Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Jacques-Louis Lions

Quelques remarques sur les inéquations variationnelles

Séminaire Jean Leray, nº 3 (1969), p. 23-30
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1969___3_23_0>

QUELQUES REMARQUES SUR LES INÉQUATIONS VARIATIONNELLES

par Jacques-Louis LIONS

Introduction

On donne ici quelques remarques sur la résolution des inéquations variationnelles (au sens de [15]) :

(i) la méthode de pénalisation (N°1) permet de retrouver les résultats essentiels de la théorie à partir des résultats "standard" sur les équations et permet sur les exemples d'obtenir des résultats de régularité (N°2) ;

(ii) la méthode d'interpolation non linéaire (cf. [9]) permet de déduire des résultats de régularité "intermédiaires" des résultats du N°2 ;

(iii) la méthode du "changement de l'espace pivot", brièvement évoquée au N°4 (cf. détails dans [13]) permet de résoudre de nouveaux problèmes unilatéraux (intervenant en Mécanique).

1. Méthode de pénalisation dans les inéquations stationnaires.

1.1. Soit V un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue sur V ; on suppose que

$$a(v,v) \geqq \alpha\|v\|^2 \quad , \quad \alpha > 0 \quad , \quad \forall \ v\in V \quad (\|v\| = \text{norme de } v \text{ dans } V). \tag{1.1}$$

Soit K un ensemble fermé convexe de V et soit $v \to L(v)$ une forme linéaire continue sur V.

On sait (cf. [18],[15]) qu'il existe $u\in K$ unique tel que

$$a(u,v-u) \geqq L(v-u) \qquad \forall \ v\in K \ . \tag{1.2}$$

Remarque 1.1.

Il s'agit là du résultat le plus simple relatif aux inéquations variationnelles stationnaires. On peut remplacer " V Hilbert" par un espace de Banach et supprimer la linéarité de l'application $u \to a(u,v)$(1). Cf. [1], [5] et [11].

Notre but est ici de montrer le résultat (1.2) en "approchant" l'inéquation par une famille d'équations.

1.2. Opérateur de pénalisation.

On introduit l'espace dual V' de V (non nécessairement identifié à V); on

(1) De manière à essentiellement étendre aux inéquations les résultats établis dans [8] pour les équations.

désignera par J l'isomorphisme canonique (opérateur de dualité) de $V \to V'$; on appelle <u>opérateur de pénalisation relatif à</u> K tout opérateur β de $V \to V'$ ayant les propriétés suivantes :

$$(1.3)\quad \begin{cases} \beta \text{ transforme les bornés de } V \text{ en bornés de } V', \\ \beta \text{ est monotone - i.e. } (\beta(u)-\beta(v),u-v) \geqq 0^{(1)}, \ \forall\, u,v\in V, \\ \beta \text{ est hemi-continue - i.e. } \lambda \to (\beta(u+\lambda v),w) \text{ est continue, } \forall\, u,v,w\in V, \end{cases}$$

$$(1.4)\qquad K = \{v \mid v\in V \ ,\ \beta(v) = 0\} \ .$$

<u>De tels opérateurs existent</u>. Par exemple, si P_K est l'opérateur de projection de V sur K, alors

$$(1.5)\qquad \beta = J \circ (I - P_K)$$

est un opérateur de pénalisation relatif à K.

<u>Remarque</u> 1.2. La notion s'étend au cas des espaces de Banach réflexifs(2); cf. [9].

1.3. <u>Equation pénalisée d'approximation</u>.

Comme $v \to a(u,v)$ (resp. $v \to L(v)$) est continue sur V, on a :

$$(1.6)\qquad a(u,v) = (Au,v) \ ,\ A\in \mathcal{L}(V;V') \ ,\ L(v) = (f,v) \ ,\ f\in V' ,$$

et (1.2) équivaut à : $v\in K$ <u>vérifie</u>

$$(1.2\text{ bis})\qquad (Au-f,v-u) \geqq 0 \ ,\ \forall\, v\in K \ .$$

On considère l'équation

$$(1.7)\qquad A\,u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) = f \ ,\quad u_\varepsilon\in V \ ,\quad \varepsilon > 0 \ .$$

Le terme $\frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon)$ est le terme "pénalisateur".

On a alors les résultats suivants :

THÉORÈME 1.1. <u>L'équation pénalisée</u> (1.7) <u>admet</u>, <u>pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>une solution</u> u_ε <u>unique</u>.

THÉORÈME 1.2. <u>Lorsque</u> $\varepsilon \to 0$, <u>on a</u>

$$(1.8)\qquad u_\varepsilon \to u \text{ dans } V \text{ faible,}$$

u <u>étant la solution de</u> (1.2 bis)(3).

---

(1) Si $f\in V'$ et $v\in V$, (f,v) désigne leur produit scalaire.

(2) Le cas non réflexif nécessiterait l'usage d'opérateurs <u>multivoques</u>.

(3) On <u>démontre</u> par la même occasion l'existence de $u\in K$ solution de (1.2 bis).

Le théorème 1.1 est conséquence de la théorie générale des <u>opérateurs monotones</u> (cf. [16]).

<u>Remarque</u> 1.3.

On peut résoudre (1.7) sans que A soit nécessairement <u>linéaire</u> ; on peut ainsi résoudre par la méthode présente les cas évoqués à la Remarque 1.1 ; cf. [9].

Pour la démonstration du théorème 1.2, on vérifie d'abord que

(1.9) u_ε demeure, lorsque $\varepsilon \to 0$, dans un borné de V,

(1.10) $$(\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon) \leqq C\,\varepsilon\,.$$

On peut alors extraire une suite, encore notée u_ε, telle que

(1.11) $$u_\varepsilon \to w \text{ dans } V \text{ faible}$$

et d'après (1.7) $(\beta(u_\varepsilon) = \varepsilon(f - Au_\varepsilon))$:

(1.12) $$\beta(u_\varepsilon) \to 0 \text{ dans } V' \text{ faible}\,.$$

Utilisant (1.10),(1.11),(1.12) et la monotonie de β, on vérifie que

(1.13) $$\beta(w) = 0$$

et donc, d'après (1.4)

(1.14) $$w \in K\,.$$

Soit alors $v \in K$; donc $\beta(v) = 0$ et donc on déduit de (1.7) que

$$(Au_\varepsilon - f, v-u_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\,(\beta(v) - \beta(u_\varepsilon), v-u_\varepsilon)$$

d'où grâce à la monotonie de β :

$$(Au_\varepsilon - f, v-u_\varepsilon) \geqq 0$$

et donc

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\,[(Au_\varepsilon, v) - (f, v-u_\varepsilon)] \geqq \text{lim. inf.}(Au_\varepsilon, u_\varepsilon)$$

soit

$$(Aw, v) - (f, v-w) \geqq (Aw, w)\ ;$$

donc $w \in K$ et vérifie $(Aw-f, v-w) \geqq 0$, donc, cette inéquation admettant <u>au plus</u> une solution (vérification immédiate) on a $w = u$ et le résultat.

2. Exemple et application.

2.1. Le problème.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ régulière. On désigne par $\partial/\partial n$ la dérivée normale à Γ orientée vers l'extérieur de Ω.

Pour g donnée sur Γ (on précisera dans quel espace), on cherche u solution de

(2.1) $$-\Delta u + u = 0 \quad \text{dans } \Omega .$$

(2.2) $$\begin{cases} u \geqq 0 \quad \text{sur } \Gamma , \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} \geqq g \quad \text{sur } \Gamma , \\ u\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} - g\right) = 0 \quad \text{sur } \Gamma . \end{cases}$$

Ce problème entre dans le cadre (1.2) ou (1.2 bis) de la manière suivante. Utilisant les espaces de Sobolev, on prend :

$$V = H^1(\Omega), \quad \text{(les fonctions sont prises à \underline{valeurs réelles})},$$

$$K = \{v \mid v \in V,\ v \geqq 0 \ \text{ p.p. sur } \Gamma\} ,$$

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int_\Omega u\, v\, dx ,$$

$$L(v) = (f,v) = \int_\Gamma g\, v\, d\Gamma , \qquad g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) .$$

Alors (2.1) (2.2) équivaut à

(2.3) $$\begin{cases} u \in K , \\ a(u,v-u) \geqq \int_\Gamma g(v-u)\, d\Gamma , \quad \forall\, v \in K . \end{cases}$$

Donc

(2.4) $\left\{\begin{array}{l}\text{pour } g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) , \text{ le problème (2.1) (2.2) admet une solution } u \\ \text{unique, dans } H^1(\Omega) .\end{array}\right.$

En outre, si l'on pose

(2.5) $$u = G(g)$$

on a :

(2.6) $$\| G(g) - G(g_*) \|_{H^1(\Omega)} \leqq c \| g - g_* \|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} .$$

2.2. Le problème pénalisé.

On choisit β par :

(2.7) $$(\beta(u),v) = -\int_\Gamma u^- \, v \, d\Gamma \,,$$

où $$u^- = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad u \geqq 0 \,, \\ -u & \text{si} \quad u \leqq 0 \,. \end{cases}$$

Le problème pénalisé (1.7) est alors :

(2.8) $$a(u_\varepsilon,v) - \frac{1}{\varepsilon}\int_\Gamma u_\varepsilon^- . v \, d\Gamma = \int_\Gamma g \, v \, d\Gamma \quad , \quad \forall \; v \in H^1(\Omega)$$

ce qui équivaut à

(2.9) $$-\Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \,,$$

(2.10) $$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} - \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^- = g \quad \text{sur} \quad \Gamma \,.$$

Le problème (2.9) (2.10) est donc <u>le problème pénalisé approché</u> du problème (2.1) (2.2).

D'après les théorèmes 1.1 et 1.2 on sait que :

(2.11) u_ε existe et est unique dans $H^1(\Omega)$,

(2.12) $u_\varepsilon \to u$ dans $H^1(\Omega)$ faible, lorsque $\varepsilon \to 0$.

2.3. <u>Applications de la pénalisation</u>.

On peut utiliser la pénalisation pour l'étude de la <u>régularité</u>(1) de la solution du problème (2.1) (2.2). On a d'abord :

(2.13) si $g \in L^2(\Gamma)$ alors $u \in H^{3/2}(\Omega)$.

En effet prenons, <u>ce qui est loisible</u>, $v = -u_\varepsilon^-$ dans (2.8) . Comme

$$a(u_\varepsilon,-u_\varepsilon^-) = a(u_\varepsilon^+ - u_\varepsilon^- \,,\, -u_\varepsilon^-) = a(u_\varepsilon^-,u_\varepsilon^-) \geqq 0 \,,$$

on déduit de (2.8) que

$$\frac{1}{\varepsilon} \|u_\varepsilon^-\|^2_{L^2(\Gamma)} = -\int_\Gamma g \, u_\varepsilon^- \, d\Gamma \leq \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|u_\varepsilon^-\|_{L^2(\Gamma)}$$

d'où

(2.14) $$\left\|\frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^-\right\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|g\|_{L^2(\Gamma)} \,.$$

---

(1) Pour une étude systématique de la régularité, par des méthodes différentes, cf. [4] .

On peut donc extraire une suite encore notée u_ε telle que

(2.15) $$\frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^- \to h \quad \text{dans} \quad L^2(\Gamma) \text{ faible.}$$

Alors (2.9) (2.10) donnent à la limite

(2.16) $$\begin{aligned} & -\Delta u + u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ & \frac{\partial u}{\partial n} = g + h \quad \text{sur} \quad \Gamma, \quad g+h \in L^2(\Gamma). \end{aligned}$$

On en déduit, d'après [14], que (2.13) a lieu.

<u>Autre résultat de régularité.</u>

On a :

(2.17) $$\text{si} \quad g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad \text{alors} \quad u \in H^2(\Omega)$$

et

(2.18) $$\|G(g)\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} .$$

Pour la démonstration de (2.17), on reprend la démonstration de la régularité de u_ε par la méthode des <u>translations parallèles à la frontière</u>, comme dans [17].

<u>Remarque</u> 2.1.

Pour d'autres exemples et applications, cf. [9].

3. <u>Interpolation non linéaire</u>.

L'application $g \to G(g)$ introduite en (2.5) a les propriétés suivantes (cf. (2.6) (2.18)) :

(3.1) $$\begin{cases} G \text{ applique } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^2(\Omega) \\ \text{et} \\ \|G(g)\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \end{cases}$$

(3.2) $$\begin{cases} G \text{ applique } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^1(\Omega) \\ \text{et} \\ \|G(g) - G(g_*)\|_{H^1(\Omega)} \leq c\|g-g_*\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} . \end{cases}$$

Sous les conditions (3.1)(3.2) <u>on peut interpoler</u> "<u>entre</u>" ces deux résultats (la structure hilbertienne est ici inutile ; cf. [9] pour un résultat général) et l'on obtient :

THÉORÈME 3.1. L'opérateur G défini par (2.5) applique $H^s(\Gamma)$ dans $H^{s+3/2}(\Omega)$, $-1 \leqq s \leqq 1$.

Remarque 3.1.

On retrouve ainsi le résultat (2.13), en prenant $s = 0$.

4. Changement d'espace pivot.

Le problème (2.1) (2.2) est un exemple de problème de "mécanique unilatérale" (cf. [7]). Voici un autre type de problème (mécanique unilatérale avec frottement(1)): on cherche u solution de

$$-\Delta u + u = f \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{4.1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| \leqq g \quad \text{sur} \quad \Gamma , \\ u \frac{\partial u}{\partial n} \leqq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma , \\ u\left(\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| - g\right) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma . \end{array} \right. \tag{4.2}$$

Nous montrons dans [13] que, si $g \in L^2(\Gamma)$, ce problème admet une solution unique dans $H^1(\Omega)$ (en fait dans $H^{3/2}(\Omega)$).

On se ramène pour cela au cadre du N°1.1 mais en prenant le produit scalaire des deux membres de (4.1) avec des fonctions test convenables, le produit scalaire étant pris dans $H^1(\Omega)$ au lieu de $L^2(\Omega)$.

C'est la méthode du changement de l'espace pivot.

Remarque 4.1.

D'autres exemples que (4.1) (4.2) sont donnés dans [13].

Remarque 4.2.

D'autres applications du "changement d'espace pivot" ont été données dans [12].

5. Inéquations d'évolution.

La méthode de pénalisation est applicable aux inéquations d'évolution introduites dans [15] (cf. [1], [2], [3], [11]).

On a pu ainsi étudier dans [10] des problèmes d'inéquations variationnelles d'évolution pour les opérateurs de Navier Stokes et certains opérateurs hyperboliques non linéaires.

(1) Ce problème a été posé par C. Duvaut.

Remarque 5.1.

De nouveaux problèmes d'inéquations d'évolution, pour des opérateurs paraboliques (problèmes liés à la mécanique), sont étudiés dans [6].

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BREZIS. Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité. Annales Institut Fourier, 18(1968), 115-175.

[2] H. BREZIS. Thèse, Paris, à paraître.

[3] H. BREZIS et J.L. LIONS. Sur certains problèmes unilatéraux hyperboliques. C.R. Acad. Sc. Paris, 264 (1967), 928-931.

[4] H. BREZIS et G. STAMPACCHIA. Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques. Bull. Soc. Math. France, 96 (1968), 153-180.

[5] F. BROWDER. Non linear operators ... Proc. Symp. Non linear Functional Analysis, Chicago, avril 1968.

[6] C. DUVAUT et J.L. LIONS, à paraître.

[7] G. FICHERA. Problemi elastostatici con vincoli unilaterali. Mem. Accad. Naz. Lincei, 7 (1964), 91-140.

[8] J. LERAY et J.L. LIONS. Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty et Browder. Bull. Soc. Math. France, 93 (1965), 97-107.

[9] J.L. LIONS. Some remarks on variational inequalities. Int. Conference on Functional Analysis, Tokyo, Avril 1969.

[10] J.L. LIONS. Sur quelques propriétés... C.R. Acad. Sc. Paris, 267 (1968), 631-633 ; 684-685.

[11] J.L. LIONS. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Paris, Dunod et Gauthier-Villars, 1969.

[12] J.L. LIONS. Sur quelques problèmes de calcul des variations. Istituto Naz. di Alta Mat. Symp. Math. 2 (1968), 125-144.

[13] J.L. LIONS. Sur quelques nouveaux exemples de problèmes unilatéraux. Journal of the Faculty of Science, Univ. of Tokyo, Vol. dédié au Prof. Yosida, à paraître.

[14] J.L. LIONS et E. MAGENES. Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1, Paris, Dunod, 1968.

[15] J.L. LIONS et G. STAMPACCHIA. Variational inequalities. Comm. Pure Applied Math. XX (1967), 493-519.

[16] C.J. MINTY. On a monotonicity method for the solution of non linear equations in Banach spaces. Proc. Nat. Acad. Sc. 50 (1963), 1038-1041.

[17] L. NIRENBERG. Remarks on strongly elliptic partial differential equations. Comm. Pure Applied Math. 8 (1955), 648-674.

[18] G. STAMPACCHIA. Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes. C.R. Acad. Sc. Paris, 258 (1964), 4413-4416.