'ordre un sur la frontière Γ de Ω (i.e. grad $\varphi \neq 0$ sur Γ), et

$$a(u;v) = \sum_{i,j=1}^{\nu} \int_{\Omega} a_{ij}\, \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} \overline{\frac{\partial v}{\partial x_j}}\, dx + \int_{\Omega} a_o\, u\, \bar{v}\, dx$$

où les fonctions a_{ij} et a_o sont de classe C^1 dans $\bar{\Omega}$ avec

$$\min_{x\in\bar{\Omega}} \operatorname{Re} a_o(x) > 0$$

$$\min_{x\in\bar{\Omega}} \min_{|\xi|=1} \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{\nu} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0 .$$

L'opérateur A associé est une réalisation de l'opérateur différentiel

$$- \sum_{i,j=1}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}\, \varphi \frac{\partial}{\partial x_i}) + a_o$$

et comme V est un espace normal, il n'y a pas de conditions aux limites dans la définition de D_A. Comme précédemment, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{M}} S_V \subset K_a \subset \frac{1}{\sqrt{\alpha}} S_V$$

et on devra évaluer les diamètres de S_V.

THÉORÈME 2. <u>On a</u>

$$0 < \liminf_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2(\nu-1)}}\, d_n^{L^2(\Omega)}(S_V) \leq \limsup_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2(\nu-1)}}\, d_n^{L^2(\Omega)}(S_V) < +\infty$$

<u>lorsque</u> $\nu \geqq 3$ <u>et</u>

$$0 < \liminf_{n\to\infty} (\frac{n}{\operatorname{Log} n})^{\frac{1}{2}}\, d_n^{L^2(\Omega)}(S_V) \leq \limsup_{n\to\infty} (\frac{n}{\operatorname{Log} n})^{\frac{1}{2}}\, d_n^{L^2(\Omega)}(S_V) < +\infty$$

<u>lorsque</u> $\nu = 2$.

<u>Démonstration</u>. Son originalité réside en ce qu'elle réduit le cas général à l'étude d'un cas "modèle" où Ω est la boule unité de $\mathbb{R}^\nu$.

<u>1ère étape</u>. Etude du cas modèle : on calcule explicitement la suite des valeurs propres λ_k de A lorsque Ω est la boule unité de $\mathbb{R}^\nu$, $\varphi(x) = 1 - |x|^2$ ($|x|$ norme euclidienne de x) et $a_o \equiv 1$, $a_{ij}(x) \equiv \delta_{ij}$ (symbole de Kroneker) ; on a donc

$$Au = - \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x_i}([1-|x|^2]\frac{\partial u}{\partial x_i}) + u .$$

Ce calcul fait indépendemment par <u>Boutet de Monvel</u> et <u>Shimakura</u> montre que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{Log} k}{k} \lambda_k = 4 \quad \text{si} \quad \nu = 2$$

et

$$\lim_{k\to\infty} k^{-\frac{1}{\nu-1}} \lambda_k = c_\nu^{1/\nu-1} \quad \text{si} \quad \nu \geqq 3$$

avec

$$C_\nu = 2^{2-\nu}(1-2^{1-\nu})\quad(\nu-1)[(\nu-1)!]^{-1}\ .$$

Dans ce cas on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\mathrm{Log}\ n}\right)^{\frac{1}{2}} d_n^{L^2(\Omega)}(S_V) = \tfrac{1}{2} \quad \text{si} \quad \nu = 2$$

et

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2(\nu-1)}} d_n^{L^2(\Omega)}(S_V) = C_\nu^{-\frac{1}{2(\nu-1)}} \quad \text{si} \quad \nu \geqq 3$$

(on a utilisé (6) en remarquant que $S_V = K_a$ car ici $\alpha = M = 1$ puisque a est exactement le produit scalaire de V).

<u>2ème étape</u>. Obtention de la majoration dans le cas général. Elle se déduit du cas particulier ci-dessus par un raisonnement banal utilisant des cartes locales.

<u>3ème étape</u>. Obtention de la minoration dans le cas général. On utilise ici une technique qui est non "standard" et devrait pouvoir servir dans l'étude d'autres types d'espaces. On note U la boule unité de $\mathbb{R}^\nu$; on fixe une famille d'ouverts $\Omega_j \subset \bar{\Omega}$, <u>deux à deux disjoints</u>, $j = 1,2,\ldots N$ tels que chaque Ω_j soit difféomorphe à un ouvert U_j de $\bar{U}$, avec

$$\bar{U} = \bigcup_{j=1}^{N} U_j\ .$$

Soit χ_j le difféomorphisme de Ω_j sur U_j ; on introduit encore une partition de l'unité sur $\bar{U}$ au moyen de fonctions différentiables φ_j , chaque φ_j ayant son support dans U_j et

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi_j^2 = 1\ .$$

On définit deux opérateurs L et M comme suit :

$$Lu(x) = \sum_{j=1}^{N} (\varphi_j u) \circ \chi_j(x)\ , \quad x\in\Omega\ ,\ u\in L^2(U)\ ^{(2)}$$

$$Mu(x) = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(x)(u \circ \chi_j^{-1})(x)\ , \quad x\in U\ ,\ u\in L^2(\Omega)\ .$$

On vérifie facilement que L est linéaire continu de $L^2(U)$ dans $L^2(\Omega)$ et de $V(U)$ dans $V(\Omega)$; de même M est linéaire continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(U)$ et de $V(\Omega)$ dans $V(U)$; de plus il est évident que

$$M \circ L = 1$$

(2) avec les conventions de prolongement par zéro, évidentes.

(on utilise ici le fait que les Ω_j sont deux à deux disjoints). En particulier, on a prouvé que L est un homomorphisme de $V(U)$ dans $V(\Omega)$.

On note à présent d_n la nième épaisseur de $S_{V(U)}$ dans $L^2(U)$; il existe un sous-espace vectoriel F_n de dimension $(n+1)$ dans $L^2(U)$ tel que la boule de rayon d_n (pour la norme de $L^2(U)$) dans F_n est contenue dans $S_{V(U)}$ c'est-à-dire que

$$\{u \in F_n \ ; \ \|u\|_{L^2(U)} \leq d_n\} \subset S_{V(U)}$$

(on utilise ici le fait que $S_{V(U)}$ est un ellipsoïde dans $L^2(U)$ et par conséquent, dans les notations du n° 1, F_n est l'espace vectoriel engendré par $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$).

Soit Φ_n l'image de F_n par L , comme L est injectif Φ_n est de dimension $(n+1)$ dans $L^2(\Omega)$ et si on désigne par μ la norme de M en tant qu'opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(U)$ et par λ la norme de L en tant qu'opérateur de $V(U)$ dans $V(\Omega)$, on voit que

$$\{v \in \Phi_n ; \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{d_n}{\mu}\} \subset \lambda \ S_{V(\Omega)}$$

et partant

$$d_n^{L^2(\Omega)}(S_{V(\Omega)}) \geq \frac{d_n}{\lambda\mu} = \frac{1}{\lambda\mu} d_n^{L^2(U)}(S_{V(U)})$$

pour tout n ; ceci achève de démontrer le théorème 2 .

On revient à présent au problème elliptique dégénéré. Appliquant les résultats du n° 3, on déduit du théorème 2 les inégalités

$$(12) \quad \begin{cases} 0 < \liminf\limits_{k \to \infty} \dfrac{\operatorname{Log} k}{k} \lambda_k \leq \limsup\limits_{k \to \infty} \dfrac{\operatorname{Log} k}{k} \lambda_k < +\infty & \text{si } \nu = 2 \\ 0 < \liminf\limits_{k \to \infty} k^{-\frac{1}{\nu-1}} \lambda_k \leq \limsup\limits_{k \to \infty} k^{-\frac{1}{\nu-1}} \lambda_k < +\infty & \text{si } \nu \geq 3 \end{cases}$$

dans le cas autoadjoint (ce résultat est moins précis que celui de Baouendi et Goulaouic qui prouvent l'existence de la limite et la calculent). Dans le cas général non autoadjoint, on obtient seulement la minoration

$$(12)' \quad \begin{cases} \liminf\limits_{k \to \infty} k^{-\varepsilon} \dfrac{\operatorname{Log} k}{k} |\lambda_k| > 0 & \text{si } \nu = 2 \\ \liminf\limits_{k \to \infty} k^{-\frac{1}{\nu-1} - \varepsilon} |\lambda_k| > 0 & \text{si } \nu \geq 3 \end{cases}$$

pour tout $\varepsilon > 0$; ce dernier résultat peut être amélioré si on fait usage du théorème de régularité suivant dû à Baouendi et Goulaouic :

$$D_A = \{u;\ u \in H^1(\Omega),\ \varphi u \in H^2(\Omega)\} .$$

Si on choisit A autoadjoint (D_A ne dépend pas du choix particulier de A !) on a alors $V = D_{A^{\frac{1}{2}}}$ et on déduit des résultats précédents les inégalités

$$(13)\quad \begin{cases} 0 < \liminf\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\nu-1}} d_n^{L^2(\Omega)}(S_{D_A}) \leqq \limsup\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\nu-1}} d_n^{L^2(\Omega)}(S_{D_A}) < +\infty & \text{si } \nu \geqq 3 \\ 0 < \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\operatorname{Log} n} d_n^{L^2(\Omega)}(S_{D_A}) \leqq \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\operatorname{Log} n} d_n^{L^2(\Omega)}(S_{D_A}) < +\infty & \text{si } \nu = 2 \end{cases}$$

et appliquant les résultats du n° 2 (ce qui est toujours possible puisqu'on a $\operatorname{Re}(Au;u) \geqq \alpha\|u\|_V^2$ pour tout $u \in D_A$, donc $(A+tI)$ est inversible pour $t \geqq 0$ et son inverse admet une majoration en $(t+1)^{-1}$) on obtient la minoration

$$(14)\quad \begin{cases} \liminf\limits_{k\to\infty} \frac{\operatorname{Log} k}{k} |\lambda_k| > 0 & \text{si } \nu = 2 \\ \liminf\limits_{k\to\infty} k^{-\frac{1}{\nu-1}} |\lambda_k| > 0 & \text{si } \nu \geqq 3 . \end{cases}$$

Ce résultat ne semblait pas connu.

Remarque. Tout ce qui précède repose sur un calcul de valeurs propres dans un cas particulier (1ère étape de la démonstration du théorème 2) et ce calcul n'est possible que parce que l'opérateur particulier laisse stable les polynômes de degré n donné. Cependant M. El Kolli a récemment substitué à ce calcul de valeurs propres un raisonnement basé sur l'approximation polynômiale qui fonctionne également lorsque la fonction poids φ est remplacée par φ^α ($\alpha \in [0,1]$) ; ceci permettra d'évaluer les valeurs propres d'une classe plus vaste de problèmes elliptiques dégénérés (à paraître).

BIBLIOGRAPHIE

AGMON. Lectures on elliptic boundary value problems, Van-Nostrand, Math. Studies 2.

AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG. Estimates near the boundary... C.P.A.M. 12 (1959) p. 623.

BAOUENDI-GOULAOUIC. Régularité et théorie spectrale... Arch. for rat. math. and anal. 34 (5) (1969) p. 361.

BOUTET DE MONVEL-GRISVARD. Le comportement asymptotique... C.R. Acad. Sc. Paris 272 (1971) p. 23.

EL KOLLI. n$^{\text{ième}}$ épaisseur dans les espaces de Sobolev... C.R. Acad. Sc. Paris (1971).

KATO. Fractional powers of dissipative operators. J. of Math. Soc. Japan 13 (3) (1961) p. 246.

MITIAGIN. Rapport au congrès de Moscou (1966).

SHIMAKURA. Quelques exemples de $\mathcal{E}$-fonctions... Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. 35 p. 408.

Note. Le contenu de ces exposés a été résumé dans une note avec M. L. Boutet de Monvel ; le n° 1 est dû à Mitiagin.