Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Jean-Claude de Paris

# Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples, démonstration de la convergence dans le cas d'un opérateur analytique bien décomposable

*Séminaire Jean Leray* (1971-1972), p. 1-55
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1971-1972____1_0>

# SÉMINAIRE

## SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES



PROBLÈME DE CAUCHY OSCILLATOIRE
POUR UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL
A CARACTÉRISTIQUES MULTIPLES,
DÉMONSTRATION DE LA CONVERGENCE
DANS LE CAS D'UN OPÉRATEUR ANALYTIQUE
BIEN DÉCOMPOSABLE

par Jean-Claude DE PARIS

Collège de France
1971-1972

Séminaire subventionné par le C.N.R.S. (R.C.P. 126)

TABLE DES MATIÈRES

PARTIE A



PARTIE B

PROBLÈME DE CAUCHY OSCILLATOIRE
POUR UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL À CARACTÉRISTIQUES MULTIPLES,
DÉMONSTRATION DE LA CONVERGENCE
DANS LE CAS D'UN OPÉRATEUR ANALYTIQUE BIEN DÉCOMPOSABLE

par Jean-Claude DE PARIS

**Partie A.**

0. INTRODUCTION.- On se propose, dans cet article, de donner une construction d'une onde asymptotique pour un opérateur différentiel $h$, à coefficients $C^\infty$ sur une variété $C^\infty$, $E$, puis d'étudier le problème de Cauchy oscillatoire pour $h$. Dans le cas d'un opérateur matriciel du premier ordre, P. Lax [12] a étudié un tel problème, puis D. Ludwig ([15], [16]) généralisant la notion d'onde asymptotique introduite par P. Lax, étudie le cas d'un opérateur matriciel d'ordre quelconque ; dans le cas d'un opérateur scalaire, qui est celui auquel on va s'intéresser, il obtient des résultats quand toutes les caractéristiques sont simples.

J. Leray [13], puis L. Gårding, T. Kotake et J. Leray [8] généralisent encore la notion d'onde asymptotique et construisent, pour un opérateur matriciel d'ordre quelconque, des ondes asymptotiques, dans le cas où la phase $\varphi$ correspond à une caractéristique simple du système.

Mme Y. Choquet-Bruhat [4], étudie un problème analogue, mais pour un opérateur matriciel quasi linéaire du premier ordre, à caractéristiques multiples, en utilisant la classification des systèmes à caractéristiques multiples de J. Vaillant [21].

J. Vaillant [22] montre, en reprenant les ondes asymptotiques au sens de Lax, que le problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur matriciel fortement hyperbolique possède une solution.

La plupart de ces études (sauf celles de D. Ludwig [16], J. Vaillant [21] et Mme Y. Choquet-Bruhat [4]) se font en considérant uniquement les termes principaux des opérateurs scalaires, composantes de l'opérateur matriciel (cas fortement hyperbolique). Dans D. Ludwig [16], J. Vaillant [21] et Mme Y. Choquet-Bruhat [4] sont étudiés des cas non fortement hyperboliques, à caractéristiques doubles.

Le but de cet article est de déterminer, en faisant des hypothèses plus faibles sur le terme principal de l'opérateur scalaire $h$, quelles conditions il faut imposer aux termes non principaux de $h$, pour avoir une solution et une seule du problème de Cauchy oscillatoire (au sens de Ludwig [15]). Les conditions obtenues, pour E de dimension quelconque, et les caractéristiques de multiplicité quelconque, coïncident avec celles trouvées par E. Levi [14] et Mme A. Lax [11] (quand E est de dimension 2), et par Mizohata et Ohya [18] (quand les caractéristiques sont au plus doubles) dans leur étude de la nature bien posée du problème de Cauchy.

Dans le cas des coefficients constants, nous comparons nos conditions à celles obtenues par J. Chaillou [3] dans son étude sur l'hyperbolicité.

Je remercie vivement J. Vaillant de ses encouragements qui m'ont été très précieux.

## 1. NOTATIONS ET RÉSULTATS.

Soient E une variété réelle $C^\infty$ de dimension $(n+1)$ et h un opérateur différentiel $C^\infty$ sur E, d'ordre t au voisinage d'un point a de E et de symbole principal $H(x;q)$.

Pour x donné dans E, $H(x;q)$ est une application polynomiale de $T^*_x$ (espace cotangent en x à E) dans $\mathbb{R}$. On considère un voisinage V de a, et des applications $H_s$ $(1 \leqq s \leqq \sigma)$ telles que

$$(1) \qquad \forall\ x \in V\ ,\ \forall\ q \in T^*_x\ : \quad H(x;q) = \prod_{s=1}^{\sigma} [H_s(x;q)]^{\alpha_s}.$$

Pour x donné dans V, $H_s$ est une application polynomiale irréductible de $T^*_x$ dans $\mathbb{R}$, homogène de degré $\tau_s$, à coefficients $C^\infty$ en x sur V. Les $H_s$ sont deux à deux différents et $\alpha_s$ est un entier non nul appelé multiplicité du facteur $H_s$.

<u>Remarque</u>.- Dans le cas $C^\infty$, il y a au moins la décomposition triviale ne comprenant qu'un seul facteur. Si E et h sont analytiques, on peut obtenir une décomposition (1) en utilisant le fait que l'anneau des germes des fonctions analytiques en un point est factoriel, et qu'un anneau de polynômes sur un anneau factoriel est factoriel.

DÉFINITION 1.- <u>On dit que deux opérateurs différentiels sont congrus modulo</u> p <u>si leur différence est d'ordre strictement inférieur à</u> p.

On note cette relation $\underset{p}{\sim}$.

Quand on s'intéressera à des propriétés relatives à un seul facteur de la décomposition (1), on notera K ce facteur et $\nu$ sa multiplicité.

PROPOSITION 1.- Il existe une sous-variété ouverte $\Omega$ de $E$, contenant $a$, des opérateurs $\ell_r$ $(0 \leqq r \leqq t)$ et $k$ (de symbole principal $K$) sur $\Omega$, et des nombres $\nu^r$ tels que

$$(2) \quad \begin{cases} h = \sum_{r=0}^{t} \ell_r \times (k)^{\nu_r} \qquad (\text{avec } \nu^o = \nu), \\ h \underset{t-r}{\sim} \sum_{\rho=0}^{r} \ell_\rho \times (k)^{\nu_\rho} \quad \text{pour tout } 0 \leqq r \leqq t . \end{cases}$$

DÉFINITION 2.- L'expression (2) est appelée une décomposition de $h$ par rapport à $K$.

Si les $f_j$ sont des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que pour tout $j \in \mathbb{Z}$ (ou pour $j \leqq j_o$), on ait $f'_j = f_{j-1}$, une onde asymptotique [15] pour $h$ au voisinage de $a$ est un développement formel :

$$(3) \qquad y = \sum_{j=0}^{\infty} Y^j \times (f_j \circ \varphi)$$

tel que si on calcule formellement $h(y)$ :

$$h(y) = \sum_{j=-t}^{\infty} F^j \times (f_j \circ \varphi)$$

tous les $F^j$ soient nuls sur un même voisinage de $a$.

Les $Y^j$ sont des fonctions $C^\infty$ sur un même voisinage de $a$, appelées coefficients de distorsion, et $\varphi$ est une fonction $C^\infty$ appelée la phase.

On montre que :

THÉORÈME 1.- Si l'un des facteurs $K$ de (1) est tel que l'équation $K(a;q) = 0$ a un zéro réel simple non nul $q^o$, il existe ([1]) une onde asymptotique pour $h$.

La phase de l'onde est solution de

$$K(x;\text{grad } \varphi(x)) = 0$$

et vérifie

$$\text{grad } \varphi(a) = q^o .$$

([1]) Avec une hypothèse supplémentaire de régularité pour $\varphi$.

Les coefficients $Y^j$ s'obtiennent par l'intégration de la même équation différentielle (au second membre près) le long des bicaractéristiques des hypersurfaces d'équations $\varphi(x) = \text{Cte}$.

Ce résultat était annoncé dans [7].

Remarque.- Si les coefficients de $h$ sont à valeurs complexes et les $f_j$ définies sur $\mathbb{C}$, on obtient un résultat identique en prenant pour $q^o$ un zéro complexe simple non nul de l'équation $K(a;q) = 0$.

DÉFINITION 3.- On dit qu'une décomposition de $h$ par rapport à $K$ est une bonne décomposition si pour tout $r$ $(0 \leq r \leq t)$, on a

$$\nu_r \geqq \nu_o - r .$$

On montre l'existence de solutions nulles au voisinage d'une hypersurface caractéristique multiple, mais régulière, en reprenant et en simplifiant un raisonnement fait dans [17] pour une caractéristique simple.

PROPOSITION 2.- Si $E$ et $h$ sont analytiques et si $S$ est une hypersurface caractéristique pour $h$ au voisinage de $a$, d'équation locale $\Phi(x) = 0$.

Si $\operatorname{grad} \Phi(a)$ est un zéro réel simple non nul de

$$\prod_{s=1}^{\sigma} H_s(a;q) = 0 .$$

Si la décomposition de $h$ par rapport au facteur $H_s$ dont $\operatorname{grad} \Phi(a)$ est zéro est une bonne décomposition, il existe une solution $Y$ de $h(Y) = 0$, non identiquement nulle, analytique de chaque côté de $S$, nulle d'un côté de $S$, et de classe $C^{t+\rho}$ $(\rho \geqq 0)$.

Avec des hypothèses analogues à celles de [22] où un problème d'un même type est étudié pour les systèmes, on montre que :

THÉORÈME 2.- Si $\Omega$ est une hypersurface passant par $a$, dont la forme tangente en $a$ est une direction d'hyperbolicité stricte pour

$$P(a;q) = \prod_{s=1}^{\sigma} H_s(a;q) ,$$

il existe (2) un nombre $t' \leq t$ tel que le problème de Cauchy oscillatoire avec $t$

(2) Avec des hypothèses de régularité supplémentaires sur les phases.

données sur $Q$ possède une solution et une seule quelles que soient les $t'$ premières données, à condition que les $(t-t')$ dernières aient une valeur imposée. Il y a une solution et une seule quelles que soient les données de Cauchy si et seulement si $h$ possède une bonne décomposition par rapport à chaque $H_s$ (3).

Ceci généralise un résultat de [15] obtenu quand toutes les caractéristiques sont simples.

Ce théorème montre que le cas « régulier » est celui où $h$ possède une bonne décomposition par rapport à chaque $H_s$. Un opérateur peut être décomposé de plusieurs manières ; la proposition 3 assure l'invariance de la notion de bonne décomposition.

PROPOSITION 3.- Si $h$ possède une bonne décomposition par rapport à l'un des facteurs $H_s$ de (1), toute décomposition de $h$ par rapport à $H_s$ est une bonne décomposition.

DÉFINITION 3.- On dit que $h$ est bien décomposable s'il possède une bonne décomposition par rapport à chaque facteur $H_s$ de (1).

Le théorème 3 donne une caractérisation des opérateurs bien décomposables qui correspond en deux variables aux conditions de [14] et de [11].

THÉORÈME 3.- Si pour tout $x$ appartenant à un voisinage $V$ de $a$, les $H_s(x;q)$ sont premiers entre eux deux à deux (4), une condition nécessaire et suffisante pour que $h$ soit bien décomposable est qu'il existe des opérateurs différentiels $\ell_r$ $(0 \leqq r \leqq t)$ et $h_s$ $(1 \leqq s \leqq \sigma)$ tels que

$$h = \sum_{r=0}^{t} \ell_r h_1^{[\alpha_1-r]+} \times \dots \times h_\sigma^{[\alpha_\sigma-r]+}$$

avec pour tout $r \leqq t$,

$$h_{t-r} \sim \sum_{\rho=0}^{r} \ell_\rho h_1^{[\alpha_1-\rho]+} \times \dots \times h_\sigma^{[\alpha_\sigma-\rho]+} .$$

(Avec $[p]_+ = p$ si $p \geqq 0$ et $[p]_+ = 0$ si $p \leqq 0$.)

(3) Les hypothèses de régularité sur les phases étant cette fois inutiles.

(4) Ce qui est réalisé par exemple si

$$\prod_{s=1}^{\sigma} H_s(a;q)$$

est strictement hyperbolique.

Plusieurs auteurs ([14], [11], [18], [20], etc.) ont étudié la nature bien posée du problème de Cauchy pour des opérateurs bien décomposables. On espère que les théorèmes 2 et 3 permettront de progresser davantage dans cette étude.

Si $h$ est à coefficients constants (sur $E = \mathbb{R}^{n+1}$), le lien entre les opérateurs hyperboliques et les opérateurs bien décomposables est précisé par le

THÉORÈME 4.- $h$ <u>bien décomposable et</u>

$$P(q) = \prod_{s=1}^{\sigma} H_s(q)$$

<u>strictement hyperbolique équivaut à</u> $h$ <u>hyperbolique et la multiplicité de</u> $H$ <u>sur</u> $V(P)^*$ <u>est localement constante</u>.

On utilise, pour démontrer ce théorème, une caractérisation donnée dans [3] des opérateurs différentiels hyperboliques à « multiplicité localement constante ».

<u>Remarque</u>.- Il résulte du théorème 2 et du théorème 4 que si $H$ est hyperbolique et est à multiplicité localement constante sur $V(P)^*$, $h$ hyperbolique par rapport à une direction $N$ équivaut à ce que le problème de Cauchy oscillatoire possède une solution et une seule quelles que soient les données de Cauchy sur une hypersurface dont la forme tangente en $a$ est $N$. On obtient donc une caractérisation de l'hyperbolicité uniquement par la considération de solutions formelles.

## 2. CONSTRUCTION D'UNE ONDE ASYMPTOTIQUE.

Soit un développement formel

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} Y^j \times (f_j \circ \varphi) .$$

Pour calculer formellement $h(y)$ on montre d'abord :

LEMME 1.- <u>Si</u> $\varphi$ <u>est une fonction</u> $C^\infty$ <u>sur</u> $E$, <u>il existe des opérateurs différentiels</u> $\mathcal{H}^r(\varphi)$, <u>d'ordre inférieur ou égal à</u> $r$, <u>tels que quelle que soit</u> $Y$, <u>de classe</u> $C^\infty$ <u>sur</u> $E$, <u>et quel que soit</u> $j \in Z$,

$$h(Y \times (f_j \circ \varphi)) = \sum_{r=0}^{t} \mathcal{H}^r(\varphi)[Y] \times (f_{j-t+r} \circ \varphi) .$$

<u>Preuve</u>.- Si $Y$ et $\varphi$ sont de classe $C^\infty$ sur $E$, on a ([1], [9]) :

$$e^{-i\omega\varphi} h(Ye^{i\omega\varphi}) = \sum_{r=0}^{t} P_r(\varphi, Y)(i\omega)^{t-r} ,$$

avec $P_r(\varphi,Y)$ de classe $C^\infty$ sur $E$.

Si on pose, pour $j \in Z$, et $\xi \in \mathbb{R}$

$$f_j(\xi) = \frac{t^{i\omega\xi}}{(i\omega)^j} ,$$

on a

$$h(Y \times (f_j \circ \varphi)) = \sum_{r=0}^{t} P_r(\varphi, Y) \times (f_{j-t+r} \circ \varphi) .$$

En fait, la seule propriété utilisée pour trouver ce résultat est que $f'_j = f_{j-1}$, et la formule précédente vaut pour une suite $(f_j)$ quelconque vérifiant cette condition.

Il reste à prouver que pour $\varphi$ donnée, l'application $Y \to P_r(\varphi, Y)$, qu'on notera $\mathcal{H}^r(\varphi)$, est un opérateur différentiel d'ordre $\leq r$. Les $P_r(\varphi, Y)$ étant des invariants, il suffit de montrer que dans toute carte locale $\mathcal{H}^r(\varphi)$ s'exprime comme un opérateur différentiel d'ordre $\leq r$, et ce résultat est bien connu ([8], [17]).

<u>Remarque</u>.- Si on prend $Y = 1$ dans (4), on voit que $\mathcal{H}^o(\varphi)$ est la multiplication par la fonction $H(x; \operatorname{grad} \varphi(x))$.

On calcule $h(y)$ en utilisant (4) :

$$h(y) = \sum_{j=-t}^{+\infty} F^j \times (f_j \circ \varphi) ,$$

avec

$$F^j = \sum_{r=0}^{\min(t,t+j)} \mathcal{H}^r(\varphi)[Y^{t+j-r}] .$$

Les équations définissant l'onde asymptotique sont donc :

$$\text{pour } j \geqq -t : \quad F^j = 0 .$$

On montre maintenant la proposition 1 qui assure qu'un opérateur possède des décompositions.

Soit $K$ l'un des facteurs de (1), $\nu_o$ sa multiplicité ; on a $H = L_o(K)^{\nu_o}$. Soit $\Omega$ contenant $a$, un ouvert de coordonnées locales sur lequel (1) est vraie. On définit sur la sous-variété ouverte $\Omega$ de $E$ des opérateurs différentiels $k$ et $\ell_o$ de symbole principal respectif $K$ et $L_o$ : on a

$$h \underset{t}{\sim} \ell_o(k)^{\nu_o} .$$

Soit $\lambda_1 = h - \ell_o(k)^{\nu_o}$ d'ordre $\theta(\lambda_1)$ sur $\Omega$. Si $\theta(\lambda_1) = t-1$, on appelle $\nu_1$ la multiplicité de $K$ dans le symbole principal $\Lambda_1$ de $\lambda_1$ ; on a donc $\Lambda_1 = (K)^{\nu_1} \times L_1$ (avec $\nu_1 = 0$ éventuellement). Si $\ell_1$ est un opérateur différentiel de symbole principal $L_1$, on a

$$h \underset{t-1}{\sim} \ell_o(k)^{\nu_o} + \ell_1(k)^{\nu_1} .$$

Si $\theta(\lambda_1)$ est $\leqq t-2$, on prend $\ell_1 = 0$ et $\nu_1 = t$ et la formule précédente est encore vraie. Après un nombre fini de telles opérations, on peut écrire

$$h = \sum_{r=0}^{t} \ell_r(k)^{\nu_r} ,$$

avec pour tout $r \leqq t$ :

$$h \underset{t-r}{\sim} \sum_{\rho=0}^{r} \ell_\rho(k)^{\nu_\rho} .$$

Le lemme 2 donne l'expression des $\mathcal{H}^\alpha(\varphi)$ pour un opérateur qui possède une décomposition.

LEMME 2.- <u>Si on considère une décomposition de</u> $h$ <u>par rapport à</u> $K$, <u>on a, pour</u> $\alpha \leqq t$ [<u>en notant</u> $\theta(\ell_r)$ <u>l'ordre de</u> $\ell_r$, <u>et</u> $\theta(k)$ <u>celui de</u> $k$] :

$$(5) \qquad \mathcal{H}^\alpha(\varphi) = \sum_{r=0}^{\alpha} \sum_{\substack{0 \leqq \beta_o \leqq \theta(\ell_r) \\ 0 \leqq \beta_i \leqq \theta(k) \\ \beta_o + \sum_{i=1}^{\nu_r} \beta_i = \alpha - r}} \mathcal{L}_r^{\beta_o}(\varphi) \times \mathcal{K}^{\beta_1}(\varphi) \times \dots \times \mathcal{K}^{\beta_{\nu_r}}(\varphi) .$$

<u>Preuve</u>.- Si $b = k_1 \times \dots \times k_p$ avec $\theta(k_i) = \gamma_i$, on a, si $\alpha \leqq \gamma$ $\left(\gamma = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i\right)$ et avec des notations évidentes :

$$(5)' \qquad \mathcal{B}^\alpha(\varphi) = \sum_{\substack{0 \leqq \alpha_i \leqq \gamma_i \\ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = \alpha}} \mathcal{K}_1^{\alpha_1}(\varphi) \times \dots \times \mathcal{K}_p^{\alpha_p}(\varphi) .$$

On démontre ce résultat par récurrence sur $p$ ; pour $p = 1$ il est évident, pour $p = 2$, on utilise le lemme 1.

Soit $b = k_1 k_2$ :

$$k_1 k_2 (Y e^{i\omega\varphi}) = k_1 \left( \sum_{\alpha_2=0}^{\gamma_2} \mathcal{K}_2^{\alpha_2}(\varphi)[Y] \times (i\omega)^{\gamma_2-\alpha_2} e^{i\omega\varphi} \right)$$

$$= \sum_{\alpha_1=0}^{\gamma_1} \sum_{\alpha_2=0}^{\gamma_2} \mathcal{K}_1^{\alpha_1}(\varphi)\mathcal{K}_2^{\alpha_2}(\varphi)[Y] \times (i\omega)^{(\gamma_1+\gamma_2)-(\alpha_1+\alpha_2)} e^{i\omega\varphi}$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{\gamma_1+\gamma_2} \mathcal{B}^{\alpha}(\varphi)[Y] \times (i\omega)^{\gamma-\alpha} e^{i\omega\varphi} ,$$

d'où le résultat.

Si (5)' est vrai pour $1,\dots,p-1$, on le démontre pour $p$ en utilisant la formule qui vient d'être établie.

Si

$$h = \sum_{r=0}^{t} h_r , \quad \text{avec } \theta(h_r) = t-r ,$$

on a

$$\mathcal{H}^{\alpha}(\varphi) = \sum_{r=0}^{\alpha} \mathcal{H}_r^{\alpha-r}(\varphi) .$$

L'utilisation de ces deux résultats donne le lemme 2.

$$F^{-t} = 0 \text{ équivaut à } H(x; \operatorname{grad}\varphi(x)) \times Y^o(x) = 0 .$$

Si $H(x; \operatorname{grad}\varphi(x)) = 0$ au voisinage de $a$, on peut satisfaire cette équation sans prendre $Y^o$ nulle. (En fait choisir $\varphi$ de cette manière n'est nécessaire que si $E$ et $h$ sont analytiques.)

On suppose que l'un des facteurs, qu'on notera $K$, de la décomposition (1) possède pour $x = a$ un zéro réel simple non nul $q^o$. Il existe alors une fonction $\varphi$, $C^\infty$ au voisinage de $a$, et solution de $K(x; \operatorname{grad}\varphi(x)) = 0$, avec $\operatorname{grad}\varphi(a) = q^o$.

Avec ce choix de $\varphi$, la première équation est vérifiée sans hypothèse sur $Y^o$.

LEMME 3.- <u>Soit</u> $m = \min\{\nu_r + r \mid 0 \le r \le t\}$. <u>On a</u> $\mathcal{H}^{\alpha}(\varphi) = 0$ <u>si</u> $\alpha \le m-1$, <u>et, si</u> $\mathcal{R} = \{r \mid \nu_r + r = m\}$, <u>on a</u>

$$\mathcal{H}^m(\varphi) = \sum_{r \in \mathcal{R}} \mathcal{L}_r^o(\varphi)[\mathcal{K}(\varphi)]^{m-r} .$$

Preuve.- Si $\alpha < m$, en reprenant l'expression de $\mathcal{H}^{\alpha}(\varphi)$ donnée par le lemme 2, on voit que dans chacun des termes de la somme définissant $\mathcal{H}^{\alpha}(\varphi)$, on a

$$\beta_o + \sum_{i=1}^{\nu_r} \beta_i = \alpha - r .$$

Si aucun des $\beta_i$ $(1 \leqq i \leqq \nu_r)$ n'était nul, on aurait $\nu_r \leqq \alpha - r$, ce qui est impossible si $\alpha < m$. D'après le choix de $\varphi$, $\mathcal{H}^o(\varphi)$ est nul. Ceci démontre la première partie du lemme.

Si $\alpha = m$, le même raisonnement montre que les seuls termes non nuls de la somme sont ceux pour lesquels :

$$m = \nu_r + r , \quad \text{avec} \quad \beta_o = 0 , \quad \beta_1 = \dots = \beta_{\nu_r} = 1 .$$

Soit $\vec{P}(x)$ le vecteur de coordonnées locales :

$$p^{\alpha}(x) = \frac{\partial K}{\partial q_{\alpha}}(x; \text{grad } \varphi(x)) ,$$

grad $\varphi(a)$ étant un zéro simple de $K(a;q) = 0$, le vecteur $\vec{P}(a)$ est $\neq \vec{0}$, donc il reste non nul sur un voisinage de $a$ (qu'on notera encore $\Omega$). Le théorème de Frobénius [5] permet de choisir les coordonnées locales dans $\Omega$ de façon à ce que $\vec{P}(x) = (1,0,\dots,0)$, et l'expression de $\mathcal{H}^1(\varphi)$ dans cette carte locale est

$$\mathcal{H}^1(\varphi) = \frac{\partial}{\partial x^o} + \beta$$

En général, si $r_o$ est le plus petit élément de $\mathcal{R}$, on a $L_{r_o}(a;\text{grad } \varphi(a)) \neq 0$ et

$$\mathcal{H}^m(\varphi) = \sum_{j=0}^{m-r_o} \delta_j(x) \times \frac{\partial^j}{(\partial x^o)^j} ,$$

avec $\delta_{m-r_o}(x)$ non nul sur un voisinage de $a$ (qu'on notera encore $\Omega$).

Cependant il peut se produire, pour certaines $\varphi$, que $L_{r_o}(a;\text{grad } \varphi(a)) = 0$. On fait alors une hypothèse de régularité supplémentaire pour $\varphi$ : on suppose qu'il existe $r_o(\varphi) \in \mathcal{R}$ tel que si $r \in \mathcal{R}$ et $r < r_o(\varphi)$, on a

$$L_r(x; \text{grad } \varphi(x)) = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

et

$$L_{r_o(\varphi)}(x;\ \mathrm{grad}\ \varphi(x)) \neq 0 \quad \text{sur} \quad \Omega .$$

$\mathcal{H}^m(\varphi)$ est alors un opérateur différentiel d'ordre $\mu(\varphi) = m - r_o(\varphi)$ .

Le premier $F^j$ non identiquement nul est $F^{-t+m}$ et, en tenant compte du lemme 3 :

$$F^{-t+m}(x) = \mathcal{H}^m(\varphi)[Y^o](x) ,$$

$Y^o$ est donc déterminé par l'intégration d'une équation différentielle linéaire ordinaire, d'ordre $\mu(\varphi)$ le long des bicaractéristiques des hypersurfaces caractéristiques d'équation $\varphi(x) = \mathrm{Cte}$. Si on suppose $Y^o,\ldots,Y^{j-1}$ connus et de classe $C^\infty$ sur $\Omega$ , on détermine $Y^j$ en intégrant la même équation différentielle, au second membre près, qui est cette fois une fonction connue et $C^\infty$ sur $\Omega$ , mais pas nécessairement nulle (5). Ceci termine la démonstration du théorème 1.

Remarque.- Si E et h sont analytiques (réels ou complexes), le théorème 1 est encore valable ; la phase et les coefficients de distorsion étant cette fois analytiques sur un même voisinage de a . Dans le cas complexe, l'hypothèse $q^o$ réel est évidemment inutile.

On applique maintenant ce théorème à la construction de solutions nulles pour h.

Soit E une variété analytique réelle et h un opérateur différentiel analytique sur E. Soit S une hypersurface analytique de E et $a \in S$, possédant un voisinage V tel que S soit caractéristique en tout point de $V \cap S$. L'anneau des séries entières convergentes étant factoriel, on a une décomposition de $H(x;q)$ analogue à (1) et un facteur K de (1) tel que $K(x;\ \mathrm{grad}\ \psi(x)) = 0$ si $x \in V' \cap S$ [V' est un voisinage de a et $\psi(x) = 0$ une équation locale de S]. S est dite caractéristique régulière [21] si le vecteur $\vec{P}(x)$ de coordonnées locales

$$p^\alpha(x) = \frac{\partial K}{\partial q_\alpha}(x;\ \mathrm{grad}\ \psi(x))$$

est différent de $\vec{0}$ pour $x = a$. Il existe alors ([6], [10]) une fonction $\varphi$ analytique au voisinage de a telle que

---

(5) Si $\mu(\varphi) = 0$ (cas de l'équation parabolique par exemple), on ne peut obtenir que l'onde asymptotique nulle.

$$K(x;\mathrm{grad}\,\varphi(x)) = 0 \quad \text{au voisinage de } a \ ,$$

$$\mathrm{grad}\,\varphi(a) = \mathrm{grad}\,\psi(a) \ ,$$

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in S \ .$$

Le théorème 1 assure l'existence d'une onde asymptotique pour $h$, définie au voisinage de $a$, de phase $\varphi$, et dont les coefficients de distorsion $Y^j$ sont cette fois analytiques sur un même voisinage de $a$. On montre, avec une condition supplémentaire sur $h$, que cette onde asymptotique permet de construire des solutions nulles pour $h$ (résultat bien connu quand $S$ est caractéristique simple [10], [19], [17]). C'est la méthode de [17] que nous allons reprendre pour une caractéristique multiple.

On suppose que $h$ possède une bonne décomposition par rapport à $K$

$$(\nu_o = \min\{\nu_r + r \mid 0 \leq r \leq t\})$$

et que

$$L_o(a;\ \mathrm{grad}\,\varphi(a)) \neq 0 \ .$$

On a alors $m = \nu_o$ et $r_o = 0$, et les $Y^j$ sont des fonctions analytiques, déterminées par l'intégration d'équations différentielles d'ordre $\nu_o$ le long des bicaractéristiques des hypersurfaces caractéristiques d'équations $x^o = \mathrm{Cte}$. [Si les coordonnées locales sont telles que $\varphi(x) = x^o$.]

Soit $g$ la série formelle à $(n+2)$ variables $(x^o, x^1, \ldots, x^n, z)$ :

$$g(x,z) = \sum_{j=0}^{\infty} Y^j(x) \times \frac{z^{j+t-\nu_o}}{(j+t-\nu_o)!}$$

et $\tilde{h}$ l'opérateur différentiel de $(n+2)$ variables :

$$\tilde{h}\left(x,z;\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \sum_{r=0}^{t} \mathcal{H}^r(\varphi)\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \times \frac{\partial^{t-r}}{\partial z^{t-r}} = \sum_{r=\nu_o}^{t} \mathcal{H}^r(\varphi)\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right) \times \frac{\partial^{t-r}}{\partial z^{t-r}} \ .$$

Un théorème de [10] assure l'existence et l'unicité de la solution analytique de l'équation $\tilde{h}(Y) = 0$, avec $\nu_o$ données de Cauchy sur $x^o = 0$, $g_u(x',z)$ $(0 \leq u < \nu_o)$, et $t - \nu_o$ données de Cauchy sur $z = 0$ (qu'on prend nulles), quand les données sont compatibles sur $x^o = z = 0$. L'unicité de la solution série formelle à un tel problème résulte d'un théorème de [7].

On prend

$$g_u(x',z) = \sum_{j=0}^{\infty} g_u^j(x') \times \frac{z^{j+t-\nu_o}}{(j+t-\nu_o)!} \ ,$$

ce qui assure la compatibilité sur $x^o = z = 0$. Si les $Y^j$ sont telles que

$$\frac{\partial^u}{(\partial x^o)^u} Y^j(0,x') = g_u^j(x') \quad \text{pour tout} \quad j \geqq 0 \quad \text{et} \quad 0 \leqq u < \nu_o \,.$$

(On peut imposer ces conditions de Cauchy puisque $Y^j$ est déterminé par l'intégration d'une équation différentielle d'ordre $\nu_o$ en $\frac{\partial}{\partial x^o}$), alors $g$ est une solution formelle du problème précédent ; elle est donc analytique au voisinage de l'origine.

Si on prend les fonctions $f_j$ définies dans [17] :

$$f_j(\xi) = \frac{\xi^{j+t+\rho}}{(t+j+\rho)!} \quad \text{pour} \quad \xi > 0 \quad \text{et} \quad f_j(\xi) = 0 \quad \text{si} \quad \xi \leqq 0$$

(avec $\rho$ , nombre entier donné, strictement positif), l'onde asymptotique

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} Y^j \times (f_j \circ \varphi)$$

définit une fonction $Y(x)$ , avec

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} Y^j(x) \times \frac{(x^o)^{t+j+\rho}}{(t+j+\rho)!} \quad \text{pour} \quad x^o \geqq 0$$

et

$$Y(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x^o \leqq 0 \,.$$

Il résulte de l'étude précédente que $Y$ est analytique pour $x^o > 0$ , pour $x^o < 0$ , et que sur le voisinage de l'origine où elle est définie, elle est de classe $C^{t+\rho-1}$.

Ceci assure bien l'existence d'une solution nulle, et termine la démonstration de la proposition 2.

## 3. PROBLÈME DE CAUCHY OSCILLATOIRE.

Soit $Q$ une hypersurface contenant le point $a$ , d'équation locale $x^o = 0$ au voisinage de $a$ , $\psi$ une fonction $C^\infty$ de restriction $\psi$ à $Q$ ; on suppose grad $\psi(a) \neq 0$ . On se donne $t$ développements formels :

$$0 \leqq \alpha < t \; : \quad g_\alpha(x') = \sum_{j=0}^{\infty} b_\alpha^j(x') \times f_{j-\alpha}(\psi(x'))$$

Résoudre le problème de Cauchy oscillatoire, c'est trouver un développement formel $y$ , somme d'ondes asymptotiques pour $h$ , tel que chaque phase soit caractéristique et vérifie $\varphi(0,x') = \psi(x')$, et tel que

$$\partial_{(0)\alpha} y(0,x') = g_\alpha(x') \quad \text{pour} \quad 0 \leqq \alpha < t .$$

On suppose que la forme tangente en $a$ à $Q$ est une direction d'hyperbolicité stricte pour

$$P(a;q) = \prod_{s=1}^{\sigma} H_s(a;q) .$$

Si $\tau_s$ est le degré de $H_s$ et $\tau$ celui de $P$, l'équation $P(a;p_0,\text{grad}\ \psi(a))$ possède $\tau$ racines réelles distinctes $p_0^\ell(a)$. On construit comme dans [22], $\tau$ fonctions $\varphi^\ell$ $(1 \leqq \ell \leqq \tau)$ telles que pour chaque $\ell$, il existe un $s$ unique pour lequel

$$H_s(x;\text{grad}\ \varphi^\ell(x)) = 0 .$$

On a de plus

$$\varphi^\ell(0,x') = \psi(x') \quad \text{et} \quad \text{grad}\ \varphi^\ell(a) = (p_0^\ell(a), \text{grad}\ \psi(a)) .$$

On a de cette façon toutes les fonctions caractéristiques $\varphi$ telles que

$$\varphi(0,x') = \psi(x') .$$

Si chaque $\varphi^\ell$ vérifie la condition de régularité mise en évidence dans le paragraphe 2, le théorème 1 assure pour chaque $\ell$ l'existence d'une onde asymptotique

$$y_\ell = \sum_{j=-t}^{\infty} Y_\ell^j \times (f_j \circ \varphi^\ell) .$$

Les $Y_\ell^j$ sont déterminés par l'intégration d'équations différentielles linéaires d'ordre $\mu_\ell$ le long des bicaractéristiques des hypersurfaces d'équations $\varphi^\ell(x) = \text{Cte}$.

$Q$ n'est pas caractéristique en $a$ pour $\mathcal{H}^{m_\ell}(\varphi^\ell)$, donc si on se donne pour tout $j \geqq -t$ :

$$\partial_{(0)u}\, Y_\ell^j(0,x') \quad \text{pour} \quad 0 \leqq u < \mu_\ell ,$$

l'onde asymptotique $y_\ell$ est déterminée de façon unique.

On cherche la solution du problème de Cauchy oscillatoire sous la forme

$$y = \sum_{\ell=1}^{\tau} \sum_{j=-t}^{+\infty} Y_\ell^j \times (f_j \circ \varphi^\ell) .$$

Il ne reste donc plus qu'à étudier de quelle manière la donnée des $g_\alpha(x')$ détermine les $\partial_{(0)u} Y^j_\ell(0,x')$. Pour cela on va calculer formellement les $\partial_{(0)\alpha} y(0,x')$ et les identifier aux $g_\alpha(x')$ .

LEMME 4.- Si $Y = \sum_{j\in\mathbb{Z}} Y^j \times (f_j \circ \varphi)$ , on a

$$\partial_{(0)\alpha} Y = \sum_{j\in\mathbb{Z}} F^j_\alpha \times (f_{j-\alpha} \circ \varphi) ,$$

avec

$$F^j_\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} C^k_\alpha (\partial_0\varphi)^{\alpha-k} \partial_{(0)k} Y^{j-k} + \sum_{0\leq u<k\leq\alpha} \Gamma^{u,k}_\alpha \partial_{(0)u} Y^{j-k}$$

où les $\Gamma^{u,k}_\alpha$ sont des fonctions connues, indépendantes de $j$ .

On montre ce lemme par récurrence sur $\alpha$ . Pour $\alpha = 0$, il est évident. Si on le suppose vrai pour $0,\ldots,\alpha$ , on a

$$\partial_{(0)\alpha} Y = \sum_{j\in\mathbb{Z}} F^j_\alpha \times (f_{j-\alpha} \circ \varphi) .$$

En dérivant par rapport à $x^0$, on trouve

$$F^j_{\alpha+1} = (\partial_0\varphi) \times F^j_\alpha + \partial_0 F^{j-1}_\alpha .$$

On montre alors en utilisant l'hypothèse de récurrence que $F^j_{\alpha+1}$ a la forme annoncée dans le lemme 4 .

L'identification des $\partial_{(0)\alpha} y(0,x')$ avec les $g_\alpha(x')$ donne, avec des notations évidentes, pour $j \geqq -t$, et $0 \leqq \alpha < t$ :

$$\sum_{\ell=1}^{\tau} F^j_{\alpha,\ell}(0,x') = b^j_\alpha(x')$$

(en convenant que $b^j_\alpha = 0$ si $j < 0$).

On note $A^j_\alpha$ cette équation et $\mathcal{A}^j$ le système des $t$ équations $A^j_\alpha$ pour $\alpha = 0,\ldots,t-1$. On se propose de résoudre successivement les différents systèmes $\mathcal{A}^j$ .

La valeur de $F^j_{\alpha,\ell}$ et l'ordre des équations qui déterminent les $Y^j_\ell$ nous incitent à prendre comme inconnues pour le système $\mathcal{A}^j$, les fonctions

$$\partial_{(0)u} Y^{j-u}_\ell(0,x') \quad \text{pour} \quad 0 \leqq u < \mu_\ell \quad \text{et} \quad 1 \leqq \ell \leqq \tau .$$

On note $\mathcal{J}^j$ l'ensemble de ces inconnues.

Notations :

$$C_\alpha^k = 0 \quad \text{si} \quad k > \alpha \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{q} \delta_k = 0 \quad \text{si} \quad p > q \ ,$$

$$\lambda^\ell(x') = \partial_o \varphi^\ell(0,x') \quad \text{et} \quad \bar{f}(x') = f(0,x') \ .$$

Avec ces conventions $A_\alpha^j$ s'écrit :

$$\sum_{\ell=1}^{\tau} \sum_{k=0}^{\mu_\ell - 1} C_\alpha^k (\lambda^\ell)^{\alpha-k} \overline{\partial_{(0)k} Y_\ell^{j-k}} = d_\alpha^j \quad ,$$

avec

$$d_\alpha^j = b_\alpha^j - \sum_{\ell=1}^{\tau} \left\{ \sum_{k=\mu_\ell}^{\alpha} C_\alpha^k (\lambda^\ell)^{\alpha-k} \overline{\partial_{(0)k} Y_\ell^{j-k}} + \sum_{0 \leqq u < k \leqq \alpha} \overline{\Gamma_\alpha^{u,k} \partial_{(0)u} Y_\ell^{j-k}} \right\} .$$

Si on suppose les inconnues de $\mathcal{J}^{-t}, \ldots, \mathcal{J}^{j-1}$ déterminées, on montre que les $d_\alpha^j$ sont des fonctions connues.

En effet, une fonction $\overline{\partial_{(0)u} Y_\ell^{j-k}}$ pour $0 \leqq u < k \leqq t-1$ est une inconnue du système $\mathcal{A}^{j-(k-u)}$ et on a $k-u \geqq 1$ . Si $k \geqq \mu_\ell$ , chaque

$$\overline{\partial_{(0)u} Y_\ell^{j-k}}$$

pour $u < \mu_\ell$ est connue pour la même raison $(k-u \geqq 1)$, donc on a pu intégrer l'équation qui détermine $Y_\ell^{j-k}$ et cette fonction est connue, ainsi que toutes ses dérivées.

Le lemme suivant précise le nombre d'éléments de $\mathcal{J}^j$ .

LEMME 5.- <u>Le nombre</u> $t'$ <u>des inconnues est inférieur ou égal à</u> $t$ ; <u>on a</u> $t' = t$ <u>si et seulement si</u> $h$ <u>possède une bonne décomposition par rapport à chaque</u> $H_s$ .

A chaque $H_s$ sont associées $\tau_s$ fonctions $\varphi^\ell$ et pour chacun de ces $\ell$ , on a

$$\mu_\ell \leqq \alpha_s \ ,$$

donc

$$t' = \sum_{\ell=1}^{\tau} \mu_\ell \leqq \sum_{s=1}^{\sigma} \tau_s \alpha_s = t \ .$$

On a $t = t'$ si et seulement si pour tout $\ell$ , $\mu_\ell = \alpha_s$ , c'est-à-dire si $h$ possède une bonne décomposition par rapport à chaque $H_s$ et si $r_o(\varphi^\ell) = 0$ pour tout $\ell$ . Cette dernière condition est nécessairement vérifiée si $P(a;q)$ est strictement hyperbolique car grad $\varphi^{\ell}(a)$ est, pour tout $\ell$, zéro simple de $P(a;q) = 0$.

On a donc $t = t'$ si et seulement si $h$ possède une bonne décomposition par rapport à chaque $H_s$.

Le système $\mathcal{A}^j$ est donc rectangulaire et le nombre des inconnues est inférieur ou égal au nombre des équations.

LEMME 6.- <u>Le déterminant des</u> $t'$ <u>premières équations est différent de</u> 0 <u>au voisinage de</u> a.

On suppose les $\ell$ ordonnés de façon à ce que $\mu_\ell$ soit une fonction décroissante de $\ell$, et on note $\tau'$ $(\tau' \leqq \tau)$ le nombre de $\mu_\ell \neq 0$. Le déterminant est formé de $\tau'$ tranches verticales de même nature. La $\ell$ième tranche se compose de $\mu_\ell$ colonnes $C_\ell^0, \dots, C_\ell^{\mu_\ell - 1}$ et le terme de rang $(\alpha+1)$ $(0 \leqq \alpha \leqq t'-1)$ de la $k^{\text{ième}}$ colonne de la $\ell^{\text{ième}}$ tranche est $C_\alpha^k(\lambda^\ell)^{\alpha-k}$.

$$D = \left.\underbrace{\begin{vmatrix} \dots C_\alpha^k(\lambda^1)^{\alpha-k} \dots \end{vmatrix}_{0\leqq k<\mu_1} \quad \begin{vmatrix} \dots C_\alpha^k(\lambda^\ell)^{\alpha-k} \dots \end{vmatrix}_{0\leqq k<\mu_\ell} \quad \begin{vmatrix} \dots C_\alpha^k(\lambda^{\tau'})^{\alpha-k} \dots \end{vmatrix}_{0\leqq k<\mu_{\tau'}}}_{1\leqq \ell \leqq \tau'}\right\} 0\leqq\alpha\leqq t'-1$$

On note $D(\lambda^1, \dots, \lambda^{\tau'}; \mu_1, \dots, \mu_{\tau'})$, ce déterminant. On va montrer par récurrence sur $\tau'$ que ce déterminant est différent de zéro. Si $\tau' = 1$, [6] la matrice associée est triangulaire inférieure, et tous les termes de la diagonale principale valent 1, donc ce déterminant vaut 1.

On montre maintenant que

$$D(\lambda^1, \dots, \lambda^{\tau'}; \mu_1, \dots, \mu_{\tau'}) = \prod_{\ell=2}^{\tau'} (\lambda^\ell - \lambda^1)^{\mu_1 \mu_\ell} \times D(\lambda^2, \dots, \lambda^{\tau'}; \mu_2, \dots, \mu_{\tau'}) .$$

Les $\lambda^\ell$ étant deux à deux différents en a, donc au voisinage de a, D sera bien différent de zéro au voisinage de a.

On retranche de chaque ligne (sauf de la première), la ligne précédente multipliée par $\lambda^1$ (en commençant par la dernière). Le terme de rang $(\alpha+1)$ de la $k^{\text{ième}}$ tranche de la $\ell^{\text{ième}}$ colonne du déterminant ainsi transformé est (pour $\alpha \geqq 1$):

$$(\lambda^\ell)^{\alpha-k-1}(C_\alpha^k \lambda^\ell - C_{\alpha-1}^k \lambda^1) .$$

---

(6) $\tau' = 0$ correspond au cas où toutes les ondes asymptotiques sont nulles, et dans ce cas il n'y a pas de solution, sauf si tous les $g_\alpha$ sont nuls.

En particulier la première colonne du déterminant a tous ses termes nuls sauf le premier qui vaut 1. On développe $D$ par rapport à la première colonne, on obtient alors un déterminant à $(t'-1)$ lignes et $(t'-1)$ colonnes, égal à $D$. On va montrer qu'à un facteur multiplicatif non nul près, on peut le mettre sous une forme semblable à celle de $D$.

$$D = \left.\underbrace{\left|\begin{array}{c|c|c} \underbrace{\ldots C^{k-1}_{\alpha-1}(\lambda^1)^{\alpha-k}\ldots}_{1 \leqq k < \mu_1} & \cdots & \underbrace{\ldots(C^k_\alpha\lambda^\ell - C^k_{\alpha-1}\lambda^1)(\lambda^\ell)^{\alpha-k-1}\ldots}_{0 \leqq k < \mu_\ell} \end{array}\right|}_{1 \leqq \ell \leqq \tau'}\right\} 1 \leqq \alpha \leqq t'-1$$

On remarque que $C^k_\alpha = C^k_{\alpha-1} + C^{k-1}_{\alpha-1}$ (même si $k \geqq \alpha$), donc dans la première tranche $(\ell = 1)$, on a

$$(C^k_\alpha - C^k_{\alpha-1})(\lambda^1)^{\alpha-k} = C^{k-1}_{\alpha-1}(\lambda^1)^{\alpha-k} .$$

Considérons maintenant la $\ell^{\text{ième}}$ $(\ell \geqq 2)$ tranche. On peut mettre $(\lambda^\ell-\lambda^1)$ en facteur dans la première colonne puisque le terme général de cette colonne est $(\lambda^\ell-\lambda^1)(\lambda^\ell)^{\alpha-1}$. Après cette mise en facteur, on retranche la première colonne de la seconde dont le terme général devient

$$C^1_{\alpha-1}(\lambda^\ell-\lambda^1)(\lambda^\ell)^{\lambda-2}$$

Après un nombre fini de telles opérations, dans chaque tranche, on trouve

$$D(\lambda^1,\ldots,\lambda^{\tau'};\mu_1,\ldots,\mu_{\tau'}) = \prod_{\ell=2}^{\tau'} (\lambda^\ell-\lambda^1)^{\mu_\ell} D(\lambda^1,\ldots,\lambda^{\tau'};\mu_1-1,\mu_2,\ldots,\mu_{\tau'})$$

et après $\mu_1$ transformations de cette sorte, on a

$$D(\lambda^1,\ldots,\lambda^{\tau'};\mu_1,\ldots,\mu_{\tau'}) = \prod_{\ell=2}^{\tau'} (\lambda^\ell-\lambda^1)^{\mu_1\mu_\ell} D(\lambda^2,\ldots,\lambda^{\tau'};\mu_2,\ldots,\mu_{\tau'})$$

et finalement

$$D(\lambda^1,\ldots,\lambda^{\tau'};\mu_1,\ldots,\mu_{\tau'}) = \prod_{1 \leqq i < j \leqq \tau'} (\lambda^j-\lambda^i)^{\mu_i\mu_j} ,$$

$D$ est donc différent de zéro au voisinage de $a$.

Le système $\mathcal{A}^j$ possède donc une solution et une seule si les $d^j_\alpha$ (et par conséquent les $b^j_\alpha$) ont une valeur imposée pour $t' \leqq \alpha < t$.

Il reste à résoudre $\mathcal{A}^{-t}$ pour amorcer la récurrence. Les $Y_\ell^j$ pour $j < -t$, sont nuls par hypothèse, et les $b_\alpha^{-t}$ sont nuls, donc la seule solution c'est $Y^{-t}(0,x') = 0$.

Les premières inconnues non nulles s'obtiennent en résolvant le système $\mathcal{A}^o$. Le premier $Y_\ell^j$ non nul est donc $Y_\ell^{-\mu_\ell+1}$, et

$$y = \sum_{\ell=1}^{\tau} \sum_{j=-\mu_\ell+1}^{\infty} Y_\ell^j \times (f_j \circ \varphi^\ell) .$$

Il résulte du lemme 5 et du calcul précédent qu'on a une solution et une seule quelles que soient les données si et seulement si $h$ possède une bonne décomposition par rapport à chaque $H_s$. Ceci termine bien la démonstration du théorème 2.

<u>Remarque</u> 1.- Si on suppose seulement $h$ décomposable par rapport à chaque $H_s$ et si on n'admet pour solution au problème de Cauchy oscillatoire qu'une somme d'ondes asymptotiques pouvant être obtenues par le théorème 1, et associées à des phases $\varphi^\ell$ telles que les $\text{grad}\, \varphi^\ell(a)$ soient des zéros réels, <u>distincts</u>, non nuls de $P(a;q) = 0$, on constate qu'une C.N.S. pour qu'on ait une solution et une seule quelles que soient les données de Cauchy sur $Q$, est que la forme tangente en $a$ à $Q$ soit une direction d'hyperbolicité stricte pour $P(a;q)$ et que $h$ possède une bonne décomposition par rapport à chaque $H_s$.

<u>Remarque</u> 2.- Si $E$ et $h$ sont réels ($C^\infty$ ou analytiques), ou si $E$ et $h$ sont complexes (holomorphes), et si on veut étudier le problème de Cauchy oscillatoire avec des données de phase $\psi$ fixée, il suffit de supposer que l'équation e en $p_o$

$$P(a;p_o \, , \, \text{grad}\, \psi(a)) = 0$$

possède $\tau$ racines distinctes (réelles quand $E$ et $h$ sont réels) ; les conclusions du théorème 2 restent valables. Vouloir réaliser, dans le cas réel, cette condition pour toutes les fonctions $\psi$, revient à supposer l'hyperbolicité stricte de $P(a;q)$ par rapport à la forme tangente en $a$ à $Q$. Dans le cas complexe, cette condition est évidemment impossible à réaliser pour toute fonction $\psi$.

## 4. OPÉRATEUR BIEN DÉCOMPOSABLE.

Le théorème 2 met en évidence la notion de bonne décomposition ; un opérateur peut être décomposé de plusieurs manières. La proposition 3 assure l'invariance de la notion de bonne décomposition.

Supposons que $h$ possède une bonne décomposition par rapport à un facteur $K$ de (1) : on peut écrire

$$h = \ell_o(k)^{\nu_o} + \ell_1(k)^{\nu_1} + \dots + \ell_\ell(k)^{\nu_\ell},$$

avec pour tout $r$, $\nu_r \geqq \nu_o - r$.

En modifiant éventuellement les $\ell_r$, on a

$$h = \ell_o(k)^{\nu_o} + \ell_1(k)^{\nu_o-1} + \dots + \ell_r(k)^{\nu_o-r} + \dots + \ell_{\nu_o}.$$

Soit

$$h = \sum_{r=0}^{t} \tilde{\ell}_r(\tilde{k})^{\tilde{\nu}_r}$$

une seconde décomposition de $h$ : on va montrer que pour tout $r \leqq t$, $\tilde{\nu}_r \geqq \tilde{\nu}_o - r = \nu_o - r$.

On a $\tilde{\nu}_o = \nu_o$ car c'est la multiplicité de $K$ dans la décomposition (1), donc pour $r = 0$, le résultat est vrai. Supposons-le vrai pour $0, \dots, r-1$ et démontrons le pour $r$. (Si $r \geqq \nu_o$, c'est évident.) En modifiant éventuellement les $\tilde{\ell}_j$, l'hypothèse de récurrence permet d'écrire

$$h \underset{t-r}{\sim} \tilde{\ell}_o(\tilde{k})^{\nu_o} + \dots + \tilde{\ell}_{r-1}(\tilde{k})^{\nu_o-r+1} + \tilde{\ell}_r(\tilde{k})^{\tilde{\nu}_r}.$$

On a donc

$$\tilde{\ell}_r(\tilde{k})^{\tilde{\nu}_r} \underset{t-r}{\sim} g_r = \left(\sum_{\rho=0}^{r} \ell_\rho(k)^{\nu_o-\rho}\right) - \left(\sum_{\rho=0}^{r-1} \tilde{\ell}_\rho(\tilde{k})^{\nu_o-\rho}\right),$$

$g_r$ est un opérateur différentiel d'ordre $(t-r)$. On va prouver qu'il existe un opérateur $\gamma_r$ tel que $g_r \underset{t-r}{\sim} \gamma_r(\tilde{k})^{\nu_o-r}$ : on aura bien $\tilde{\nu}_r \geqq \nu_o - r$.

LEMME 7.- <u>Soit</u> $\theta(k)$ <u>l'ordre de</u> $k$ <u>et</u> $n_\beta^\alpha = \alpha\theta(k) - (\alpha-\beta)$. <u>Si</u> $\beta \leqq \alpha$, <u>il existe un opérateur différentiel</u> $\lambda_\beta^\alpha$ <u>tel que</u>

$$k^\alpha \underset{n_\beta^\alpha}{\sim} \lambda_\beta^\alpha \tilde{k}^\beta.$$

<u>Preuve</u> :

$$k^\alpha = (k - \tilde{k} + \tilde{k})^\alpha = \sum_{p=0}^{\alpha} \sum_{i \in I_p} \Pi_i(\tilde{k}, k-\tilde{k}).$$

$I_p$ est un ensemble connu d'indices et $\Pi_i(\tilde{k}, k-\tilde{k})$ un produit, dans un ordre quelconque de $p$ opérateurs $\tilde{k}$ et de $(\alpha-p)$ opérateurs $k-\tilde{k}$

$$\theta(\Pi_i) \leqq p\theta(k) + (\alpha-p)(\theta(k)-1) = \alpha\,\theta(k) - (\alpha-p)$$

[car $k-\tilde{k}$ est d'ordre inférieur ou égal à $\theta(k)-1$ ].

Si $p < \beta$ et $i \in I_p$ , on a

$$\Pi_i(\tilde{k}, k-\tilde{k}) \underset{n^\alpha_\beta}{\sim} 0 \ .$$

Si $p \geqq \beta$ et $i \in I_p$ , il existe un opérateur différentiel $m_i$ tel que

$$\Pi_i(\tilde{k}, k-\tilde{k}) \underset{n^\alpha_\beta}{\sim} m_i \times (\tilde{k})^\beta \ .$$

On a, en effet,

$$\Pi_i = \mu \times (\tilde{k})^{\beta'} \quad \text{avec} \quad 0 \leqq \beta' \leqq p \ .$$

Si $\beta' \geqq \beta$ , c'est terminé, sinon, on écrit $\mu = a\,\tilde{k}\,b$ avec $b$ ne contenant plus de facteur $\tilde{k}$ . On note $[\tilde{k},b] = \tilde{k}b - b\tilde{k}$ (crochet des deux opérateurs), et on a

$$\Pi_i = ab(\tilde{k})^{\beta'+1} + a[\tilde{k},b] \times (\tilde{k})^{\beta'} \ .$$

Si $\beta'+1 < \beta$ , on recommence la même opération avec $ab(\tilde{k})^{\beta'+1}$. On écrit finalement

$$\Pi_i = \mu^*(\tilde{k})^\beta + \sum_{j\in J} \mu^{**}_j(\tilde{k})^{\beta_j} \qquad (\beta' \leqq \beta_j < \beta) \ ,$$

$\mu^{**}_j(\tilde{k})^{\beta_j}$ est un opérateur différentiel d'ordre $\alpha\theta(k) - (\alpha-p) - 1$ contenant $(p-1)$ facteurs $\tilde{k}$ , dont $\beta_j \geqq \beta'$ en facteur à droite. Si $p \geqq (\beta+1)$ , on recommence la même transformation avec chaque $\mu^{**}_j(\tilde{k})^{\beta_j}$ . Après un nombre fini de telles opérations on obtient bien le résultat annoncé pour $\Pi_i$ , d'où le lemme 7.

Si $0 \leqq \rho \leqq r$ , on a

$$k^{\nu_o-\rho} \underset{n_{\nu_o-r}^{\nu_o-\rho}}{\sim} \lambda^{\nu_o-\rho}_{\nu_o-r}\,(\tilde{k})^{\nu_o-r}$$

et par conséquent

$$\ell_\rho\, k^{\nu_o-\rho} \underset{t-r}{\sim} \ell_\rho\, \lambda^{\nu_o-\rho}_{\nu_o-r}(\tilde{k})^{\nu_o-r}$$

et

$$g_r \underset{t-r}{\sim} \left( \sum_{\rho=0}^{r} \ell_\rho \lambda^{\nu_o-\rho}_{\nu_o-r} - \sum_{\rho=0}^{r-1} \tilde{\ell}_\rho (\tilde{k})^{r-\rho} \right) (\tilde{k})^{\nu_o-r} \ .$$

Ceci termine la démonstration de la proposition 3.

On démontre maintenant le théorème 3 qui caractérise les opérateurs possédant une bonne décomposition par rapport à chaque $H_s$ . (On dit qu'un tel opérateur est bien décomposable.)

Si $h$ est bien décomposable, on montre qu'il existe des opérateurs différentiels $h_s$ $(1 \leqq s \leqq \sigma)$ et $\ell_r$ $(0 \leqq r \leqq t)$ , tels que, pour $0 \leqq r \leqq t$

$$h \underset{t-r}{\sim} \sum_{\rho=0}^{r} \ell_\rho h_1^{[\alpha_1-\rho]+} \times\dots\times h_\sigma^{[\alpha_\sigma-\rho]+}$$

(en particulier, si on fait $r = t$ , on voit que $h = \sum_{r=0}^{t} \ell_r h_1^{[\alpha_1-r]+} \times\dots\times h_\sigma[\alpha_\sigma-r]$

On montre ce résultat par récurrence sur $r$ .

Pour $r = 0$, on prend $\ell_0 = 1$ et $h_s$ un opérateur différentiel de symbole principal $H_s$ ; on a

$$h \underset{t}{\sim} h_1^{\alpha_1} \times\dots\times h_s^{\alpha_s} .$$

Si on suppose le résultat vrai pour $0,\dots,r-1$ , il existe des opérateurs $\ell_0,\dots,\ell_{r-1}$ tels que

$$h \underset{t-r+1}{\sim} \sum_{\rho=0}^{r-1} \ell_\rho h_1^{[\alpha_1-\rho]+} \times\dots\times h_\sigma^{[\alpha_\sigma-\rho]+} .$$

Soit

$$\lambda_r = h - \sum_{\rho=0}^{r-1} \ell_\rho h_1^{[\alpha_1-\rho]+} \times\dots\times h_\sigma^{[\alpha_\sigma-\rho]+} ;$$

c'est un opérateur différentiel d'ordre $t-r$. On va montrer que son symbole principal est divisible par

$$H_1^{[\alpha_1-r]+} \times\dots\times H_\sigma^{[\alpha_\sigma-r]+}$$

pour $x$ donné les $H_s(x;q)$ étant premiers entre eux, il suffira que $A_r$ soit divisible par

$$H_s^{[\alpha_s-r]+} \quad \text{pour tout } s .$$

Si $r \geqq \alpha_s$ , c'est évident, sinon, soit pour $0 \leqq \rho \leqq r-1$

$$h_\rho = \ell_\rho h_1^{[\alpha_1-\rho]+} \times\dots\times h_\sigma^{[\alpha_\sigma-\rho]+} .$$

On pose

$$b = h_{s+1}^{[\alpha_{s+1}-\rho]+} \times\dots\times h_\sigma^{[\alpha_\sigma-\rho]+} \quad (b = 1 \text{ si } s = \sigma) .$$

On a

$$h_s^{(\alpha_s-\rho)} \times b = \sum_{p=0}^{\alpha_s-\rho} C^p_{\alpha_s-\rho}\, b_p(h_s)^{(\alpha_s-\rho-p)} ,$$

avec $b_o = b,\dots,b_p = [h_s, b_{p-1}]$, ...

On a donc

$$h_\rho = \sum_{p=0}^{\alpha_s-\rho} C^p_{\alpha_s-\rho}\, h_1^{[\alpha_1-\rho]+} \times\dots\times h_{s-1}^{[\alpha_{s-1}-\rho]+} \times b_p \times h_s^{[\alpha_s-\rho-p)}$$

$h_1^{[\alpha_1-\rho]+} \times\dots\times h_{s-1}^{[\alpha_{s-1}-\rho]+} \times b_p \times h_s^{(\alpha_s-\rho-p)}$ est d'ordre $t-\rho-p$ et par conséquent :

$$h_\rho \underset{t-r}{\sim} \sum_{p=0}^{r-\rho} C^p_{\alpha_s-\rho}\, h_1^{[\alpha_1-\rho]+} \times\dots\times h_{s-1}^{[\alpha_{s-1}-\rho]+} \times b_p \times h_s^{(\alpha_s-\rho-p)} .$$

On a donc un opérateur différentiel $\mu$ tel que

$$\sum_{\rho=0}^{r-1} \ell_\rho\, h_1^{[\alpha_1-\rho]+} \times\dots\times h_\sigma^{[\alpha_\sigma-\rho]+} \underset{t-r}{\sim} \mu \times h_s^{(\alpha_s-r)} .$$

Par hypothèse $h$ possède une bonne décomposition par rapport à $H_s$ ; il existe donc un opérateur $\tilde{\mu}$ tel que

$$h \underset{t-r}{\sim} \tilde{\mu}\, h_s^{(\alpha_s-r)} ,$$

et par conséquent

$$\lambda_r \underset{t-r}{\sim} (\tilde{\mu}-\mu) h_s^{(\alpha_s-r)} .$$

$\Lambda_r$ est donc divisible par $H_s^{\alpha_s-r}$ ; ce résultat étant vrai pour tout $s$, on a

$$\Lambda_r = L_r H_1^{[\alpha_1-r]+} \times\dots\times H_\sigma^{[\alpha_\sigma-r]+} .$$

Si $\ell_r$ est un opérateur différentiel de symbole principal $L_r$ (7), on a

---

(7) $L_r(x;q)$ est manifestement $C^\infty$ en $x$, puisque $\prod_{s=1}^{\sigma} H_s(x;q)$ n'est le polynôme nul pour aucun $x$ d'un voisinage de $a$.

$$h \underset{t-r}{\sim} \sum_{\rho=0}^{r} \ell_\rho h_1^{[\alpha_1-\rho]+} \times\dots\times h_\sigma^{[\alpha_\sigma-\rho]+} .$$

Réciproquement des calculs analogues à ceux qui viennent d'être faits montrent que si

$$h = \sum_{r=0}^{t} \ell_r h_1^{[\alpha_1-r]+} \times\dots\times h_\sigma^{[\alpha_\sigma-r]+} ,$$

avec pour tout $r \leqq t$ ,

$$h \underset{t-r}{\sim} \sum_{\rho=0}^{r} \ell_\rho h_1^{[\alpha_1-\rho]+} \times\dots\times h_\sigma^{[\alpha_\sigma-\rho]+} ,$$

alors $h$ possède une bonne décomposition par rapport à chaque $H_s$ , ce qui termine la démonstration du théorème 3.

<u>Remarque</u> 1.- En coefficients constants, le théorème 3 est banal à cause de la commutativité de la composition des opérateurs.

<u>Remarque</u> 2.- Il résulte de la proposition 3 qu'on peut choisir les $\ell_r$ et les $h_s$ arbitrairement (à condition qu'ils aient un symbole principal imposé).

<u>Remarque</u> 3.- En deux variables, un opérateur bien décomposable vérifie les conditions dites de Levi-Lax ([14], [11]). Ceci sera précisé davantage à la fin du paragraphe 5.

## 5. LIEN AVEC L'HYPERBOLICITÉ DANS LE CAS DES COEFFICIENTS CONSTANTS.

Si $h$ est un opérateur différentiel à coefficients constants sur $E = \mathbb{R}^{n+1}$, on démontre en utilisant des résultats de [3] que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(A) $h$ est bien décomposable et $P(q) = \prod_{s=1}^{\sigma} H_s(q)$ est strictement hyperbolique.

(C) $h$ est hyperbolique et la multiplicité de $H$ sur $V(P)^*$ est localement constante.

Si $A$ est un polynôme de $(n+1)$ variables, à coefficients réels, on note $V(A)$ l'ensemble des zéros réels de $A$ , et $r_A$ la fonction multiplicité qui a $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ associe le nombre entier $r_A(\xi)$ , ordre de multiplicité de $\xi$ pour le polynôme $A[r_A(\xi) = 0$ si $\xi \notin V(A)]$ .

On note

$$V(A)^* = V(A) - \{0\} .$$

On dit que la multiplicité de $H$ sur $V(P)^*$ est localement constante si pour tout $\xi^o \in V(P)^*$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $\xi^o$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que $r_H$ soit constante sur $\mathcal{V} \cap V(P)^*$.

On démontre dans [3] que la proposition (C) équivaut à

(B) 1° $H$ est hyperbolique et la multiplicité de $H$ sur $V(P)^*$ est localement constante ;

2° tout point $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ de multiplicité $r_H(\xi)$ sur $H$ est de multiplicité $r_k(\xi) \geqq [r_H(\xi)-k]_+$ sur $H^{(*)(k)}$. (On note $H^{(*)k}$ la partie homogène d'ordre $t-k$ de $h$.)

Il suffira donc de prouver que (A) et (B) sont équivalentes.

On démontre d'abord que (A) entraîne (B).

L'hyperbolicité stricte de $P$ implique évidemment l'hyperbolicité de $H$. D'autre part, si $\xi^o \in V(P)^*$, il est zéro simple d'un seul polynôme $H_s$ et il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $\xi^o$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que $r_H(\xi) = r_H(\xi^o) = \alpha_s$ pour tout $\xi \in \mathcal{V} \cap V(P)^*$. Il reste à prouver B (2°).

Par hypothèse $h$ est bien décomposable ; on utilise alors le théorème 3 en prenant les opérateurs $\ell_r$ et $h_s$ homogènes, ce qui est possible puisqu'on est en coefficients constants.

On a donc

$$H^{(*)(k)} = L_k H_1^{[\alpha_1-k]_+} \times \dots \times H_\sigma^{[\alpha_\sigma-k]_+} .$$

Si $\xi^o \in V(H)^*$, il est zéro simple d'un seul $H_s$ donc $r_H(\xi^o) = \alpha_s$. On a donc

$$r_k(\xi^o) \geqq [\alpha_s-k]_+ = [r_H(\xi^o)-k]_+ .$$

Si $\xi^o = 0$, le résultat est banal car $H^{(*)(k)}$ est homogène de degré $t-k$.

Montrons que (B) $\Rightarrow$ (A).

L'hyperbolicité de $H$ entraîne celle de $P$. Montrons que l'hypothèse de multiplicité localement constante de $H$ sur $V(P)^*$ entraîne l'hyperbolicité stricte de $P$.

On montre ([22], p. 36) que si $(\Pi_i)_{1\leqq i\leqq n}$ est tel que l'équation en $p_o$, $P(p_o,\Pi_i) = 0$, possède une racine double, dans tout voisinage de $(\Pi_i)$ (dans $\mathbb{R}^n$), il existe $(p_i)$ tel que l'équation en $p_o$, $P(p_o,p_i) = 0$, ne possède que des racines simples. L'hyperbolicité de $P$ par rapport à la direction $(1,0,\dots,0)$, et la continuité par rapport à $(p_i)$ des racines $p_o^\ell(p_i)$ de $P(p_o,p_i) = 0$ entraîne que l'ensemble des zéros simples de $P$ est dense dans $V(P)^*$ (muni de la topologie induite par $\mathbb{R}^{n+1}$). Si la multiplicité de $H$ sur $V(P)^*$ est localement constante, tout zéro réel non nul de $P$ a pour multiplicité 1 : en effet, s'il existait $\xi^o \in V(P)^*$ tel que $r_P(\xi^o) \geq 2$, dans tout voisinage de $\xi^o$, on pourrait trouver $\xi$ tel que $r_P(\xi) = 1$ et la multiplicité de $H$ sur $V(P)^*$ ne serait pas localement constante.

On sait [3] que si $P$ est hyperbolique par rapport à la direction $(1,0,\dots,0)$, la multiplicité d'un zéro $\xi^o$ de $P$ est égale à la multiplicité de $\xi^o_o$ en tant que racine que l'équation en $p_o$, $P(p_o,\xi^o_i) = 0$. $P$ est donc strictement hyperbolique par rapport à $(1,0,\dots,0)$.

Montrons pour terminer que $h$ est bien décomposable. Il suffira pour cela que chaque $H^{(*)k}$ soit divisible par $H_s^{[\alpha_s-k]_+}$ pour tout $s$. Si $k \geq \alpha_s$, c'est évident ; supposons $k < \alpha_s$.

On considère $H_s$ et $H^{(*)(k)}$ comme des polynômes en $p_o$, à coefficients dans l'anneau des polynômes à $n$ variables $\mathbb{R}[p_1,\dots,p_n]$. L'hyperbolicité de $H_s$ par rapport à la direction $(1,0,\dots,0)$ entraîne que $H_s$ est de degré $\tau_s$, en $p_o$ et le coefficient de $(p_o)^{\tau_s}$ est un nombre réel non nul $(H_s(1,0,\dots,0))$ donc un élément inversible de $\mathbb{R}[p_1,\dots,p_n]$. On peut donc [23] faire la division euclidienne (dans $\mathbb{R}[p_1,\dots,p_n][p_o]$) de $H^{(*)(k)}$ par $H_s$ :

$$H^{(*)k}(p_o,p_i) = Q(p_o,p_i) \times H_s(p_o,p_i) + R(p_o,p_i) ,$$

avec $Q(p_o,p_i)$ et $R(p_o,p_i)$ appartenant à $\mathbb{R}[p_o,p_i]$ .(8).

B(2°) et $k < \alpha_s$, entraîne que tout zéro réel de $H_s$ est un zéro de $H^{(*)k}$. Si $(p_i) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, l'hyperbolicité stricte de $H_s$ entraîne que l'équation en $p_o$, $H_s(p_o,p_i) = 0$ possède $\tau_s$, racines réelles distinctes $p_o^\ell(p_i)$ $(1 \leq \ell \leq \tau_s)$. On a donc $R[p_o^\ell(p_i),(p_i)] = 0$ pour $1 \leq \ell \leq \tau_s$, et $R(p_o,p_i)$ est de degré strictement inférieur à $\tau_s$ en $p_o$. Ceci implique $R(p_o,p_i) = 0$, le résultat s'étend par continuité pour $(p_i) = 0$, et par conséquent $H_s$ divise $H^{(*)k}$. On a donc

$$H^{(*)k} = M_k^s \times (H_s)^{\alpha_k^s}$$

(avec $M_k^s$ non divisible par $H_s$). Si $\alpha_k^s$ était strictement inférieur à $(\alpha_s-k)$, le raisonnement précédent entraînerait que $M_k^s$ est divisible par $H_s$, ce qui est faux, donc $\alpha_k^s \geq \alpha_s-k$.

Les $H_s$ étant premiers entre eux deux à deux $H^{(*)k}$ est divisible par

---

(8) $i$ est un indice latin qui varie entre 1 et $n$.

$$H_1^{[\alpha_1 - k]_+} \times \dots \times H_\sigma^{[\alpha_\sigma - k]_+} ,$$

et par conséquent l'opérateur $h$ est bien décomposable.

Remarque 1.- Si $E$ est une variété différentiable $C^\infty$ de dimension 2, on montre dans [11], [14] que, si $H(x;q)$ est hyperbolique à multiplicité constante en $x$ au voisinage de $a$, une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de Cauchy soit bien posé par rapport à une hypersurface $Q$ passant par $a$ est que $H(a;q)$ soit hyperbolique par rapport à la forme tangente en $a$ à $Q$, et que $h$ soit bien décomposable au voisinage de $a$. En deux variables $H(a;q)$ hyperbolique équivaut à $P(a;q)$ strictement hyperbolique [l'hypothèse de multiplicité localement constante en $a$ de $H$ sur $V(P)^*$ est nécessairement vérifiée]. On a l'équivalence entre les trois propositions suivantes :

1° $H(a;q)$ hyperbolique par rapport à la forme tangente en $a$ à $Q$ et $h$ bien décomposable.

2° Le problème de Cauchy avec données sur $Q$ est bien posé dans $C^\infty$.

3° Le problème de Cauchy oscillatoire avec données sur $Q$ possède une solution et une seule quelles que soient les données.

Il résulte du théorème 4 que si les coefficients sont constants $(E = \mathbb{R}^2)$, ces trois propositions sont encore équivalentes à

4° $h$ est hyperbolique par rapport à la forme tangente en $a$ à $Q$.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] BERGER, Formes harmoniques (Séminaire Lichnerowicz-Avez-Berger, Collège de France).

[2] BOURBAKI, Livre II, chap. IV. Polynômes.

[3] CHAILLOU, Sur les ensembles bornés $\mathcal{A}$ de distributions polynômes inversibles dans $\mathcal{D}'(\Gamma)$ et d'inverse $\mathcal{A}^{-1}$ borné, et sur les hypersurfaces $\circ\Gamma$-hyperboliques (Thèse) (à paraître).

[4] Y. CHOQUET-BRUHAT, Ondes asymptotiques et approchées pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires (J. Math. pures et appl. t. 48, 1969, p. 117-158).

[5] Y. CHOQUET-BRUHAT, Géométrie différentielle et systèmes extérieurs, Dunod, Paris, 1968.

[6] COURANT-HILBERT, Methods of Mathematical Physics, II, Interscience Publishers, New York, 1965.

[7] DE PARIS, Ondes asymptotiques et problème de Cauchy caractéristique local pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples (C.R. Acad. Sc., t. 270, série A, 1970, p. 1509-1511).

[8] GÅRDING, KOTAKÉ et LERAY, Uniformisation et développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy linéaire à données holomorphes ; analogie avec la théorie des ondes asymptotiques et approchées (Bull. Soc. math. Fr., t. 92, 1964, p. 263-361).

[9] HÖRMANDER, Pseudo-Differential Operators (Comm. pure appl. Math., vol. 18, 1965, p. 501-517).

[10] HÖRMANDER, Linear partial differential operators, Springer Verlag, Berlin, 1964.

[11] A. LAX, On Cauchy's problem for partial differential equation with multiple characteristics (Comm. pure appl. Math., vol. 9, 1956, p. 135-169).

[12] P.D. LAN, Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems (Duke Math. J., vol. 24, 1957, p. 627-646).

[13] LERAY, Particules et Singularités des ondes (Cahiers de Physique, n° 133, 1961).

[14] LEVI, Caratterische multiple e problema di Cauchy (Ann. mathematica, série III-FA, t. 16, 1909, p. 161-201).

[15] LUDWIG, Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem (Comm. pure appl. Math., vol. 13, 1960, p. 473-508).

[16] LUDWIG, Singularities of the Riemann function (N° 40, Report n° 9351, Courant Institute of Math. Sc. A.E.C. Computing and Applied Math. Center, 1961).

[17] MIZOHATA, Solutions nulles et solutions non analytiques (J. Math. Kyoto. Univ. t. 1-2, 1962, p. 271-302).

[18] MIZOHATA et OHYA, Sur la condition de E.E. Levi concernant les équations hyperboliques (R.I.M.S. Kyoto Univ., série A, vol. 4, n° 2, 1968).

[19] PETROWSKY, Sur l'analyticité des solutions des systèmes d'équations différentielles (Rec. Math., vol. 2, 1939, p. 3-70).

[20] STRANG, On multiple characteristics and the Levi-Lax conditions for hyperbolicity (Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 33, 1969, p. 358-373).

[21] VAILLANT, Données de Cauchy portées par une caractéristique double, dans le cas d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles. Rôle des bicaractéristiques (J. Math. pures et appl., t. 47, 1968, p. 1-40).

[22] VAILLANT, Remarques sur les systèmes fortement hyperboliques (J. Math. pures et appl. 50, 1971, p. 25-51.

[22] VAN DER WAERDEN, Modern algebra, Frederick Ungar Publications, New York, 1948.

Partie B.

1. INTRODUCTION.- Soit $E$ une variété analytique réelle ou complexe de dimension $(n+1)$ , $h$ un opérateur différentiel sur $E$ d'ordre $t$ à coefficients analytiques, et a un point de $E$ où $h$ est d'ordre $t$.

Soient $\Phi$ et $\psi$ deux fonctions analytiques au voisinage de $a$ , nulles en $a$ et telles que $\operatorname{grad}\Phi(a)$ et $\operatorname{grad}\psi(a)$ soient deux vecteurs linéairement indépendants de $T^*_a$ (On note $T^*_x$ l'espace cotangent en $x$ à $E$). On note $Q$ (resp. $S$) l'hypersurface d'équation locale $\Phi(x) = 0$ (resp. $\psi(x) = 0$) et $T = Q \cap S$. On note $S^\ell$ $(1 \leqq \ell \leqq \tau)$ les hypersurfaces caractéristiques issues de $T$ .

On étudie un problème de Cauchy, non caractéristique, au voisinage de $a$ . Le second membre est "régulier" sauf sur $\bigcup_{\ell=1}^{\tau} S^\ell$ où il possède des singularités de type donné (qui dépendent de la forme d'onde [9] choisie) ; les données de Cauchy sont "régulières" sur $Q-T$ et présentent sur $T$ des singularités analogues à celles du second membre : on montre alors, si $h$ est bien décomposable ([3], [4]), qu'il existe une solution et une seule, "régulière" sauf sur $\bigcup_{\ell=1}^{\tau} S_\ell$ où elle présente des singularités du même type que celles des données.

On vérifie bien, dans ce cas particulier, le principe général énoncé par J. Leray dans [7] : ≪ Les singularités de la solution appartiennent aux caractéristiques issues des singularités des données ≫.

Cette étude se fait classiquement en deux temps ([9], [5], [6], [15]) : d'abord la construction d'une solution formelle utilisant la technique des développements asymptotiques ([17], [9], [8], [1], [10]), puis la démonstration de la convergence des développements obtenus.

On a montré dans [3] et [4] l'existence d'une solution formelle au problème posé; il reste donc à prouver la convergence.

Dans [9], D. Ludwig étudie un même problème pour un système de type (H), qu'on sait maintenant [10] être fortement hyperbolique (ce qui, dans le cas d'un opérateur scalaire, implique que toutes les caractéristiques soient simples), et montre la convergence (quand le système est du premier ordre) en se ramenant à un problème de Cauchy caractéristique, et en utilisant la méthode des majorantes. Dans [5], Y. Hamada étudie un problème analogue pour un opérateur scalaire à caractéristiques simples, et dans [6] il prolonge ses résultats au cas où les caractéristiques sont au plus doubles, pour un opérateur bien décomposable [3]. Sa démonstration de l'existence d'une solution formelle, pour des caractéristiques au plus doubles, est un cas particulier de [2], [3], [4] où on envisage le cas des caractéristiques de multiplicités quelconques (mais constantes). Il montre la convergence en utilisant des techniques de calcul dues à S. Mizohata. Dans [14] et [15] C. Wagschal étudie un problème du même type, avec des singularités de forme plus générale, pour un système dont toutes les caractéristiques sont simples ; il montre la convergence en utilisant la méthode classique des majorantes, améliorée par ≪ l'introduction de nouvelles fonctions majorantes particulièrement commodes pour ce type de problème ≫ [15].

Notre étude se fait dans le cas d'un opérateur scalaire, à caractéristiques de multiplicités quelconques, mais bien décomposable. (On suppose toujours les multiplicités constantes). On montre la convergence des développements obtenus dans la partie A en adaptant les calculs de [14], [15] au cas des caractéristiques multiples. On généralise ainsi un théorème de [9], et on étend aux caractéristiques de multiplicités quelconques les résultats de [5], [6] et [15].

Les résultats démontrés ici ont été annoncés dans [13].

Les notations utilisées sont celles de [3] et [4].

Je remercie vivement J. Vaillant de ses encouragements qui m'ont été très précieux.

## 2. RAPPELS ET COMPLÉMENTS SUR L'EXISTENCE DE LA SOLUTION FORMELLE.

Soit $H(x;q)$ le symbole principal de $h$ ; pour $x$ donné dans $E$ , c'est une application polynomiale homogène de degré $t$ , ou nulle. $h$ étant d'ordre $t$ en $a$ , $H(x;q)$ est de degré $t$ au voisinage de $a$ , et ses coefficients sont des séries entières convergentes au voisinage de $a$ . L'anneau des séries entières convergentes est un anneau factoriel, et un anneau de polynômes sur un anneau factoriel étant factoriel, il existe un voisinage $V$ de $a$ , et des applications irréductibles $H_s(x;q)$ (1) $(1 \leq s \leq \sigma)$, polynomiales en $q$ , homogènes de degré $\tau_s$ , pour $x$ donné dans $V$ , à coefficients analytiques en $x$ sur $V$ , et des entiers $\alpha_s > 0$ tels que pour tout $x \in V$ et tout $q \in T^*_x$ , on ait

$$H(x;q) = \prod_{s=1}^{\sigma} [\bar{H}_s(x;q)]^{\alpha_s} . \tag{1}$$

On sait [11] que les $H_s$ sont des invariants.

(1) Irréductibles dans l'anneau des polynômes à $n+1$ variables sur l'anneau des séries entières convergentes, ce qui n'implique évidemment pas que pour $x$ donné, $H_A(x;q)$ soit un polynôme irréductible.

On suppose que l'équation en $\lambda$

$$(2) \qquad \prod_{s=1}^{\sigma} H_s(a;\lambda \operatorname{grad} \Phi(a) + \operatorname{grad} \psi(a)) = 0$$

possède $\tau = \sum_{s=1}^{\sigma} \tau_s$ racines distinctes. (On impose à ces racines d'être réelles quand $E$ est réelle.) Dans le cas réel et quand toutes les multiplicités valent un, on dit dans [16], si la condition précédente est réalisée, que $h$ est "régulièrement hyperbolique par rapport à $Q$ et $S$ ".

$h$ possède une décomposition [4] par rapport à chaque $H_s$ .

On suppose en fait que $h$ est bien décomposable, donc (2) il existe des opérateurs différentiels $h_s$ $(1 \leqq s \leqq \sigma)$ de symbole principal $H_s(x;q)$ , et des opérateurs $\ell_r$ $(1 \leqq r \leqq t)$ (avec $\ell_0 = 1$) définis sur une sous-variété ouverte $\Omega$ de $E$ , contenant $a$ , tels que

$$(3) \qquad h = \sum_{r=0}^{t} \ell_r \times h_1^{[\alpha_1 - r]_+} \times \dots \times h_\sigma^{[\alpha_\sigma - r]_+}$$

($[\alpha]_+ = \alpha$ si $\alpha \geqq 0$ et $= 0$ si $\alpha \leqq 0$) avec, pour tout $r$ :

$$h - \sum_{\rho=0}^{r} \ell_\rho \times h_1^{[\alpha_1 - \rho]_+} \times \dots \times h_\sigma^{[\alpha_\sigma - \rho]_+}$$

d'ordre $t-r-1$ au plus.

L'hypothèse (2) permet de construire, comme dans [10], $\tau$ fonctions caractéristiques $\varphi^\ell$ telles que $\varphi^\ell(x) = \psi(x)$ si $x \in Q$ . Si on note $\lambda^\ell$ $(1 \leqq \ell \leqq \tau)$ les racines de l'équation (2), $\varphi^\ell$ est caractérisée par

$$\operatorname{grad} \varphi^\ell(a) = \lambda^\ell \operatorname{grad} \Phi(a) + \operatorname{grad} \psi(a) \; .$$

On a ainsi toutes les solutions de l'équation caractéristique qui coïncident avec $\psi$ sur $\Omega$ , et on peut remarquer que la condition précédente implique que $Q$ n'est pas caractéristique en $a$ . Les hypersurfaces $S^\ell$, d'équation locale $\varphi^\ell(x) = 0$, sont les caractéristiques issues de $T$.

PROPOSITION I.- Soit $E$ une variété analytique réelle (respectivement complexe) de dimension $(n+1)$, $h$ un opérateur différentiel réel (respectivement complexe) d'ordre $t$ , à coefficients analytiques, et $a$ un point de $E$ où $h$ est d'ordre $t$.

(2) La condition (2) implique que les $H_s(x;q)$ sont premiers entre eux deux à deux en tout point $x$ d'un voisinage donné de $a$ . On applique alors un théorème de [4].

Soient $\Phi$ et $\psi$ deux fonctions analytiques, nulles en $a$ , et telles que grad $\Phi(a)$ et grad $\psi(a)$ soient linéairement indépendants dans $T^*_a$ .

Soit $f_j$ une suite telle que pour tout $j \in Z$ , $f'_j = f_{j-1}$ .

Si on suppose que $h$ est bien décomposable, et que l'équation en $\lambda$

$$\prod_{s=1}^{\sigma} H_s(a; \lambda \text{ grad } \Phi(a) + \text{grad } \psi(a)) = 0$$

possède $\tau$ racines réelles (respectivement complexes) distinctes, alors il existe une solution formelle unique

$$y = \sum_{\ell=1}^{\tau} \sum_{j=1-\mu_\ell}^{\infty} Y^j_\ell \times (f_j \circ \varphi^\ell)$$

de $h(y) = v = \sum_{\ell=1}^{\tau} v_\ell$ avec $v_\ell = \sum_{j=1}^{\infty} v^j_\ell \times (f_{j-t} \circ \varphi^\ell)$

telle que, de plus (si les coordonnées locales sont telles que $\Phi(x) = x^o$ , et que $a = (0,\dots,0)$ ), on ait, pour $0 \leq \alpha < t$

$$\partial_{(o)\alpha}\, y(o,x') = \sum_{j=0}^{\infty} b^j_\alpha(x') \times (f_{j-\alpha} \circ \psi)(x') \; .$$

On note $x' = (x^1,\dots,x^n)$ , $\psi$ la restriction de $\psi$ à $Q$ ; $\mu_\ell$ est égal à l'un des nombres $\alpha_s$ (avec $s$ tel que $H_s(a\,;\,\text{grad } \varphi^\ell(a)) = 0$ ).

Les $v^j_\ell$ sont analytiques sur un même voisinage de $a$ , et les $b^j_\alpha$ sur un même voisinage de $a$ dans $Q$ .

On cherche d'abord une solution de $h(y_\ell) = v_\ell$ . Avec le choix qu'on a fait pour $v_\ell$ , ceci conduit à des calculs identiques à ceux de [3] et [4]. On cherche $y_\ell$ sous la forme

$$y_\ell = \sum_{j=1-\mu_\ell}^{\infty} Y^j_\ell \times (f_j \circ \varphi^\ell) \; .$$

On a

$$h(y_\ell) = \sum_{j=1-\mu_\ell}^{\infty} h(Y^j_\ell \times (f_j \circ \varphi^\ell)) = \sum_{y=1-\mu_\ell}^{\infty} \sum_{r=0}^{t} \mathcal{H}^r(\varphi^\ell)[Y^j_\ell] \times (f_{j-t+r} \circ \varphi^\ell)$$

$\varphi^\ell$ est telle que

$$\mathcal{H}^o(\varphi^\ell) = \mathcal{H}^1(\varphi^\ell) = \dots = \mathcal{H}^{\mu_\ell - 1}(\varphi^\ell) = 0 \; .$$

$\mathcal{H}^{\mu_\ell}(\varphi^\ell)$ est un opérateur différentiel d'ordre $\mu_\ell$ pour lequel $Q$ n'est pas caractéristique en $a$ (on a montré ces résultats dans [4]).

Par conséquent

$$h(y_\ell) = \sum_{j=1-\mu_\ell}^{\infty} \sum_{r=\mu_\ell}^{t} \mathcal{H}^r(\varphi^\ell)[Y_\ell^j] \times (f_{j-t+r} \circ \varphi^\ell) .$$

Si on pose $k = j+r$ , on trouve

$$h(y_\ell) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{j+r=k \\ j\geqq 1-\mu_\ell \\ \mu_\ell \leqq r \leqq t}} \mathcal{H}^r(\varphi^\ell)[Y_\ell^j] \right\} \times (f_{k-t} \circ \varphi^\ell) .$$

Ceci justifie <u>a posteriori</u> le choix fait pour $v_\ell$ afin que l'identification soit possible.

On doit donc avoir, pour $k \geqq 1$

$$(4)_k \qquad \sum_{\substack{j+r=k \\ j\geqq 1-\mu_\ell \\ \mu_\ell \leqq r \leqq t}} \mathcal{H}^r(\varphi^\ell)[Y_\ell^j] = v_\ell^k \qquad .$$

On sait ([2 ]) que la détermination des $Y_\ell^j$ se ramène à l'intégration d'équations différentielles linéaires d'ordre $\mu_\ell$ le long des bicaractéristiques des hypersurfaces caractéristiques d'équation $\varphi^\ell(x) = \text{cte}$. On sait aussi ([2], [3]) que pour déterminer entièrement $Y_\ell^j$ il faut que les $\partial_{(o)u} Y_\ell^j(o,x')$ soient connues pour $0 \leqq u < \mu_\ell$ . La détermination de ces fonctions à partir des $b_\alpha^j$ se fait de manière unique ([3], [4]) en utilisant les relations suivantes

$$(5)_j \quad \sum_{\ell=1}^{T} \sum_{k=0}^{\mu_\ell -1} C_\alpha^k (\Lambda^\ell)^{\alpha-k} \overline{\partial_{(o)k} Y_\ell^{j-k}} = d_\alpha^j \text{ , pour } 0 \leqq \alpha < t$$

avec

$$d_\alpha^j = b_\alpha^j - \sum_{\ell=1}^{T} \left\{ \sum_{k=\mu_\ell}^{\alpha} C_\alpha^k (\Lambda^\ell)^{\alpha-k} \overline{\partial_{(o)k} Y_\ell^{j-k}} + \sum_{0\leqq u<k\leqq\alpha} \Gamma_{\alpha,k}^{u,\ell} \overline{\partial_{(o)u} Y_\ell^{j-k}} \right\}$$

en posant $\Lambda^\ell(x') = \partial_o \varphi^\ell(o,x')$ , et en notant $\bar{f}$ la restriction à $Q$ d'une fonction $f$ définie au voisinage de $a$ . On convient que $C_\alpha^k = 0$ si $k > \alpha$ et que

$$\sum_{k=p}^{n} v_k = 0 \quad \text{si} \quad p > n .$$

$(5)_j$ est un système de $t$ équations linéaires à $t$ inconnues, de déterminant non nul au voisinage de $a$ ([4]). On notera $(A^{\alpha}_{\beta})_{\substack{0\le\alpha<t\\ 0\le\beta<t}}$ la matrice inverse ; ses coefficients sont analytiques au voisinage de $a$ et ne dépendent que de l'opérateur et des $\varphi^{\ell}$. De même les coefficients $\Gamma^{u,\ell}_{\alpha,k}$ sont analytiques sur un voisinage de $a$ dans $\Omega$, et ne dépendent que de $h$ et des fonctions $\varphi^{\ell}$.

On met maintenant les équations $(4)_j$ et $(5)_j$ sous une forme qui sera plus commode pour la rédaction du paragraphe suivant où on étudie la convergence des développements obtenus.

En convenant que $Y^j_{\ell} = 0$ si $j < 1-\mu_{\ell}$ et $v^o_{\ell} = 0$, l'équation $(4)_j$ devient pour $j \geqq 0$

$$\sum_{r=\mu_{\ell}}^{t} \mathcal{H}^{r}(\varphi^{\ell})[Y^{j-r}_{\ell}] = v^j_{\ell}$$

$\mathcal{H}^{\mu_{\ell}}(\varphi^{\ell})$ est un opérateur différentiel d'ordre $\mu_{\ell}$ et les hypersurfaces $x^o = c$ ne sont pas caractéristiques pour cet opérateur (pour $c$ assez petit). En divisant chaque opérateur $\mathcal{H}^{r}(\varphi^{\ell})$ par le coefficient de $\partial_{(o)\mu_{\ell}}$ dans $\mathcal{H}^{\mu_{\ell}}(\varphi^{\ell})$ (on note encore $\mathcal{H}^{r}(\varphi^{\ell})$ l'opérateur obtenu), et en posant $\mathcal{H}^{\mu_{\ell}}(\varphi^{\ell}) = \partial_{(o)\mu_{\ell}} - c_{\ell}$, avec $c_{\ell}$ opérateur différentiel d'ordre au plus $\mu_{\ell}$ contenant au plus $(\mu_{\ell} - 1)$ dérivations par rapport à $x^o$, on peut écrire, pour $j \geqq 0$

$$(6)_j \left\{ \begin{aligned} &\partial_{(o)\mu_{\ell}} Y^{j-\mu_{\ell}}_{\ell} = c_{\ell}(Y^{j-\mu_{\ell}}_{\ell}) + w^j_{\ell} \\ &\text{avec } w^j_{\ell} = v^j_{\ell} - \sum_{r=\mu_{\ell}+1}^{t} \mathcal{H}^{r}(\varphi^{\ell})[Y^{j-r}_{\ell}] . \end{aligned} \right.$$

En résolvant le système $(5)_j$ on trouve, pour $j \geqq 0$, $1 \leqq \ell \leqq \tau$, $0 \leqq u < \mu_{\ell}$

$$\overline{\partial_{(o)u} Y^{j-u}_{\ell}} = \sum_{\alpha=0}^{t-1} A^{\alpha}_{\beta}\, d^j_{\alpha} \qquad (\beta \text{ dépendant de } \ell \text{ et de } u).$$

(Rappelons que $\overline{\partial_{(o)u} Y^{j-u}_{\ell}} = 0$ pour $j < 0$).

En remplaçant $d^j_{\alpha}$ par sa valeur, cette relation s'écrit :

$$\overline{\partial_{(o)u}Y^{j-u}_{\ell}} = \sum_{\alpha=0}^{t-1} A^{\alpha}_{\beta} b^j_{\alpha} - \sum_{m=1}^{\tau}\left\{\sum_{\alpha=\mu_m}^{t-1} \sum_{k=\mu_m}^{\alpha} A^{\alpha}_{\beta}\, C^k_{\alpha}(\Lambda^m)^{\alpha-k}\, \overline{\partial_{(o)k}Y^{j-k}_m}\right\}$$
$$- \sum_{m=1}^{\tau}\left\{\sum_{\alpha=0}^{t-1} \sum_{0\le v<k\le\alpha} A^{\alpha}_{\beta}\Gamma^{v,m}_{\alpha,k}\, \overline{\partial_{(o)v}Y^{j-k}_m}\right\} .$$

On pose

$$g_\beta^j = \sum_{\alpha=0}^{t-1} \Lambda_\beta^\alpha \, b_\alpha^j$$

$$\gamma_{\beta,m}^k = - \sum_{\alpha=k}^{t-1} \; A_\beta^\alpha \; C_\alpha^k (\Lambda^m)^{\alpha-k}$$

$$\mathcal{M}_{\beta,k}^{\,m} = - \sum_{v=0}^{k} \left( \sum_{\alpha=k}^{t-2} \Gamma_{\alpha+1,k+1}^{v,m} \right) \partial_{(o)v}$$

$\mathcal{M}_{\beta,k}^{\,m}$ est un opérateur différentiel d'ordre $k$ , à coefficients indépendants de $x^o$, et dans lequel il n'y a de dérivations que par rapport à $x^o$.

Avec ces nouvelles notations $(5)_j$ s'écrit, pour $j \geqq 0$

$$(7)_j \left\{ \begin{array}{l} \text{pour} \quad 1 \leqq \ell \leqq \tau \quad \text{et} \quad 0 \leqq u < \mu_\ell \\ \overline{\partial_{(o)u} \, Y_\ell^{j-u}} = g_\beta^j + \sum_{m=1}^{\tau} \sum_{k=\mu_m}^{t-1} \gamma_{\beta,m}^k \; \overline{\partial_{(o)k} \, Y_m^{j-k}} + \sum_{k=0}^{t-2} \overline{\mathcal{M}_{\beta,k}^{\,m} (Y_m^{j-}} \end{array} \right.$$

## 3. CONVERGENCE DE LA SOLUTION FORMELLE.

Les coordonnées locales étant toujours telles que $\Phi(x) = x^o$ et que $a$ soit l'origine de $\mathbb{K}^{n+1}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on démontre le théorème suivant

THÉORÈME I.- <u>Si on suppose</u> $B_\alpha(x',\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} b_\alpha^j(x') \times \frac{\zeta^j}{j!}$ $(0 \leqq \alpha < t)$ <u>analytique au voisinage de l'origine de</u> $\mathbb{K}^{n+1}$, et $V_\ell(x,\zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} v_\ell^j(x) \frac{\zeta^j}{j!}$ $(1 \leqq \ell \leqq \tau)$ <u>analytique au voisinage de l'origine dans</u> $\mathbb{K}^{n+2}$, <u>alors les fonctions</u>

$$Y_\ell(x,\zeta) = \sum_{j=1-\mu_\ell}^{\infty} Y_\ell^j(x) \times \frac{\zeta^{j+\mu_\ell-1}}{(j+\mu_\ell-1)!} \qquad (1 \leqq \ell \leqq \tau)$$

<u>sont analytiques au voisinage de l'origine dans</u> $\mathbb{K}^{n+2}$.

a) <u>Rappel sur les majorantes</u>.

On utilise la notation classique $a \ll b$ pour écrire que la série formelle $b$ est une majorante de la série formelle $a$ . Cette relation est antisymétrique et transitive. Elle vérifie

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \ll b_1 \\ a_2 \ll b_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 + a_2 \ll b_1 + b_2 \\ a_1 \times a_2 \ll b_1 \times b_2 \end{array}\right.$$

Elle est stable par dérivation.

De plus, si $a \ll \mathcal{A}$ (2 séries formelles à $n$ variables)

et pour $k = 1,\dots,n$ ,

$$\begin{cases} b_k \ll \mathcal{B}_k \\ \mathcal{B}_{k(o)} = 0 \end{cases} \qquad \text{(séries formelles à } p \text{ variables)}$$

on a

$$a(b_1,\dots,b_n) \ll \mathcal{A}(\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_n) .$$

En particulier la relation $a \ll b$ est compatible avec l'addition et la multiplication par les séries positives (majorant $0$), et pour la composition, si $a \gg 0$ , ou si chaque $b_p$ majore $0$ . Enfin $f$ analytique au voisinage de $0$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$ équivaut à l'existence de $M \geqq 0$ et $R > 0$ tels que si

$$x \in \Delta_R = \{x \in \mathbb{K}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} |x^i| < R\} ,$$

alors

$$f(x) \ll \frac{M}{R - \sum_{i=0}^{n} x_i} .$$

b) <u>Fonctions majorantes de</u> [15].

Soit $D_R = \{\zeta \mid \zeta \in \mathbb{K} \text{ et } |\zeta| < R\}$ et $\sigma_o(R,\zeta) = \frac{1}{R-\zeta}$ analytique sur $D_R$ ; on pose

$$\sigma_j(R,\zeta) = \frac{d^j}{d\zeta^j}\,\sigma_o(R,\zeta) = \frac{j!}{(R-\zeta)^{j+1}} .$$

Les fonctions $\sigma_j$ vérifient les propriétés suivantes :

1°) $\sigma_j(R;\zeta) \ll R\,\sigma_{j+1}(R;\zeta)$

On a en effet :

$$1 \ll \frac{R}{R-\zeta} \quad \text{et} \quad \frac{1}{R-\zeta} \gg 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{R-\zeta} \ll \frac{R}{(R-\zeta)^2}$$

En dérivant $j$ fois par rapport à $\zeta$ , on trouve le résultat annoncé.

2°) si $r < R$, on a pour $\zeta \in D_r$ ; $\frac{1}{R-\zeta}\,\sigma_j(r;\zeta) \ll \frac{1}{R-r}\,\sigma_j(r;\zeta)$ .

On a

$$\frac{1}{R-r}\,\sigma_j(r;\zeta) - \frac{1}{R-\zeta}\,\sigma_j(r;\zeta) = \frac{1}{(R-r)(R-\zeta)} \times \frac{j!}{(r-\zeta)^j} \gg 0 .$$

et

$$\frac{1}{R-\zeta}\,\sigma_j(r;\zeta) \gg 0 ,$$

d'où le résultat.

3°) si $r \leqq R$, on a pour $\zeta \in D_r$ : $\sigma_j(R;\zeta) \ll \sigma_j(r;\zeta)$

$$\frac{1}{r-\zeta} - \frac{1}{R-\zeta} = \frac{(R-r)}{(r-\zeta)(R-\zeta)} \gg 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{R-\zeta} \gg 0 \Rightarrow \frac{1}{R-\zeta} \ll \frac{1}{r-\zeta} .$$

En dérivant $j$ fois par rapport à $\zeta$, on obtient le résultat cherché.

Notations.-

$$\Delta_R = \{x | \sum_{i=0}^{n} |x^i| < R\}$$

$$\Delta_{\rho,r} = \{x | \rho |x^o| + \sum_{i=1}^{n} |x^i| < R\}$$

$$\Psi_j(R;x) = \sigma_j(R, \sum_{i=0}^{n} x^i) \qquad \text{et} \qquad \Phi_j(\rho,r;x) = \sigma_j(r;\rho x^o + \sum_{i=1}^{n} x^i) .$$

Une conséquence du 1°) et des rappels du a) est que

LEMME I.

$$\begin{cases} \text{pour } x \in \Delta_R , \text{ on a } \Psi_j(R;x) \ll R\Psi_{j+1}(R;x) \\ \text{pour } x \in \Delta_{\rho,r} \text{ on a } \Phi_j(\rho,r;x) \ll r\Phi_{j+1}(\rho,r;x) . \end{cases}$$

De plus on a :

si $r \leqq R$, $\Psi_j(R,x) \ll \Psi_j(r,x)$ (d'après 3°)

et si $\rho \geqq 1$, $\sum_{i=0}^{n} x^i \ll \rho x^o + \sum_{i=1}^{n} x^i$ ,

ce qui implique, d'après les rappels du a) que $\Psi_j(r;x) \ll \Phi_j(\rho,r;x)$ .

On a donc :

LEMME II. Si $r \leqq R$ et $\rho \geqq 1$, pour $x \in \Delta_{\rho,r}$ : $\Psi_j(R,x) \ll \Phi_j(\rho,r;x)$ .

Enfin, on rappelle ([15]) le résultat suivant :

LEMME III. <u>Si</u> $e$ <u>est un opérateur différentiel à coefficients analytiques au voisinage de l'origine</u> (<u>ses coefficients admettent alors une majorante commune</u> $M \times \Psi_o(R;x)$ <u>sur un</u> $\Delta_R$ <u>convenable</u>).

Si <u>pour</u> $x \in \Delta_{\rho,r}$ ($r \leqq KR$ <u>avec</u> $K$ <u>donné</u>, $K < 1$, <u>et</u> $\rho \geqq 1$) <u>on a</u>

$$y(x) \ll \Phi_j(\rho,r;x) .$$

<u>Alors il existe une constante</u> $\gamma$ <u>dépendant seulement de l'opérateur et de</u> $K$, <u>telle que</u>, <u>pour</u> $x \in \Delta_{\rho,r}$ , <u>on ait</u>

$$c(y)(x) \ll \gamma \times \rho^p \Phi_{j+m}(\rho, r; x) \ ,$$

<u>où</u> m <u>est l'ordre de l'opérateur et</u> p <u>l'ordre de dérivation par rapport à</u> $x^0$.

Soit $\alpha = (\alpha_0, \alpha')$ ($\alpha_0 \in \mathbb{N}$ et $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, avec $\alpha_0 \leq p$ et $|\alpha| \leq m$). Si on note

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x^0)^{\alpha_0} \ldots (\partial x^n)^{\alpha_n}}$$

on a

$$D^\alpha y(x) \ll D^\alpha \Phi_j(\rho, r; x) = \rho^{\alpha_0} \times \Phi_{j+|\alpha|}(\rho, r; x) \ll \rho^p \times R^{m-|\alpha|} \Phi_{j+m}(\rho, r; x)$$

donc

$$a_\alpha(x) D^\alpha y(x) \ll \rho^p \times R^{m-|\alpha|} \frac{M}{R - \sum_{i=0}^{n} x^i} \times \Phi_{j+m}(\rho, r; x) \ll$$

$$\ll \rho^p \times R^{m-|\alpha|} \times \frac{M}{R-r} \times \Phi_{j+m}(\rho, r; x) \ll \rho^p \times \frac{M \times R^{m-|\alpha|}}{R(1-K)} \times \Phi_{j+m}(\rho, r; x) \ .$$

Si $c(y) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ \alpha_0 \leq p}} a_\alpha D^\alpha y$, on pose

$$\gamma = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{M \times R^{m-|\alpha|}}{R(1-K)}$$

ce qui donne

$$c(y)(x) \ll \gamma \times \rho^p \times \Phi_{j+m}(\rho, r; x)$$

$\gamma$ ne dépend que de M, K, R et m , donc ne dépend que de l'opérateur et de K.

On montre enfin un résultat qui justifie, <u>a posteriori</u>, l'introduction des fonctions $\Phi_j$ , et permet de voir pourquoi "elles sont d'un emploi particulièrement commode" [15].

LEMME IV. $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) \frac{\zeta^j}{j!}$ <u>analytique au voisinage de l'origine équivaut à l'existence de nombres positifs</u> M, r, $\rho$ <u>et</u> C <u>tels que, pour</u> $x \in \Delta_{0,r}$ , <u>on ait</u> :

$$a_j(x) \ll M \times C^{j+1} \times \Phi_j(\rho, r; x) \ .$$

Si

$$A(x, \zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) \frac{\zeta^j}{j!}$$

est analytique au voisinage de $0$, il existe $M$ et $R$ tels que, pour

$$|\zeta| + \sum_{i=0}^{n} |x^i| < R ,$$

on ait

$$A(x,\zeta) \ll \frac{M}{R-\zeta-\sum_{i=0}^{n} x^i} .$$

En dérivant $j$ fois par rapport à $\zeta$, puis en faisant $\zeta = 0$, on trouve,

si
$$\sum_{i=0}^{n} |x^i| < R :$$

$$a^j(x) \ll \frac{M \times j!}{\left(R-\sum_{i=0}^{n} x^i\right)^{j+1}} = M \times \Psi_j(R,x)$$

qui a bien la forme voulue, si on prend $r = R$, $\rho = 1$, $C = 1$.

Réciproquement, si $a_j(x) \ll M \times C^{j+1} \times \Phi_j(\rho,r;x)$, pour $x \in \Delta_{\rho,r}$, on aura

$$|a_j(x)| \cdot \frac{|\zeta|^j}{j!} \leqq \frac{M \times C^{j+1} \times j!}{\left(r-\rho|x^0|-\sum_{i=1}^{n}|x^i|\right)^{j+1}} \times \frac{|\zeta|^j}{j!}$$

$$= \frac{M \times C}{\left(r-\rho|x^0|-\sum_{i=1}^{n}|x^i|\right)} \times \left[\frac{C|\zeta|}{r-\rho|x^0|-\sum_{i=1}^{n}|x^i|}\right]^j$$

donc $A(x,\zeta)$ sera analytique pour

$$C|\zeta| + \rho|x^0| + \sum_{i=1}^{n}|x^i| < r .$$

c) <u>Démonstration de la convergence.</u>

Définition :

$$\Phi_\ell^j(\rho,r,C;x) = \left(\frac{\rho}{C}\right)^{-\mu_\ell} \times C^{j+1} \times \Phi_j(\rho,r;x)$$

(le fait que les différentes caractéristiques n'ont pas la même multiplicité, comme c'était le cas pour des caractéristiques toutes simples, impose l'introduction d'un coefficient multiplicatif $\left(\frac{\rho}{C}\right)^{-\mu_\ell}$ qui permet, en quelque sorte, de rendre "homogènes" les calculs qui suivent.)

On va démontrer par récurrence la proposition $\mathcal{P}_j$

$$
j \geq 0 \qquad \mathcal{P}_j \begin{cases} \mathcal{A}^j : 1 \leq \ell \leq \tau \qquad Y_\ell^{j-\mu_\ell}(x) \ll \Phi_\ell^{j-\mu_\ell+t}(\rho,r,C;x) \\ \mathcal{B}^j : 1 \leq \ell \leq \tau \ , \quad 0 \leq u < \mu_\ell \\ \overline{\partial_{(o)u} Y_\ell^{j-1-u}(x')} \ll \overline{\partial_{(o)u} \Phi_\ell^{j-1-u+t}}(\rho,r,C;x') \end{cases}
$$

pour un choix convenable des constantes $\rho$, $r$ et $C$.

Pour $j = 0$, le résultat est évident car $Y_\ell^{-\mu_\ell} = 0$, ainsi que $\overline{\partial_{(o)u} Y_\ell^{-1-u}}$. Supposons démontrés $\mathcal{P}_0,\dots,\mathcal{P}_{j-1}$ et démontrons $\mathcal{P}_j$.

Les équations qui déterminent les inconnues sont

$$
(6)_j : 1 \leq \ell \leq \tau \qquad \partial_{(o)\mu_\ell} Y_\ell^{j-\mu_\ell} = c_\ell(Y_\ell^{j-\mu_\ell}) + w_\ell^j
$$

avec

$$
w_\ell^j = v_\ell^j - \sum_{r=\mu_\ell+1}^{t} \mathcal{H}^r(\varphi_\ell)(Y_\ell^{j-r})
$$

$$
(7)_{(j-1)} \quad \overline{\partial_{(o)u} Y_\ell^{j-1-u}} = g_\beta^{j-1} + \sum_{m=1}^{\tau} \left\{ \sum_{k=\mu_m}^{t-1} \gamma_{\beta,m}^k \, \overline{\partial_{(o)k} Y_m^{j-1-k}} + \sum_{k=0}^{t-2} \overline{\mathcal{M}_{\beta,k}^m (Y_m^{j-k-2})} \right\}
$$

$$
\text{pour} \quad 1 \leq \ell \leq \tau \ , \qquad 0 \leq u < \mu_\ell \ .
$$

Il résulte des hypothèses du théorème 1 et du lemme IV qu'il existe des constantes $M$ et $R$ telles que pour $1 \leq \ell \leq \tau$, $j \geq 0$ et $x \in \Delta_R$, on ait :

$$
v_\ell^{j'}(x) \ll \frac{M \times j!}{\left(R - \sum_{\alpha=0}^{n} x^\alpha\right)^{j+1}} = M \times \Psi_j(R;x) \ .
$$

De même, si $0 \leq \alpha < t$ et $j \geq 0$, on a, pour $x' \in \Delta_R \cap Q$,

$$
b_\alpha^j(x') \ll \frac{M \times j!}{\left(R - \sum_{i=1}^{n} x^i\right)^{j+1}} = M \times \Psi_j(R;x') \ .
$$

Enfin, les fonctions $A_\alpha^\beta$, $\gamma_{\beta,m}^k$, et les coefficients des opérateurs $\mathcal{M}_{\beta,k}^m$ sont des fonctions analytiques de $x'$, en nombre fini : on peut donc supposer que, pour $x' \in \Delta_R \cap Q$, elles admettent une majorante commune $M\,\overline{\Psi_0}(R,x')$. Les coefficients des $c_\ell$ et des $\mathcal{H}^r(\varphi_\ell)$ étant en nombre fini et analytiques au voisinage de $0$ , on peut supposer qu'ils admettent sur $\Delta_R$ la même fonction majorante

$$M \times \psi_o(R;x) \ .$$

On cherche d'abord pour quelles conditions sur $\rho$, $r$ et $C$ , $\mathcal{B}^j$ est vérifié.

$$b_\alpha^{j-1}(x') \ll M \times \overline{\psi_{j-1}}(R,x') \ll M \times R^t \ \overline{\Phi_{j-1+t}}(\rho,r;x') \qquad (\text{si } \rho \geqq 1 \text{ et } r \leqq R)$$

$$A_\beta^\alpha(x') \ll M \ \overline{\psi_o}(R,x') \ .$$

On en déduit

$$g_\beta^{j-1}(x') = \sum_{\alpha=0}^{t-1} A_\beta^\alpha(x') b_\alpha^{j-1}(x') \ll \frac{t \times M \times R^t}{R-r} \times \overline{\Phi_{j-1+t}}(\rho,r;x') \ .$$

Si on impose $r \leqq K.R$, avec $K$ nombre donné, $K < 1$ , on trouve

$$(8)_j \qquad g_\beta^{j-1}(x') \ll M_1 \times \overline{\Phi_{j-1+t}}(\rho,r;x') \qquad \left( M_1 = \frac{tM \times R^t}{R(1-K)} \right) .$$

Pour $k \geqq \mu_m$ , on a, d'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{A}^{j-[1+k-\mu_m]}$

$$Y_m^{j-1-k} \ll \Phi_m^{j-1-k+t} \ ,$$

d'où

$$\partial_{(o)k} Y_m^{j-1-k} \ll \partial_{(o)k} \Phi_m^{j-1-k+t} \ .$$

(Remarquons que, pour $j$ donné, $j \geqq 0$ , on ne peut appliquer l'hypothèse de récurrence que si $j \geqq 1+k-\mu_m$ , c'est-à-dire si $k \leqq j-1+\mu_m$ . Comme $k$ reste $\leqq t-1$ , ceci est vérifié dès que $j$ est assez grand. Pour les premiers indices $j$ , il existe des $k \leqq t-1$ tels que $k > j-1+\mu_m$ , mais on a alors $Y_m^{j-1-k} = 0 \ll \Phi_m^{j-1-k+t}$.)

On a donc :

$$\partial_{(o)k} Y_m^{j-1-k}(x) \ll \partial_{(o)k} \Phi_m^{j-1-k+t}(\rho,r,C;x) = \left(\frac{\rho}{C}\right)^{k-\mu_m} \times C^{j+t} \times \Phi_{j-1+t}(\rho,r;x).$$

D'autre part,

$$\gamma_{\beta,m}^k(x') \ll M \times \overline{\psi_o}(R;x') \ .$$

On en déduit, si $\rho \geqq 1$ , $r \leqq KR$ $(K < 1)$ et $\frac{\rho}{C} \leqq 1$ , pour $k \geqq \mu_m$

$$\gamma_{\beta,m}^k(x') \times \overline{\partial_{(o)k} Y_m^{j-1-k}(x')} \ll \frac{M}{R(1-K)} \times C^{j+t} \times \overline{\Phi_{j-1+t}}(\rho,r;x') \ .$$

Si on pose

$$M_2 = \frac{t \times \tau \times M}{R(1-K)} ,$$

on trouve

$$(9)_j \qquad \sum_{m=1}^{\tau} \sum_{k=\mu_m}^{t-1} Y^k_{\beta,m}(x') \, \overline{\partial_{(o)k} Y^{j-1-k}_m}(x') \ll M_2 \times C^{j+t} \times \overline{\Phi_{j-1+t}}(\rho,r;x') .$$

Si $j-2-(k-v) \geqq 0$, l'hypothèse de récurrence $\mathcal{B}^{j-1-(k-v)}$ (on a $k-v \geqq 0$) donne, si $v < \mu_m$ :

$$\partial_{(o)v} Y^{j-k-2}_m(o,x') \ll \partial_{(o)v} \overline{\Phi^{j-k-2+t}_m}(\rho,r,c;x') .$$

Si $j-1-(k-v) < 0$, on a :

$$\partial_{(o)v} Y^{j-k-2}_m(o,x') = 0 ,$$

et dans ce cas la majoration précédente reste vraie.

Si $v \geqq \mu_m$, on a $k \geqq v \geqq \mu_m$, donc $Y^{j-k-2}_m \ll \Phi^{j-k-2+t}_m$ (d'après $\mathcal{A}^{j-(2+k-\mu_m)}$ si $j \geqq 2+k-\mu_m$ ou parce que $Y^{j-k-2}_m = 0$ si $j < 1+k-\mu_m$).

On a

$$\mathcal{M}^{m,v}_{\beta,k}(x') \ll M \, \overline{\Psi_o}(R,x')$$

et par conséquent (en supposant encore $\rho \geqq 1$ et $r \leqq K.R$)

$$\mathcal{M}^{m,v}_{\beta,k}(x') \times \partial_{(o)v} Y^{j-k-2}_m(o,x') \ll \frac{M}{R(1-K)} \times \overline{\partial_{(o)v} \Phi^{j-k-2+t}_m}(\rho,r,C;x')$$

$$\partial_{(o)v} \Phi^{j-2-k+t}_m = \left(\frac{\rho}{C}\right)^v \times \Phi^{j-2-k+v+t}_m = \left(\frac{\rho}{C}\right)^{v-\mu_m} C^{j-1-k+v+t} \times \Phi_{j-2-k+v+t}$$

puisque $k-v \geqq 0$ et $r \leqq KR < R$, on aura

$$\partial_{(o)v} \Phi^{j-2-k+t}_m \ll \left(\frac{\rho}{C}\right)^{v-\rho_m} \times C^{j-1-k+v+t} \times R^{k-v+1} \times \Phi_{j-1+t}$$

$$= \frac{1}{\rho^{k-v}} \times \left(\frac{\rho}{C}\right)^{k-\mu_m} \times C^{j-1+t} \times R^{k-v+1} \times \Phi_{j-1+t}$$

$$\ll \left(\frac{\rho}{C}\right)^{k-\mu_m} \times C^{j-1+t} \times R^{k-v+1} \times \Phi_{j-1+t}$$

(puisque $k-v \geqq 0$ et $\rho \geqq 1$).

Si on pose

$$F(\tfrac{\rho}{C}) = \sum_{m=1}^{I} \sum_{k=0}^{j-2} \sum_{\nu=0}^{k} (\tfrac{\rho}{C})^{k-\mu_m} \times \frac{M \times R^{k-\nu}}{(1-K)} ,$$

on trouve

$$(10)_j \qquad \sum_{m=1}^{I} \sum_{k=0}^{j-2} \overline{\mathcal{M}^{m}_{\beta,k}(Y^{j-k-2}_m)(x')} \ll C^{j-1+t} \times F(\tfrac{\rho}{C}) \times \overline{\Phi_{j-1+t}(\rho,r;x')} .$$

En additionnant $(8)_j$, $(9)_j$ et $(10)_j$ on trouve

$$\overline{\partial_{(o)u} Y^{j-u-1}_\ell(x')} \ll (M_1 + M_2 \times C^{j+t} + F(\tfrac{\rho}{C}) \times C^{j+t-1}) \times \Phi_{j-1+t}(\rho,r;x') .$$

Si on veut que

$$\overline{\partial_{(o)u} Y^{j-1-u}_\ell} \ll \overline{\partial_{(o)u} \Phi^{j-1-u+t}_\ell} ,$$

il suffit que

$$\left(M_1 + M_2\, C^{j+t} + C^{j+t-1} \times F(\tfrac{\rho}{C})\right) \overline{\Phi_{j-1+t}} \ll \overline{\partial_{(o)u} \Phi^{j-1-u+t}_\ell} .$$

Or

$$\partial_{(o)u} \Phi^{j-1-u+t}_\ell = (\tfrac{\rho}{C})^{u} \times \Phi^{j-1+t}_\ell = (\tfrac{\rho}{C})^{u-\mu_\ell} \times C^{j+t} \times \Phi_{j-1+t} .$$

Si on veut assurer le résultat pour tout $u < \mu_\ell$ , puisque $\frac{\rho}{C} \leq 1$ , il suffit que

$$M_1 + M_2 \times C^{j+t} + C^{j+t-1} \times F(\tfrac{\rho}{C}) \leq (\tfrac{\rho}{C})^{-1} \times C^{j+t} .$$

Si on suppose $C \geq 1$ , il suffira pour cela que

$$(11) \qquad \tfrac{\rho}{C}(M_1 + M_2) + \tfrac{1}{C} \times F(\tfrac{\rho}{C}) \leq 1 .$$

Si on suppose $\rho$ , $r$ et $C$ choisis de manière à ce que

$$\begin{cases} \rho \geq 1 , \quad r \leq KR \quad (K < 1) , \quad \frac{\rho}{C} \leq 1 \\ \frac{\rho}{C}(M_1+M_2) + \frac{1}{C} F(\frac{\rho}{C}) \leq 1 \end{cases}$$

alors $\mathcal{C}^j$ est vérifié. (On verra plus loin qu'un tel choix est possible.)

Pour démontrer $\mathcal{A}^j$ on utilise le résultat fondamental de la méthode des majorantes qu'on rappelle ici.

LEMME V. Si $c$ est un opérateur différentiel d'ordre $(\mu-1)$ par rapport à $x^o$, ayant pour coefficients des séries entières formelles de $x = (x^o, x^1, \dots, x^n)$, et $\mathscr{C}$ un opérateur différentiel majorant $c$ (chaque coefficient de $c$ est majoré par le coefficient correspondant de $\mathscr{C}$).

Si $f$ est une série entière formelle de $x$, et $F$ une série majorante de $f$. Si $z_u$ $(0 \leqq u < \mu-1)$ sont des séries entières formelles de $x' = (x^1, \dots, x^n)$, alors il y a une solution série formelle et une seule au problème de Cauchy formel

$$\begin{cases} \partial_{(o)\mu} y = c(y) + f \\ 0 \leqq u < \mu : \quad \partial_{(o)u} y(o,x') = z_u(x') . \end{cases}$$

Si, de plus, $Y$ est une série entière formelle telle que

$$\begin{cases} \partial_{(o)\mu} Y \gg \mathscr{C}(Y) + F \\ 0 \leqq u < \mu \quad \partial_{(o)u} Y(o,x') \gg z_u(x') \end{cases}$$

alors on a $y \ll Y$.

L'existence et l'unicité de la série formelle solution sont évidentes. On montre la seconde partie du lemme en prouvant que, pour tout $u \geqq 0$,

$$\partial_{(o)u} y(o,x') \ll \partial_{(o)u} Y(o,x') .$$

Pour $0 \leqq u < \mu$, c'est l'hypothèse sur les données de Cauchy. Pour $u = \mu$, on a

$$\partial_{(o)\mu} y(o,x') = c(y)(o,x') + f(o,x') \ll \mathscr{C}(Y)(o,x') + F(o,x') \ll \partial_{(o)\mu} Y(o,x').$$

En dérivant les deux membres de l'équation, on en déduit le résultat pour $u = \mu+1$; $u = \mu+2, \dots,$ d'où le lemme.

Pour montrer $\mathscr{A}^j$, c'est-à-dire $Y_\ell^{j-\mu_\ell} \ll \Phi_\ell^{j-\mu_\ell+t}$, il suffira donc de prouver que :

$$(12)_j \qquad \partial_{(o)\mu_\ell} \Phi_\ell^{j-\mu_\ell+t} \gg \mathscr{C}_\ell(\Phi_\ell^{j-\mu_\ell+t}) + W_\ell^j$$

avec $\mathscr{C}_\ell$ opérateur différentiel "majorant" $c_\ell$ et $W_\ell^j$ majorante de $w_\ell^j$, puisqu'on sait que

$$\partial_{(o)\mu_\ell-1} Y_\ell^{j-\mu_\ell}(o,x') \ll \overline{\partial_{(o)\mu_\ell-1} \Phi_\ell^{j-\mu_\ell+t}}(\rho,r,C;x') \qquad (\text{d'après } \mathcal{B}^j)$$

$$\partial_{(o)\mu_\ell-2} Y_\ell^{j-\mu_\ell}(o,x') \ll \overline{\partial_{(o)\mu_\ell-2} \Phi_\ell^{j-\mu_\ell+t}}(\rho,r,C;x') \qquad (\text{d'après } \mathcal{B}^{j-1})$$

$$\partial_{(o)\mu_\ell-1-k} Y_\ell^{j-\mu_\ell}(o,x') \ll \overline{\partial_{(o)\mu_\ell-1-k} \Phi_\ell^{j-\mu_\ell+t}}(\rho,r,C;x') \quad (\text{d'après } \mathcal{B}^{j-k})$$

$$Y_\ell^{j-\mu_\ell}(o,x') \ll \overline{\Phi_\ell^{j-\mu_\ell+t}}(\rho,r,C;x') \qquad (\text{d'après } \mathcal{B}^{j-\mu_\ell+1}) .$$

Remarquons que si $j-\mu_\ell+1 < 0$ , les hypothèses de récurrence ne donnent les résultats annoncés que pour $k \leqq j$ ; si $j < k \leqq (\mu_\ell-1)$ , alors

$$\partial_{(o)\mu_\ell-1-k} Y_\ell^{j-\mu_\ell}(o,x') = 0 ,$$

donc la majoration reste vraie.

Pour montrer $(12)_j$ , il faut d'abord trouver une fonction majorante $W_\ell^j$ de

$$w_\ell^j = v_\ell^j - \sum_{r=\mu_\ell+1}^{t} \mathcal{H}^r(\varphi^\ell)[Y_\ell^{j-r}] .$$

Pour $\mu_\ell+1 \leqq r \leqq t$ , on a $Y_\ell^{j-r} \ll \Phi_\ell^{j-r+t}$, d'après les hypothèses de récurrence $\mathcal{A}^{j-1},\dots,\mathcal{A}^{j-(t-\mu_\ell)}$ , ou éventuellement, si $j-(t-\mu_\ell) < 0$ , parce que les premières inconnues sont nulles. Il y a un nombre fini d'opérateurs $\mathcal{H}^r(\varphi^\ell)$ et $c_\ell$ , donc on peut, quand on applique le lemme III, prendre le même coefficient $\gamma$. On a donc, pour $r \geqq (\mu_\ell+1)$

$$\mathcal{H}^r(\varphi^\ell)[Y_\ell^{j-r}] \ll \gamma \times \rho^r \times \left(\frac{\rho}{C}\right)^{-\mu_\ell} \times C^{j+1-r+t} \times \Phi_{j+t} = \gamma \times \left(\frac{\rho}{C}\right)^{r-\mu_\ell} \times C^{j+1+t} \times \Phi_{j+t}$$

donc

$$-\sum_{r=\mu_\ell+1}^{t} \mathcal{H}^r(\varphi^\ell)[Y_\ell^{j-r}] \ll t \times \gamma \times \left(\frac{\rho}{C}\right) \times C^{j+1+t} \times \Phi_{j+t}$$

(puisque $\frac{\rho}{C} \leqq 1$ et $r - \mu_\ell \geqq 1$ ).

D'autre part,

$$v_\ell^j(x) \ll M \times \Psi_j(R;x) \ll M \times R^t \times \Phi_{j+t}(\rho,r;x) .$$

On a donc

$$w_\ell^j(x) \ll (MR^t + t\gamma \times \frac{\rho}{C} \times C^{j+1+t})\Phi_{j+t}(\rho,r;x) = W_\ell^j(x)$$

$$\mathcal{C}_\ell(\Phi_\ell^{j-\mu_\ell}) + W_\ell^j \ll \gamma \times \rho^{\mu_\ell -1} \times (\frac{\rho}{C})^{-\mu_\ell} \times C^{j+1-\mu_\ell+t}\,\Phi_{j+t} + W_\ell^j$$

$$= (\frac{\gamma}{\rho} \times C^{j+1+t} + MR^t + t\gamma \times \frac{\rho}{C} \times C^{j+1+t})\Phi_{j+t} \quad .$$

D'autre part

$$\partial(o)_{\mu_\ell}\Phi_\ell^{j-\mu_\ell} = (\frac{\rho}{C})^{-\mu_\ell} \times (\frac{\rho}{C})^{\mu_\ell} \times C^{j+1+t} \times \Phi_{j+t} \; .$$

On aura donc $(12)_j$ si

$$C^{j+1+t} \geqq \frac{\gamma}{\rho} \times C^{j+1+t} + MR^t + t\gamma \times \frac{\rho}{} \times C^{j+1+t}$$

donc, a fortiori (puisque $C \geqq 1$) si

$$\frac{\gamma}{\rho} + (t\gamma) \times \frac{\rho}{C} + \frac{MR^t}{C} \leqq 1 \; . \tag{13}$$

Il n'y a plus qu'à montrer maintenant que toutes ces conditions sont compatibles entre elles, et qu'on peut choisir $r$, $\rho$ et $C$ de manière à ce qu'elles soient simultanément vérifiées.

Les conditions sont

$$\left\{\begin{array}{l} \rho \geqq 1 \; , \quad r \leqq KR \quad (\text{avec } K < 1) \; , \quad \frac{\rho}{C} \leqq 1 \; , \quad C \geqq 1 \\ \frac{\rho}{C}(M_1+M_2) + \frac{1}{C}F(\frac{\rho}{C}) \leqq 1 \\ \frac{\gamma}{\rho} + (t\gamma) \times \frac{\rho}{C} + \frac{MR^t}{C} \leqq 1 \; . \end{array}\right.$$

Soit

$$\varepsilon \leqq \min(1 \; , \; \frac{1}{2(M_1+M_2)} \; , \; \frac{1}{3t\gamma}) \; .$$

On impose à $\frac{\rho}{C}$ d'être égal à $\varepsilon$, tout en laissant à $\rho$ et à $C$ la possibilité de varier. $F(\frac{\rho}{C})$ a une valeur fixée égale à $F(\varepsilon)$ . On choisit :

$$C \geqq C_o = \max(3MR^t, 2F(\varepsilon), 1)$$

$$\rho \geqq \rho_o = \max(3\gamma, 1) \; .$$

Enfin, on choisit $r \leqq KR$ (avec $K < 1$). On voit d'ailleurs qu'on peut prendre $r$ aussi voisin qu'on veut de $R$, puisque $K$ peut prendre des valeurs aussi proches de 1 que l'on veut (mais une modification de $K$, change $\rho_o$ et $C_o$).

Pour ce choix de $\rho$, $r$ et $C$, on a bien, pour tout $j \geqq 1 - \mu_\ell$

$$Y_\ell^j(x) \ll \Phi_\ell^{j+t}(\rho,r,C;x) = \left(\frac{\rho}{C}\right)^{-\mu_\ell} \times C^{j+1+t} \times \Phi_{j+t}(\rho,r;x) .$$

Il résulte alors du lemme IV que chacune des séries

$$Y_\ell(x,\zeta) = \sum_{j=1-\mu_\ell}^{\infty} Y_\ell^j(x) \times \frac{\zeta^{j+\mu_\ell-1}}{(j+\mu_\ell-1)!}$$

définit une fonction analytique au voisinage de l'origine dans $K^{n+2}$ ce qui termine la démonstration du théorème 1.

## 4. APPLICATION, DANS LE CAS RÉEL, AU PROBLÈME DE CAUCHY ANALYTIQUE AVEC DONNÉES SINGULIÈRES, SUPPORT SINGULIER DE LA SOLUTION.

On suppose que $E$ est une variété réelle, et $h$ un opérateur différentiel sur $E$ dont les coefficients sont des fonctions analytiques à valeurs réelles.

Soit $f_o$ une distribution définie sur un voisinage ouvert de $0$ dans $\mathbb{R}$. Il existe une fonction continue $g$, définie sur un intervalle $]-\alpha,\alpha[ \subset V$, telle que $g^{(m)} = f_o$. (On dérive au sens des distributions.)

On pose $f_m = g$, $f_{m-1} = g'$,..., $f_o = g^{(m)}$, $f_{-1} = g^{(m+1)}$,...
et, pour $x \in ]-\alpha,\alpha[$,

$$f_{m+1}(x) = \int_o^x g(t)dt$$
$$\vdots$$
$$f_{m+j+1}(x) = \int_o^x f_{m+j}(t)dt .$$

On construit ainsi une suite $(f_j)$ de distributions de $\mathcal{D}'(]-\alpha,\alpha[)$, telles que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on ait $f_j' = f_{j-1}$ (pour $j \geqq m$, $f_j$ est une fonction de classe $C^{j-m}$).

Si $\varphi$ est une fonction indéfiniment différentiable sur un ouvert, telle que $\operatorname{grad} \varphi$ ne s'annule pas, et $f$ une distribution, on sait définir sur cet ouvert la distribution $f \circ \varphi$, par exemple en prenant un système de coordonnées dont la première soit $\varphi$. De même, on peut définir $f \circ \varphi(o,x') = f \circ \bar{\varphi}(x')$.

On suppose les hypothèses de la proposition I et du théorème I vérifiées, et on étudie le problème de Cauchy

$$\begin{cases} h(y) = \sum_{\ell=1}^{\tau} \sum_{j=1}^{\infty} v_\ell^j \times (f_{j-t} \circ \varphi^\ell) \\ \partial_{(o)^\alpha} y(o,x') = \sum_{j=0}^{\infty} b_\alpha^j(x') \times (f_{j-\alpha} \circ \psi)(x') \qquad 0 \leq \alpha < t \ . \end{cases}$$

On trouve donc une solution formelle

$$y = \sum_{\ell=1}^{\tau} \sum_{y=1-\mu_\ell}^{\infty} Y_\ell^j \times (f_j \circ \varphi^\ell)$$

telle que les séries entières (pour $1 \leq \ell \leq \tau$) $Y_\ell(x,\zeta)$ convergent sur un même voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^{n+2}$ .

On écrit $y = u + Y$ , avec

$$u = \sum_{\ell=1}^{\tau} \sum_{j=-\mu_\ell+1}^{m+t-1} Y_\ell^j \times (f_j \circ \varphi^\ell)$$

$$Y = \sum_{\ell=1}^{\tau} \sum_{j=m+t}^{\infty} Y_\ell^j \times (f_j \circ \varphi^\ell) \ .$$

$u$ est une distribution définie sur un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^{n+2}$ , et on montre facilement que $Y$ est de classe $C^t$ au voisinage de l'origine.

En effet, pour $j \geq (m+t)$ , $f_j$ est de classe $C^t$ au moins, $\varphi^\ell$ et $Y_\ell^j$ sont analytiques sur un même voisinage de l'origine et $\varphi^\ell(o) = 0$ , donc si $\delta$ est un nombre positif donné $(\delta < \alpha)$ , il existe un voisinage $V$ de l'origine tel que, pour $x \in V$ , on ait $|\varphi^\ell(x)| < \delta$ .

De plus, d'après la définition de $f_j$ , on a, pour $j \geq m$

$$|f_j(\zeta)| \leq A \times \frac{|\zeta|^{j-m}}{(j-m)!} \qquad (A \text{ constante donnée}) \ .$$

Donc, pour $x \in V$ et $j \geq m$ , on a $|f_j(\varphi^\ell(x))| \leq A \times \frac{\delta^{j-m}}{(j-m)!}$ .

De plus, pour $j \geq 1-\mu_\ell$ , on a

$$Y_\ell^j(x) \ll \left(\frac{\rho}{C}\right)^{-\mu_\ell} \times C^{j+1+t} \times \frac{(j+t)!}{\left(r-\rho x^o-\sum_{i=1}^{n} x^i\right)^{j+1+t}}$$

Si on impose

$$\rho|x^o| + \sum_{i=1}^{n} |x^i| \leq \frac{r}{2} ,$$

on aura

$$|Y_\ell^j(x)| \leq (\frac{\rho}{C})^{-\mu_\ell} \times C^{j+1+t} \times \frac{(j+t)!}{(\frac{r}{2})^{j+1+t}}$$

et, par conséquent, pour $x$ appartenant à un certain voisinage de l'origine,

$$|Y_\ell^j(x) \times (f_j \circ \varphi^\ell)(x)| \leq \frac{A}{\delta^{m+1}} \times (\frac{\rho}{C})^{-\mu_\ell} \times (\frac{2}{r})^t \times (\frac{2\delta}{r})^{j+1} \times \frac{(j+t)}{(j-m)!} .$$

Si $2\delta c < r$ , ce qu'on réalise, $r$ et $C$ étant fixés, pour $\delta$ assez petit, ceci est le terme général d'une série convergente indépendante de $x$ . $Y$ est donc continue. Le même raisonnement montre qu'elle est de classe $C^t$ . En effet :

$$D^\alpha(Y_\ell^j \times f_j \circ \varphi^\ell) = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta \, D^{\alpha-\beta} Y_\ell^j \times D^\beta(f_j \circ Y^\ell)$$

$$= \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \sum_{r \leq |\beta|} C_\alpha^\beta \, D^{\alpha-\beta} Y_\ell^j \times \gamma_r^\beta \times (f_{j+r} \circ \varphi^\ell)$$

où $\gamma_r^\beta$ est une fonction connue qui ne dépend que de $\varphi^\ell$, mais pas de $j$ , et qui est analytique, donc bornée sur un voisinage de l'origine.

On voit donc que $y = u + Y$ où $u$ est une distribution et $Y$ de classe $C^t$. Si les singularités des données sont d'une certaine forme, on a pu préciser la partie singulière de la solution. L'unicité de la solution résulte du théorème de Cauchy-Kowalewski.

Ce résultat a été démontré dans [9] pour des systèmes dits de type (H), qui sont en fait des systèmes fortement hyperboliques [11]. Dans le cas d'un opérateur scalaire, ceci imposait à toutes les caractéristiques d'être simples. On obtient ici le résultat pour des caractéristiques de multiplicité quelconque (mais constante) et sans hypothèse d'hyperbolicité (puisque la fonction $\psi$ est fixée), quand $h$ est bien décomposable.

On peut même préciser davantage dans le cas particulier où le support singulier de $f_o$ est l'origine. On montre alors, en reprenant le raisonnement précédent, que $y$ est de classe $C^\infty$ sauf pour les $x$ tels que $\varphi^\ell(x) = 0$ , c'est-à-dire sur $\bigcup_{\ell=1}^{T} S^\ell$ , et le support singulier de la solution est contenu dans le support singulier des données.

## 5. APPLICATION DANS LE CAS COMPLEXE AU PROBLÈME DE CAUCHY ANALYTIQUE AVEC DES DONNÉES POSSÉDANT DES SINGULARITÉS POLAIRES OU LOGARITHMIQUES.

Il est bien évident que le theorème 1 permet de généraliser au cas des caractéristiques de multiplicité quelconque (mais pour un opérateur scalaire bien décomposable seulement) les résultats de [15]. On reprend les notations de cet article.

Soit $f_o$ définie dans $\mathbb{C}$ et appartenant à $h(p,q)$ ([15]) ($p\in\mathbb{C}$ et $q\in\mathbb{N}$), c'est-à-dire :

$$f_o(\zeta) = \zeta^p \times P_q(\log\zeta) \qquad (P_q \text{ polynôme de degré } \leqq q)$$

si $p$ n'est pas un entier $< 0$

$$f_o(\zeta) = \zeta^p\, P_{q-1}(\log\zeta) \qquad \text{si } p < 0 \text{ et } q \geqq 1 \quad (p\in\mathbb{Z})$$

$$f_o(\zeta) = 0 \qquad \text{si } p < 0 \text{ et } q = 0\,. \quad (p\in\mathbb{Z})$$

On sait ([15]) qu'on peut construire une suite $(f_j)$ (pour $j\in\mathbb{Z}$), avec $f_j \in h(p+j,q)$ , telle que pour tout $j\in\mathbb{Z}$ , on ait $f_j' = f_{j-1}$ .

Les caractéristiques n'ayant pas toutes le même ordre de multiplicité, il faut étendre la définition de $H(p,q)$.

DÉFINITION. Soit $y$ une fonction holomorphe sur le revêtement simplement connexe du complémentaire par rapport à un voisinage de $a$ dans $E$ de $\bigcup_{\ell=1}^{\tau} S^\ell$ . On dit que

$$y \in H(p_1,\dots,p_\tau;q) \qquad (\text{avec } (p_1,\dots,p_\tau,q) \in \mathbb{C}^\tau \times \mathbb{N})$$

si elle est de la forme

$$y(x) = \sum_{\ell=1}^{\tau_1} [\varphi^\ell(x)]^{p_\ell} \times P_q^\ell(x;\log\varphi^\ell(x)) + \sum_{\ell=\tau_1+1}^{\tau} [\varphi^\ell(x)]^{p_\ell} \times P_{q-1}^\ell(x;\log\varphi^\ell(x))$$

$$+ \sum_{\ell=\tau_1+1}^{\tau} P_q^\ell(x;\log\varphi^\ell(x))\,.$$

Les $\tau_1$ premiers $p_\ell$ ne sont pas des entiers négatifs, les $\tau-\tau_1$ derniers sont des entiers négatifs (et $q \geqq 1$ , sinon les deux derniers termes de la somme sont remplacés par

$$\sum_{\ell=\tau_1+1}^{\tau} P_o^\ell(x))\,.$$

$P_q(x;\zeta)$ désigne un polynôme en $\zeta$ de degré $\leqq q$ , à coefficients analytiques en $x$.

PROPOSITION II. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} h(y) = v \\ \partial_{(o)\alpha} y(o,x') = b_\alpha(x') \quad \text{pour} \quad 0 \leqq \alpha < t \end{cases}$$

tel que $v \in H(p-t+1,\dots,p-t+1;q)$ et, pour $0 \leqq \alpha < t$ , $b_\alpha \in H(p-\alpha;q)$ possède une solution et une seule

$$y \in H(p-\mu_1+1,\dots,p-\mu_\tau+1;q)$$

si $h$ est bien décomposable et si l'équation en $\lambda$

$$\sum_{s=1}^{\sigma} H_s(o;\lambda,\text{grad } \psi(o)) = 0$$

possède $\tau$ racines complexes distinctes.

Remarque 1.- Si toutes les caractéristiques sont simples, tous les $\mu_\ell$ valent 1, et on retrouve le résultat de [15] (dans le cas particulier d'un opérateur scalaire).

Remarque 2.- Si les caractéristiques sont au plus doubles, on trouve un résultat qui généralise [6] (les singularités sont de forme plus générale).

Toutes les démonstrations qui suivent sont exposées en détail dans [15] ; j'en donnerai donc seulement un bref résumé.

LEMME VI. Si la série

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{A}^j(x) \times \frac{\zeta^j}{j!}$$

converge au voisinage de l'origine, et si $f_o \in h(p,q)$ , alors

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{A}^j(x) \times (f_{j-\mu} \circ \varphi)(x)$$

appartient à $H(p-\mu,q)$ .

On a en effet

$$f_j(\zeta) = \zeta^{p+j} \times P_q^j(\log \zeta) = \zeta^{p+j} \times \sum_{r=0}^{q} p_r^j \times (\log \zeta)^r$$

donc formellement

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{A}^j(x) \times (f_{j-\mu} \circ \varphi)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{A}^j(x) \sum_{r=0}^{q} (\varphi(x))^{p+j-\mu} \times p_r^{j-\mu} \times [\log \varphi(x)]^r$$

$$= \sum_{r=0}^{q} [\varphi(x)]^{p-\mu} \times \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{A}^j(x) p_r^{j-\mu} \times [\varphi(x)]^j \right\} \times [\log \varphi(x)]^r \ .$$

On montre comme dans [15] que la série

$$\sum_{j=0}^{+\infty} p_r^{j-\mu} \times [\varphi(x)]^j \times \mathcal{A}^j(x)$$

converge sur un voisinage de l'origine et, par conséquent, on a

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{A}^j(x) \times (f_{j-\mu} \circ \varphi)(x) = [\varphi(x)]^{p-\mu} \times P_q(x; \log \varphi(x) \in H(p-\mu; q) \ .$$

Soit maintenant $v \in H(p-t+1, \dots, p-t+1; q)$. (Supposons par exemple que $(p-t+1)$ ne soit pas un entier négatif ; on aurait une étude analogue dans ce cas.)

On a

$$v(x) = \sum_{\ell=1}^{T} \left\{ \sum_{r=0}^{q} v_{r,\ell}(x) [\log \varphi^\ell(x)]^r \right\} \times [\varphi^\ell(x)]^{p-t+1} \ .$$

On pose

$$f_{-t+1}(\zeta) = \zeta^{p-t+1} \times (\log \zeta)^r \ ,$$

et à partir de $f_{-t+1}$ on construit une suite $(f_j)$. On aura $f_o \in h(p,q)$ (puisque $r \leqq q$).

On résout le problème de Cauchy $h(y) = v_r$ avec, pour $0 \leqq \alpha < t$,

$$\partial_{(o)^\alpha} y(o,x') = 0 \ .$$

D'après le théorème 1 et le lemme VI, il y a une solution

$$y_r \in H(p-\mu_1+1, \dots, p-\mu_T+1; q) \ .$$

Soit

$$\tilde{y} = \sum_{r=0}^{q} y_r \ ;$$

$\tilde{y}$ est solution de $h(\tilde{y}) = v$, avec des données de Cauchy nulles sur $x^o = 0$, et $\tilde{y} \in H(p-\mu_1+1, \dots, p-\mu_T+1; q)$.

On a

$$b_\alpha(x') = [\psi(x')]^{p-\alpha} \times \sum_{r=0}^{q} B_{\alpha,r}(x') \times [\log \psi(x')]^r .$$

On pose $b_{\alpha,r} = (\psi)^{p-\alpha} \times B_{\alpha,r} \times (\log \psi)^r$ et on résout le problème de Cauchy

$$h(y) = 0$$

$$\partial_{(o)u} y(o,x') = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqq u < t \quad \text{et} \quad u \neq \alpha$$

$$\partial_{(o)\alpha} y(o,x') = b_{\alpha,r}(x') .$$

Il y a une solution dans $H(p-\mu_1+1,\ldots,p-\mu_T+1;q)$ .

On refait le même raisonnement pour chaque $b_{\alpha,r}$ $(0 \leqq \alpha < t$ et $0 \leqq r < q)$, et on additionne les solutions obtenues et $\tilde{y}$ . Le $y$ trouvé est une solution du problème posé. Il résulte du théorème de Cauchy-Kowalewski que c'est la seule, ce qui termine la démonstration de la proposition II.

L'énoncé des résultats démontrés ici a été publié dans [13].

## BIBLIOGRAPHIE

[1] Mme Y. CHOQUET-BRUHAT. Ondes asymptotiques et approchées pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires. J. Math. pures et appl., t. 48, 1969, p. 117-158.

[2] J.C. DE PARIS. Ondes asymptotiques et problème de Cauchy caractéristique local pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples. C.R. Acad. Sc., t. 270, série A, 1970, p. 1509-1511.

[3] J.C. DE PARIS. Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples ; lien avec l'hyperbolicité. C.R. Acad. Sc., t. 272, série A, 1971, p. 478-481.

[4] J.C. DE PARIS. Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples ; lien avec l'hyperbolicité. J. Math. pures et appl., t. 5 , 197 .

[5] HAMADA. The singularities of the solutions of the Cauchy problem. R.I.M.S. Kyoto Univ., vol. 3, 1969, p. 21-40.

[6] HAMADA. On the propagation of singularities of the solution of the Cauchy problem. R.I.M.S. Kyoto Univ., vol. 6, 1970, p. 357-384.

[7] J. LERAY. Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy. Bull. Sec. Math. Fr., t. 85, 1957, p. 389-429.

[8] LERAY-GÅRDING-KOTAKE. Uniformisation et développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy linéaire à données holomorphes ; analogie avec la théorie des ondes asymptotiques et approchées. Bull. Soc. Math. Fr., t. 92, 1964, p. 263-361.

[9] LUDWIG. Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem. Comm. pure appl. Math., vol. 13, 1960, p. 473-508.

[10] J. VAILLANT. Remarques sur les systèmes fortement hyperboliques. J. Math. pures et appl., t. 50, 1971, p. 25-51.

[11] J. VAILLANT. Données de Cauchy portées par une caractéristique double, dans le cas d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles. Rôle des bicaractéristiques. J. Math. pures et appl., t. 47, 1968, p. 1-40.

[12] J.C. DE PARIS. Problème de Cauchy analytique à données singulières pour un opérateur différentiel bien décomposable. J. Math. pures et appl. (à paraître).

[13] J.C. DE PARIS. Problème de Cauchy analytique à données singulières pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples. C.R. Acad. Sc., t. 272, série A, 1971, p. 1723-1726.

[14] C. WAGSCHAL. Problème de Cauchy analytique à données méromorphes. C.R. Acad. Sc., t. 272, Série A, 1971, p. 1719-1722.

[15] C. WAGSCHAL. Problème de Cauchy analytique à données méromorphes. J. Math. pures et appl. à paraître.

[16] DUFF. Mixed problems for linear systems of first order. Can. J. Math., 1957, p. 195-221.

[17] P.D. LAX. Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems. Duke Math. J., vol. 24, 1957, p. 627-646.