Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Giuseppe Da Prato

Problèmes au bord de type mixte pour des équations paraboliques ou hyperboliques

Séminaire Jean Leray (1967-1968), p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1967-1968____1_0>

PROBLÈMES AU BORD DE TYPE MIXTE
POUR DES ÉQUATIONS PARABOLIQUES OU HYPERBOLIQUES

par Giuseppe DA PRATO

Introduction.

Dans cet exposé on va étudier certaines équations différentielles hyperboliques et paraboliques en utilisant la théorie des semi-groupes.

Lions [13] a étudié le problème mixte relatif à l'équation des ondes dans L^2 en utilisant le théorème de Hille-Yosida sur les semi-groupes de classe C_o [18] et Mizohata a généralisé ces résultats aux équations hyperboliques strictes dans L^2 [16].

Néanmoins il y a des problèmes que l'on ne peut étudier par le moyen des semi-groupes de classe C_o, par exemple les problèmes mixtes relatifs aux équations de Schrödinger et des ondes dans L^p $(p \neq 2)$ ou à des équations d'évolution d'ordre supérieur par rapport au temps [15], [2], [8].

Dans les deux premiers chapitres on va étudier deux types de semi-groupes généralisés, les semi-groupes de croissance n [4] et les R-semi-groupes [5], [7].

Dans le troisième chapitre on montrera qu'un grand nombre de semi-groupes relatifs aux équations différentielles paraboliques et hyperboliques sont d'un de ces types et on donnera quelques applications.

On utilisera les notations suivantes :

X est un espace de Banach complexe (norme $\| \ \|$), $\mathcal{L}(X,X)$ est l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires continus sur X munie de la norme usuelle. Si L est un opérateur linéaire dans X, D_L est le domaine de L, $\rho(L)$ et $\sigma(L)$ sont respectivement l'ensemble résolvant et le spectre de L et si $\lambda \in \rho(L)$, $R(\lambda,L)$ est le résolvant de L [11]. Si $n \in N$, L^n est la puissance $n^{\text{ème}}$ de L do domaine :

$$D_{L^n} = \{x \in X \ ; \ x \in D_L \ , \ Lx \in D_L \ , \dots , \ L^{n-1}x \in D_L\}$$

on pose enfin

$$D_{L^\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_{L^n} \ .$$

Chapitre I

SEMI-GROUPES DE CROISSANCE n

1. Définitions.

DÉFINITION [I.1]. Un semi-groupe de croissance n, n entier non négatif, dans l'espace de Banach X est une application fortement continue G de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{L}(X,X)$ telle que :

a) $G(t+s) = G(t)G(s)$, $\forall\ t,s \in \mathbb{R}_+$.

b) $\|t^n G(t)\|$ est borné dans $]0,1]$.

c) Si $x \in X$ et $G(t)x = 0$, $\forall\ t \in \mathbb{R}_+$ alors $x = 0$.

d) Le sous-espace vectoriel engendré par

$$\bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \{y \in X\ ;\ y = G(t)x,\ x \in X\}$$

est dense dans X.

Un semi-groupe de croissance o est un semi-groupe de classe C_0 et vice-versa. Dans la suite du paragraphe, G est un semi-groupe de croissance n sur X.

DÉFINITION [I.2]. Le générateur infinitésimal A de G est l'opérateur linéaire dans X défini par :

$$Ax = \lim_{h \to 0} \frac{G(h)x - x}{h}, \quad x \in X \tag{I.1}$$

pour tout x tel que la limite existe.

On démontre [4] les propriétés suivantes :

a) D_A est dense dans X et A est fermable.

b) Si $x \in D_A$ alors on a

$$\lim_{t \to 0} G(t)x = x, \tag{I.2}$$

$$\frac{dG(t)x}{dt} = AG(t)x = G(t)Ax, \quad \forall\ x \in \overline{\mathbb{R}}_+ \tag{I.3}$$

c) G est à croissance exponentielle à l'infini ; à savoir il existe $M \in \mathbb{R}_+$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\|t^n G(t)\| \leq M e^{\omega t}. \tag{I.4}$$

Remarquons que l'inégalité (I.4) entraîne l'existence de la transformée de Laplace de $t^n G(t)$.

2. Spectre d'ordre n.

B est un opérateur linéaire fermable dans X.

DÉFINITION [I.3]. B est de type n, $n\in\mathbb{N}$, s'il existe une fonction analytique $S(\lambda,B)$ définie sur un ouvert non vide $\rho_n(B)$ de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(X,X)$ telle que :

a) D_B est stable par rapport à $S(\lambda,B)$ pour tout $\lambda\in\rho_n(B)$ et si $x\in D_B$ on a :

$$BS(\lambda,B)x = S(\lambda,B)Bx \tag{I.5}$$

b) Si $x\in D_{B^{n+1}}$ on a :

$$S(\lambda,B)(\lambda-B)^{n+1}x = (\lambda-B)^{n+1}S(\lambda,B)x = x . \tag{I.6}$$

c) Si $x\in X$, $\lambda\in\rho_n(B)$ et $S(\lambda,B)x = 0$ alors $x = 0$.

On supposera $S(\lambda,B)$ maximal, à savoir qu'il n'existe pas d'extension propre de $S(\lambda,B)$ satisfaisant à a), b) et c) ; on dira alors que $S(\lambda,B)$ est le résolvant d'ordre n de B, que $\rho_n(B)$ est l'ensemble résolvant d'ordre n de B et que $\sigma_n(B)$ est le spectre d'ordre n de B.

Si B est fermé et de type o, alors on a :

$$S(\lambda,B) = R(\lambda,B) , \quad \sigma_o(B) = \sigma(B) \quad \text{et} \quad \rho_o(B) = \rho(B) .$$

Remarquons que si B est de type n, $n\in\mathbb{N}$, et non de type $n-1$ et $\lambda\in\rho_n(B)$ alors $S(\lambda,B)x$ n'appartient pas à D_B pour tout $x\in X$ (autrement $(\lambda-B)\,S(\lambda,B)$ appartiendrait à $\mathcal{L}(X,X)$ et B serait de type $n-1$).

Observons finalement que si B est de type n, alors il est aussi de type $n+k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ et $\rho_{n+k}(B) \supset \rho_n(B)$.

Le contraire est faux ; par exemple, il peut arriver que $\sigma_o(B) = \mathbb{C}$ et $\sigma_1(B) \neq \mathbb{C}$ (Chap. III § 5).

3. Le théorème de caractérisation.

Le théorème suivant donne une caractérisation de la transformée de Laplace de $t^nG(t)$, G semi-groupe de croissance n.

THÉORÈME [I.1]. Si G est un semi-groupe de croissance n, alors son générateur infinitésimal A est de type n, $\sigma_n(A)$ est contenu dans un demi-plan $\mathrm{Re}\lambda < \omega$ et le résolvant d'ordre n de A $S(\lambda,A)$ est égal à la transformée de Laplace de G.

$$S(\lambda,A)x = \frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, t^nG(t)x\,dt, \quad \forall\ x\in X, \quad \mathrm{Re}\lambda > \omega . \tag{I.7}$$

De plus, $S(\lambda,A)$ vérifie les majorations suivantes :

$$\left\|\frac{d^kS(\lambda,A)}{d\lambda^k}\right\| \leq \frac{Mk!}{n!(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^{k+1}} , \qquad \mathrm{Re}\lambda > \omega , \quad k\in\mathbb{N} . \tag{I.8}$$

Vice-versa si B est un opérateur linéaire fermable de type n, tel que son

<u>résolvant d'ordre</u> n <u>vérifie</u> (I.8), <u>alors il existe un semi-groupe de croissance</u> n G <u>unique tel que, si on appelle</u> A <u>son générateur infinitésimal et</u> $S(\lambda,A)$ <u>le résolvant d'ordre</u> n <u>de</u> A, <u>on a</u> $S(\lambda,A) = S(\lambda,B)$.

DÉMONSTRATION. On donne seulement le principe de la démonstration, les particularités sont contenues dans [4].

La partie directe du théorème est une simple conséquence de l'inégalité (I.4). Pour démontrer la réciproque définissons d'abord les opérateurs approchants B_i :

$$B_i = \frac{1}{n+1}\left(i^{n+2}S(i,B) - i\right) \quad , \quad i\in\mathbb{N} \quad .$$

Si $n = 0$, les B_i sont les opérateurs définis par Yosida [17].

Observons que $B_i x$ tend vers Bx pour tout $x\in D_{B^\infty}$.

Définissons successivement les semi-groupes approchants G_i :

$$G_i(t) = e^{B_i t} \quad , \quad i\in\mathbb{N}, \quad t\in\mathbb{R}_+ \quad .$$

Du développement

$$G_i(t) = e^{-\frac{it}{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{nk+2k}\, t^k}{k!(n+1)^k} S^k(i,B)$$

et des inégalités (I.8) il s'ensuit :

$$\|G_i(t)\| \leq 1 + \frac{N}{t^n} \quad , \quad t\in\mathbb{R}_+ \quad .$$

En vertu de cette inégalité et du théorème de Banach-Steinhaus, il suffit de démontrer la convergence de la suite $\{G_i(t)x\}$ pour tout $x\in D_{B^\infty}$. Pour cela il suffit de faire dans l'identité :

$$e^\alpha - e^\beta = \{e^{(\alpha+\beta)/2} \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-(-1)^k)}{2^k k!}(\alpha-\beta)^k + \frac{(\alpha-\beta)^n}{n!} \int_0^{\frac{1}{2}} s^n\{(-1)^n e^{\alpha s} e^{\beta(1-s)} + e^{\beta s}e^{\alpha(1-s)}\}ds(\alpha-\beta) \quad , \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

la substitution $\alpha = B_i t$, $\beta = B_j t$, $i,j\in\mathbb{N}$ et l'appliquer à un élément $x\in D_{B^\infty}$.

Il s'ensuit alors que $\{G_i(t)\}$ converge fortement vers un opérateur borné $G(t)$ et on peut vérifier facilement que $G : t \to G(t)$ est un semi-groupe de croissance n dont la transformée de Laplace est égale à $S(\lambda,B)$.

<u>Remarque</u>. En général, si A est le générateur infinitésimal de G, nous n'avons pas l'égalité $A = B$.

4. Semi-groupes de croissance n analytiques.

DÉFINITION [I. 4]. Nous dirons qu'un semi-groupe de croissance n G est analytique si G est prolongeable dans un secteur S

$$S_\theta = \{\lambda\in\mathbb{C} \ ; \ |\arg\lambda| < \theta \ , \ \lambda \neq 0\}, \quad 0 < \theta \leq \pi/2,$$

à une fonction $z \to G(z)$ telle que :

$$\|z^n G(z)\| \leq K e^{\omega \mathrm{Re}\, z} \ , \quad \forall \ z\in S_\theta \ ,$$

où $K\in\mathbb{R}_+$ et $\omega\in\mathbb{R}$.

Le théorème suivant donne une caractérisation des semi-groupes de croissance n analytiques.

THÉORÈME [I. 2]. Si G est un semi-groupe de croissance n analytique, alors son générateur infinitésimal A est de type n, $\rho_n(A)$ est contenu dans un secteur $\omega+S_\theta$, $\omega\in\mathbb{R}$, $\pi/2 < \theta < \pi$ et la norme du résolvant d'ordre n de A $S(\lambda,A)$ vérifie l'inégalité suivante :

$$\|S(\lambda,A)\| \leq M/|\lambda-\omega| \ , \ \forall \ \lambda\in S_\theta+\omega \ . \tag{I.9}$$

Vice-versa si B est un opérateur linéaire fermable de type n, tel que son résolvant d'ordre n vérifie (I.9), alors il existe un semi-groupe de croissance n analytique G unique tel que, si on appelle A son générateur infinitésimal et $S(\lambda,A)$ le résolvant d'ordre n de A, on a $S(\lambda,A) = S(\lambda,B)$.

DÉMONSTRATION. La partie directe est une conséquence de l'identité

$$S(\lambda,A)x = \frac{1}{n!}\int_{I\varphi} e^{-\lambda z}\, z^n G(z)dz \ ,$$

où

$$I\varphi = \{\lambda\in\mathbb{C} \ ; \ \lambda = \tau e^{i\varphi}, \ z\in\overline{\mathbb{R}}_+\} \ , \ 0 \leq \varphi < \theta \ .$$

La partie inverse est une conséquence de l'expression suivante de la transformation inverse de Laplace [4].

$$t^n G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}\, S(\lambda,B)d\lambda \ ,$$

où

$$\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \qquad \text{et} \qquad \Gamma_\pm = \{\lambda\in\mathbb{C} \ : \ \lambda = \tau e^{\pm i(\pi/2+\theta)}, \ 0 \leq \tau < +\infty\} \ .$$

Exemple. Si B est générateur infinitésimal d'un semi-groupe distribution analytique [14], [3], il existe un polynôme p de degré n et un secteur S_θ tels que :

$$\|R(\lambda,B)\| \leq \text{polyn}\ (|\lambda|) \ , \qquad \forall \ \lambda\in S_\theta$$

on démontre alors, que le résolvant d'ordre $n+1$ de B vérifie la majoration (I.9) [4].

5. Problème de Cauchy.

On démontre [4] le théorème :

THÉORÈME [I.3]. Soit B un opérateur linéaire fermé dans X satisfaisant aux hypothèses du Théorème [I.1] et soit G le semi-groupe de croissance n associé.

Alors le problème de Cauchy :

$$\frac{du}{dt} = Bu + f(t) \quad , \quad u(0) = u_o \ ,$$

où $u_o \in D_{B^{n+1}}$, $f(t)$ est tel que $f(t) \in D_{B^{n+1}}$ et $B^{n+1} f(t)$ est continue, admet une solution unique u une fois différentiable à valeurs dans X . La solution $u(t)$ se représente par :

$$u(t) = G(t)u_o + \int_0^t G(t-s)f(s)ds \ .$$

Si en plus G est analytique et $f = 0$, alors $u(t)$ est analytique dans $\mathbb{R}_+$ et $u(t) \in D_{B^\infty}$, $\forall\ t \in \mathbb{R}_+$.

Chapitre II

R-SEMI-GROUPES

1. Définitions.

DÉFINITION [II.1]. Un R-semi-groupe dans X est une application fortement continue H de $\bar{\mathbb{R}}_+$ dans $\mathcal{L}(X,X)$ telle que :

a) $H(t)H(s) = H(s)H(t) = H(t+s)H(0)$, $\forall\ t,s\in\bar{\mathbb{R}}_+$

b) $H(0)$ est injectif et $H^n(0)(X)$ est dense dans X $\forall\ n\in\mathbb{N}$. Si de plus il existe deux nombres M et ω tels que

$$\|H(t)\| \leqq Me^{\omega t}, \quad \forall\ t\in\mathbb{R}_+ \tag{II.1}$$

alors nous dirons que G est de croissance exponentielle.

Si $H(0)(X) = X$, alors $G(t) = H(t)H^{-1}(0)$ est un semi-groupe de classe C_0. Si G est un semi-groupe de croissance n, A son générateur infinitésimal et $S(\lambda,A)$ le résolvant d'ordre n de A, alors $H(t) = S(\lambda_0,A)G(t)$ est un R-semi-groupe pour tout $\lambda_0\in\rho_n(A)$.

Soit $\mathcal{G}$ un semi-groupe distribution régulier exponentiel [14], U son générateur infinitésimal, p un polynôme de degré n et $\omega\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\|R(\lambda,U)\| \leqq p(|\lambda|), \quad \forall\ \mathrm{Re}\lambda \geqq \omega .$$

Alors on démontre [5] que $H(t) = \mathcal{G}(\delta_t)R^{n+2}(\lambda_0,U)$, $\mathrm{Re}\ \lambda_0 \geqq \omega$ (δ_t masse de Dirac concentrée en t) est un R-semi-groupe.

DÉFINITION [II.2]. Soit D_0 le sous-ensemble des éléments x de X tels que $H(t)x$ soit dérivable pour $t = 0$, alors le générateur infinitésimal A de H est l'opérateur

$$Ax = H^{-1}(0)H'(0)x, \quad \forall\ x\in D_A$$

où

$$D_A = \{x\in D_0, H'(0)x\in H(0)(X)\} .$$

On démontre [5] que A est fermable.

2. Spectre modulo un opérateur.

U est un opérateur linéaire dans X de domaine D_U dense dans X et B un opérateur continu dans X injectif et tel que $B^n(D_{U^\infty})$ soit dense dans X, $\forall\ n\in\mathbb{N}$. Supposons en plus que si $x\in D_U$, alors $Bx\in D_U$ et $UBx = BUx$.

DÉFINITION [II.3]. On dira qu'un élément $\lambda_0\in\mathbb{C}$ est régulier pour U (mod. B) s'il existe une fonction $\lambda \to R_B(\lambda,U)$, analytique dans un voisinage $V(\lambda_0)$ de λ_0 telle que :

a) Si $x \in X$ et $\lambda \in V(\lambda_\circ)$ on a

$$R_B(\lambda,U)Bx = BR_B(\lambda,U)x ,$$

b) Si $x \in X$ et $\lambda \in V(\lambda_\circ)$ alors $R_B(\lambda,U)x \in D_U$ et on a

$$R_B(\lambda,U)(\lambda-U)x = Bx .$$

On appellera ensemble résolvant $\rho_B(U)$ de U (mod. B) l'ensemble des éléments réguliers pour U (mod. B), spectre $\sigma_B(U)$ de U (mod. B) le complémentaire de $\rho_B(U)$ dans C .

Finalement on dira que la fonction analytique sur $\rho_B(U)$, $R_B(\lambda,U)$ est le résolvant de U (mod. B).

Si $B = I$, alors on a $R_B(\lambda,U) = R(\lambda,U)$, $\rho_B(U) = \rho(U)$, $\sigma_B(U) = \sigma(U)$.

On démontre [5] l'identité suivante :

$$BR_B(\lambda,U) - BR_B(\mu,U) = (\mu-\lambda)R_B(\lambda,U)R_B(\mu,U) , \quad \forall\ \lambda,\mu \in \rho_B(U)$$

qui généralise l'identité du résolvant.

3. Le théorème de caractérisation.

Le théorème suivant donne une caractérisation de la transformée de Laplace d'un R-semi-groupe :

THÉORÈME [II.1]. Si H est un R-semi-groupe de croissance exponentielle, alors $\sigma_{H(0)}(A)$ est contenu dans un demi-plan $\mathrm{Re}\lambda < \omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, et le résolvant (mod. $H(0)$) de A est égal à la transformée de Laplace de $H(t)$:

$$R_{H(0)}(\lambda,A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} H(t)x\,dt , \quad \forall\ x \in X .$$

De plus $R_{H(0)}(\lambda,A)$ vérifie les majorations suivantes :

$$\left\| \frac{d^k R_{H(0)}(\lambda,A)}{d\lambda^k} \right\| \leq \frac{Mk!}{(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^{k+1}} , \quad \mathrm{Re}\lambda > \omega , \quad k \in \mathbb{N} . \tag{II.2}$$

Vice-versa si U est un opérateur linéaire fermable dans X et B un opérateur linéaire continu dans X tels que $\sigma_B(U)$ soit contenu dans un demi-plan $\mathrm{Re}\lambda \leqq \omega$ et que $R_B(\lambda,U)$ vérifie les majorations (II.2), alors il existe un R-semi-groupe exponentiel H unique tel que $H(0) = B$ et que, si A est son générateur infinitésimal, on a $R_B(\lambda,U) = R_B(\lambda,A)$.

DÉMONSTRATION. On donne seulement le principe de la démonstration, les détails sont contenus dans [5]. La partie directe du théorème est une conséquence de (II.1); pour démontrer la réciproque on définit les R-semi-groupes approchants $H_n(t)$:

$$H_n(t) = e^{-nt}(B + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(n^2 t)^{k+1}}{k!(k+1)!} R_B^{(k)}(n,B), \quad n\in\mathbb{N} \tag{II.3}$$

formellement on a $H_n(t) = B\, e^{(n^2R(n,A)-n)t}$ (cette expression n'a pas de sens parce que $R(n,A)$ n'existe pas en général).

En utilisant les majorations (II.2) on démontre que la série dans (II.3) est uniformément convergente et que l'on a :

$$\|H_n(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall\, n\in \mathbb{N}\,. \tag{II.4}$$

On démontre ensuite l'identité

$$(H_n(t) - H_m(t))B^2 = t((n^2R_B(n,U) - nB) - (m^2R_B(m,U) - mB)) \int_0^1 H_n(ts)H_m(t-ts)ds \tag{II.5}$$

d'où on déduit que la suite $\{H_n(t)x\}$ est convergente pour tout $x\in B^2(D_U)$ (qui est dense dans X par hypothèse).

Alors en vertu de l'inégalité (II.4) et du théorème de Banach-Steinhaus, il s'ensuit que $\{H_n(t)\}$ converge fortement vers un R-semi-groupe $H(t)$. Si $F_n(\lambda)$ est la transformée de Laplace de $H_n(t)$, on a l'identité :

$$F_n(\lambda) = \frac{B}{\lambda+n} + \frac{B}{(\lambda+n)^2} R_B\left(\frac{\lambda n}{\lambda+n}, U\right),$$

d'où on déduit que $\{F_n(\lambda)\}$ (qui converge vers la transformée de Laplace de $H(t)$) converge vers $R_B(\lambda,U)$.

4. R-semi-groupes analytiques.

DÉFINITION [II.4]. *On dira qu'un R-semi-groupe H est analytique si H est prolongeable analytiquement dans un secteur*

$$S_\theta = \{\lambda\in C\ ;\ |\arg\lambda| < \theta,\ \lambda \neq 0\},\ 0 < \theta \leq \pi/2$$

en une fonction $z \to G(z)$ *telle que* :

$$\|z^nH(z)\| \leq Ke^{\omega \mathrm{Re}\, z}, \qquad \forall\, z\in S_\theta$$

où $K\in\mathbb{R}_+$ *et* $\omega\in\mathbb{R}$.

Le théorème suivant [6] donne une caractérisation des R-semi-groupes analytiques.

THÉORÈME [II.2]. *Si* H *est un* R-*semi-groupe analytique sur* X *de générateur infinitésimal* A, *alors* $\sigma_{H(0)}(A)$ *est contenu dans un secteur* $\omega+S_\theta$, $\omega\in\mathbb{R}$, $\pi/2 < \theta < \pi$ *et la norme du résolvant* (mod. $H(0)$) *vérifie l'inégalité suivante* :

(II.6) $$\|R_{H(0)}(\lambda,A)\| \leqq \frac{M}{|\lambda-\omega|}\,, \qquad \forall\ \lambda\in\omega+S_\theta\ .$$

Vice-versa si U est un opérateur linéaire fermable et B un opérateur linéaire continu dans X tels que $\rho_B(U)$ contienne le secteur $\omega+S_\theta$ et $R_B(\lambda,U)$ vérifie (II.6) alors il existe un R-semi-groupe analytique H unique tel que, si A est son générateur infinitésimal, on a $R_B(\lambda,U) = R_B(\lambda,A)$.

5. Problème de Cauchy.

On démontre [5] le théorème :

THÉORÈME [II.3]. Soit U un opérateur linéaire fermé et B un opérateur continu dans X satisfaisant aux hypothèses du Théorème [II.2'] et soit H le R-semi-groupe associé.

Alors le problème de Cauchy :

$$\frac{du}{dt} = Uu + f(t), \qquad u(0) = u_0,$$

où $u_0\in B(D_U)$, $f(t)$ est tel que $f(t)\in B(D_U)$ et $UB^{-1}f(t)$ est continue admet une solution unique u une fois continûment différentiable à valeurs dans X.

La solution $u(t)$ se représente par :

$$u(t) = H(t)B^{-1}u_0 + \int_0^t H(t-s)\,B^{-1}f(s)ds\ .$$

Si de plus G est analytique et $f = 0$ alors $u(\cdot t)\in D_{U^\infty}$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$.

Chapitre III

APPLICATIONS AUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

1. Notations.

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{E}(\Omega)$ est l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment différentiables dans Ω et $\mathcal{D}(\Omega)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}(\Omega)$ des fonctions à support compact dans Ω.

$L^p(\Omega)$, $p > 1$, est la complétion de $\mathcal{D}(\Omega)$ par rapport à la norme

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{1/p},$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ est un multi-indice à composantes entières non négatives, on pose

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i ,$$

et si $u\in\mathcal{D}(\Omega)$

$$D^\alpha u = \frac{1}{i} \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} , \qquad (x_1, x_2, \dots, x_n)\in\mathbb{R}^n .$$

$H^{k,p}(\Omega)$ (resp. $H_o^{k,p}(\Omega)$), $p > 1$, $k\in\mathbb{N}$ est la complétion de $\mathcal{E}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{D}(\Omega)$) par rapport à la norme :

$$\|u\|_{k,p} = \sum_{|\alpha|\leq K} \|D^\alpha u\|_p \quad .$$

2. Equations de Schrödinger et des ondes dans un ouvert borné.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^∞ et A un opérateur différentiel d'ordre $2m$:

$$\text{(III.1)} \qquad Au = - \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} D^\alpha(a_{\alpha\beta} D^\beta u) , \qquad u\in\mathcal{D}(\Omega)$$

à coefficients de classe C^∞ dans Ω.

On appelle $\mathcal{A}(u,v)$ la forme sesquilinéaire attachée à A :

$$\text{(III.2)} \qquad \mathcal{A}(u,v) = - \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} \int_\Omega a_{\alpha\beta} D^\beta u \overline{D^\alpha v} \, dx , \qquad u,v\in\mathcal{D}(\Omega)$$

et on suppose que :

$$\text{(III.3)} \qquad -\mathcal{A}(u,u) \geq \nu\|u\|_m^2 , \qquad \forall\ u\in\mathcal{D}(\Omega) .$$

On appelle encore A la réalisation de l'opérateur différentiel(III.1) sous les conditions de Dirichlet dans $L^p(\Omega)$, le domaine de A est :

$$D_A = H_o^{m,p}(\Omega) \cap H^{2m,p}(\Omega) .$$

On va maintenant étudier les problèmes mixtes relatifs respectivement à l'équation de Schrödinger et des ondes :

$$\text{(III.4)} \qquad \frac{du}{dt} = iAu \ , \qquad u(o) = u_o \ ,$$

$$\frac{d}{dt}\binom{u}{v} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}\binom{u}{v} = \mathcal{B}\binom{u}{v} \ , \quad v = \frac{du}{dt}$$

$$\text{(III.5)} \qquad u(0) = u_o \ ,$$

$$u'(0) = v_o \ .$$

Les identités :

$$R(\lambda, iA) = -iR(-i\lambda, A) \ , \qquad R(\lambda, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda & I \\ A & \lambda \end{pmatrix} R(\lambda^2, A) \ , \qquad \mathrm{Re}\lambda > 0$$

montrent que pour avoir des majorations pour $R(\lambda, iA)$ et $R(\lambda, \mathcal{B})$ dans le demi-plan $\mathrm{Re}\lambda > 0$ il faut connaître le comportement de $\|R(\lambda, A)\|$ dans $\mathbb{C}-\mathbb{R}_-$.

Pour $p = 2$ la majoration suivante est bien connue :

$$\text{(III.6)} \qquad \|R(\lambda, A)\|_2 \leqq \frac{1}{|\lambda| \cos \theta/2} \ , \qquad \lambda \in \mathbb{C}-\mathbb{R}_- \ , \ \theta = \arg \lambda$$

et pour $p > 1$ on démontre [2] que :

$$\text{(III.7)} \qquad \|R(\lambda, A)\|_p \leqq \frac{M(\theta)}{|\lambda|} \ , \qquad \lambda \in \mathbb{C}-\mathbb{R}_- \ , \quad \theta = \arg \lambda$$

où $M(\theta)$ est une fonction de θ qui n'est pas connue.

On démontre le lemme :

LEMME [III,1]. <u>Il existe un nombre positif</u> N <u>tel que</u> :

$$\text{(III.8)} \qquad \|R(\lambda, A)\|_p \leqq N \frac{(1+|\lambda|)^{\sigma(p)}}{|\lambda| \cos \theta/2} , \qquad \lambda \in \mathbb{C}-\mathbb{R}_- \ , \quad \theta = \arg \lambda$$

<u>où</u>

$$\sigma(p) \begin{cases} = n(p-2)/(4mp) & \underline{\text{si}} \quad p \leqq 2n/(n-4mk) \\ = (k+1)(1+\rho)(p-2)/p \quad (\rho > 0 \ \underline{\text{arbitraire}}) & \underline{\text{si}} \quad p > 2n/(n-4mk) \end{cases}$$

<u>et</u> k <u>est un entier tel que</u> $4\,mk \leqq n < 4m(k+1)$.

DÉMONSTRATION. On donne le principe de la démonstration, les détails sont contenus dans [6].

Soit $f \in L^p(\Omega)$ et u la solution du problème :

$$\lambda u - Au = f \ , \qquad u \in H_o^m(\Omega) \ .$$

Puisque $\lambda u - f \in L^p(\Omega)$ il s'ensuit que u est solution aussi du problème :

$$Au = \lambda - f \ , \qquad u \in H_o^m(\Omega)$$

et que l'on a

$$\|u\|_{2m,p} \leqq c\{|\lambda|\|u\|_p + \|f\|_p\}$$

ici et dans la suite c représente une constante convenable.

En vertu d'un théorème de Sobolev, si $p \leqq \frac{2n}{n-4m}$ (on suppose ici $n > 4m$) u appartient à $L^p(\Omega)$ et $\|u\|_p \leqq c\|u\|_{2m,2}$.

Avec ce choix de p, on obtient alors :

$$\|u\|_{2m,p} \leqq c\{|\lambda|\|u\|_{2m,2} + \|f\|_p\} \leqq c\{\|f\|_p + \frac{|\lambda|}{\cos\theta/2}\|f\|_2\}$$
$$\leqq c' \frac{(1+|\lambda|)}{\cos\theta/2}\|f\|_p \ .$$

Alors si $p = \frac{2n}{n-4m}$ on a démontré le lemme, par récurrence et en utilisant le théorème d'interpolation de Riesz, on prouve (III.8)pour tout p.

De ce lemme il s'ensuit que

$$\|R(\lambda, iA)\|_p \leqq c(1 + |\lambda|)^{\sigma(p)} \ , \qquad \mathrm{Re}\lambda > 0$$

et donc que iA est générateur infinitésimal d'un semi-groupe distribution, donc d'un R-semi-groupe.

Du théorème [II.3] on déduit alors [6] le

THÉORÈME [III.1]. Le problème mixte :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = iAu + f, \qquad u(0) = u_o$$

où

$$u_o \in H_o^{2m([\sigma(p)]+3),p}(\Omega) \ , \quad f(t) \in H_o^{2m([\sigma(p)]+3),p}(\Omega) \ , \quad \forall \ t \in \bar{R}_+$$

et $D^\alpha f(t)$ est continue pour tout α tel que $|\alpha| \leqq 2m([\sigma(p)]+3)$ admet une solution unique u une fois continûment différentiable à valeurs dans $L^p(\Omega)$.

Ici et dans la suite si $q \in R$, $[q]$ est le plus grand entier non supérieur à q.

Pour l'équation des ondes on se place sur l'espace somme directe :

$$X = H^{m,p}(\Omega) \oplus L^p(\Omega)$$

et on démontre [6] la majoration :

$$\text{(III.9)} \qquad \|R(\lambda,\mathcal{B})\| \leq N\frac{(1+|\lambda|^2)^{\sigma(p)}}{\mathrm{Re}\lambda}, \qquad \mathrm{Re}\lambda > 1 , \quad N > 0 .$$

Il s'ensuit alors le théorème :

THÉORÈME [III.2]. Posons

$$\chi(p) \begin{cases} = ([2\sigma(p)]+3)/2 & \underline{\text{si}} \quad \sigma(p) \quad \underline{\text{est impair}} \\ = ([2\sigma(p)]+4)/2 & \underline{\text{si}} \quad \sigma(p) \quad \underline{\text{est pair}} \end{cases}$$

alors le problème mixte :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Au + f ,$$

$$u(0) = u_0 , \quad u'(0) = v_0 ,$$

où

$$u_0 \in H_0^{3m\chi(p),p}(\Omega) , \qquad v_0 \in H_0^{2m\chi(p),p}(\Omega) , \qquad f(t) \in H_0^{2m\chi(p),)}(\Omega)$$

et $D^\alpha f(t)$ est continu pour tout α tel que $|\alpha| \leq 2m\chi(p)$, admet une solution unique u deux fois continûment différentiables à valeurs dans $L^p(\Omega)$.

Remarque. Les majorations (III.8), (III.9) ne sont pas les meilleures parce qu'elles ont été obtenues en utilisant le théorème d'immersion de Sobolev ; en conséquence les résultats des théorèmes [III.1] et [III.2] ne sont pas les meilleurs possibles.

3. Équations de Schrödinger et des ondes pour le laplacien itéré dans $\mathbb{R}^n$.

On pose $A = (-1)^{m-1}\Delta^m$, Δ étant le laplacien dans $\mathbb{R}^n$ et on va chercher des majorations pour la norme du résolvant plus précises que (III.8), (III.9).

La solution de l'équation

$$\lambda u - Au = f , \qquad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) , \qquad \lambda \in \mathbb{C}-\bar{\mathbb{R}}_- ,$$

est donnée par $u = F_\lambda * f$, où $*$ représente le produit de convolution et F_λ la solution fondamentale de $\lambda - A$:

$$F_\lambda(x) = (2\pi)^{-n}(-1)^{m-1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\xi x}}{|\xi|^{2m}+\lambda} d\xi , \qquad x \in \mathbb{R}^n .$$

On démontre [8] que si $\lambda \in \mathbb{C}-\bar{\mathbb{R}}_-$, alors $F_\lambda \in L^1(\mathbb{R}^n)$; en utilisant alors, de l'inégalité de Young , $\|u\|_1 \leq \|F_\lambda\|_1 \|f\|_1$ et

en évaluant exactement $\|F_\lambda\|_1$, on obtient alors [8] :

$$\text{(III.10)} \qquad \|R(\lambda,A)\|_1 \leq M/(|\lambda|(\cos\theta/2)^{(n+1)/2} , \qquad \theta = \arg\lambda , \ M > 0 .$$

En vertu de l'inégalité :

$$\|R(\lambda,A)\|_2 \leq 1/(|\lambda| \cos \theta/2),$$

et du théorème d'interpolation de Riesz on obtient alors :

$$\|R(\lambda,A)\|_p \leq M'/(|\lambda|(\cos \theta/2)^{\alpha(p)}) , \tag{III.11}$$

où $M' > 0$ et $\alpha(p)$ est donné par :

$$\alpha(p) \begin{cases} = \frac{n-1}{p} - \frac{n-3}{2}, & \text{si} \quad 1 < p < 2 \\ = \frac{p}{p-1}(n-1) - \frac{n-3}{2}, & \text{si} \quad p \geq 2 \end{cases}$$

et il s'ensuit :

$$\text{(III.12)} \begin{cases} \|R(\lambda,iA)\|_p \leq M|\lambda|^{\alpha(p)-1}/(\mathrm{Re}\lambda)^{\alpha(p)}, & \mathrm{Re}\lambda > 0 , \\ \|R(\lambda,\mathcal{B})\|_p \leq 2M|\lambda|^{\alpha(p)-1}/(\mathrm{Re}\lambda)^{\alpha(p)}, & \mathrm{Re}\lambda > 1 , \end{cases}$$

$\mathcal{B}$ étant l'opérateur matriciel $\begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$ sur l'espace $H^{m,p}(\mathbb{R}^n) \oplus L^p(\mathbb{R}^n)$. Du théorème [II.3]. on déduit alors [7] les théorèmes :

THÉORÈME [III.2]. Le problème de Cauchy :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{m-1} i\Delta^m u + f , \quad u(0) = u_0$$

où

$$u_0 \in H^{2m([\alpha(p)]+1),p}(\mathbb{R}^n), \qquad f(t) \in H^{2m([\alpha(p)]+1),p}(\mathbb{R}^n) , \qquad \forall\ t \in \bar{\mathbb{R}}_+ ,$$

et $D^\alpha f(t)$ est continue pour tout α tel que $|\alpha| \leq 2m([\alpha(p)]+1)$, admet une solution unique une fois continûment différentiable à valeurs dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

THÉORÈME [III.4]. Le problème de Cauchy :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (-1)^{m-1} \Delta^m u + f ,$$

$$u(0) = u_0 \qquad u'(0) = v_0 ,$$

où

$$u_0 \in H^{m([\alpha(o)]+2),p}(\mathbb{R}^n) , \quad v_0 \in H^{m([\alpha(p)]+1),p}(\mathbb{R}^n) , \quad f(t) \in H^{m([\alpha(p)]+1),p}, \ \forall\ t \in \bar{\mathbb{R}}_+$$

et $D^\alpha f(t)$ est continu pour tout α tel que $|\alpha| \leq m([\alpha(p)]+1)$, admet une solution unique u deux fois continûment différentiables à valeurs dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

4. Équations d'ordre supérieur.

Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, avec une frontière de classe C^∞, Γ est le cylindre dans $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Gamma = \{(x,t),\ x\in\Omega,\ t\in\mathbb{R}\} .$$

On va étudier un problème mixte attaché à l'équation :

$$\text{(III.13)} \qquad \sum_{k=0}^{\ell} A_{\ell-k} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} = 0 , \qquad \ell\in\mathbb{N}$$

u fonction définie sur Γ, $A_\circ$ constant non nul et A_k, $k = 1,\dots,\ell$ opérateurs différentiels à coefficients de classe C^∞ dans Ω d'ordre $d = 2mk/1$ $(m,\ell,d\in\mathbb{N}$, d pair, $d\ell = 2m$, $k = 1,2,\dots,\ell)$.

On se donne un système d'opérateurs différentiels sur $\Omega:\{B_j(x,D_x)\}_1^m$ à coefficients de classe C^∞ d'ordre respectif $b_j \leq 2m-1$, tels que $b_j \leq b_{j+1}$ $j = 1,\dots,m$; on appelle $H^{k,p}(\Omega\ ;\ \{B_j\}_1^r)$, $r \leq m$, la fermeture dans $H^{k,p}(\Omega)$ du sous-espace vectoriel de $H^{k,p}(\Omega)$:

$$\{u\in C^\infty(\bar\Omega)\ ;\ B_j u(x) = 0,\ \forall\ x\in\partial\Omega\ ,\quad j = 1,\dots,r\} .$$

On fait l'hypothèse suivante :

(A) Il existe un nombre réel θ tel que $\pi/2 < \theta < \pi$ et que $(\mathcal{A}_\varphi,\{B_j\}_1^m\ ,\ \Gamma)$ où

$$\text{(III.14)} \qquad \mathcal{A}_\varphi(x,D_x,D_t) = \sum_{k=0}^{\ell} e^{ik\varphi} A_{\ell-k} D_t^{kd}$$

est un problème elliptique régulier dans le sens de Agmon-Douglis-Nirenberg [1]..

On pose $u_k = \dfrac{\partial^k u}{\partial t^k}$, $k = 0,1,\dots,\ell-1$, l'équation (III.13) équivaut alors au système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_k}{\partial t} = u_{k+1}\ , & k = 0,\ \dots,\ell-2\ , \\ \dfrac{\partial u_{\ell-1}}{\partial t} = -\dfrac{1}{A_\circ} \displaystyle\sum_{k=0}^{\ell-1} A_{\ell-k}\, u_k\ , \end{cases}$$

qui peut s'écrire

$$Z'(t) = UZ$$

où

$$\begin{cases} Z = (u_o\ ,\ u\ \ ,\dots,u_{\ell-1}) \\ U(u_o,\dots,u_{\ell-1}) = (u_1\ ,u_2\ ,\dots,u_{\ell-2}, -1/A_o \displaystyle\sum_{k=0}^{\ell-1} A_{\ell-k}u_k) . \end{cases}$$

On pose finalement

$$\begin{cases} X = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{\ell} H^{2m-kd,p}(\Omega,\{B_j\}_1^{m}),\quad m_k \text{ plus grand entier tel que } b_{m_k} \leq 2m-kd \\ D_U = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{\ell} H^{2m-(k-1)d,p}(\Omega,\{B_j\}_1^{m}) . \end{cases}$$

On démontre [2] l'inégalité

(III.15) $$\|R(\lambda,U)\| \leq M|\lambda|^{\ell-2}, \qquad \forall\ \lambda\in S_{\pi/2+\theta}$$

il s'ensuit alors que U est générateur infinitésimal d'un semi-groupe de croissance n ; en utilisant le théorème [II.2] on obtient alors [6] :

THÉORÈME [III.5]. <u>Le problème mixte</u> :

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\ell} A_{\ell-k} \dfrac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k} = 0 , & t\in\mathbb{R}_+ , \quad x\in\Omega , \\ B_j u(t,x) = 0 , \quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+ , & x\in\partial\Omega , \quad j = 0,1,\dots,m \\ \left(\dfrac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k}\right)_{t=0} = f_k(x), & k = 0, \dots,\ell-1 , \quad x\in\Omega . \end{cases}$$

<u>où</u> $F = (f_0,f_1,\dots,f_{\ell-1})\in D_{U^\ell}$, <u>admet une solution unique</u> ℓ <u>fois continûment différentiable à valeurs dans</u> $L^p(\Omega)$.

<u>Remarque</u>. Grisvard [12] a étudié un problème analogue

$$\left(f_k = 0, \quad k = 0,\dots,\ell-1 , \quad \sum_{k=0}^{\ell} A_{\ell-k} \frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k} = f , \quad f\in L^p(\Gamma) \right)$$

par des méthodes différentes.

5. <u>Un système</u>.

On va donner un exemple de semi-groupe de croissance n tel que, si A est son générateur infinitésimal, on a $\sigma(A) = \mathbb{C}$.

On utilisera pour cela un système d'équations à dérivées partielles non elliptique dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Soit $X = L^p(\mathbb{R}^n) \oplus L^p(\mathbb{R}^n)$, $n\in\mathbb{N}$, et A l'opérateur matriciel sur X :

$$A = \begin{pmatrix} \Delta & \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)^m \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \Delta\right)^m & \Delta \end{pmatrix} , \quad m\in\mathbb{N} , \quad \Delta \text{ laplacien dans } \mathbb{R}^n ,$$

défini sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. A est fermable et on appelle encore A sa fermeture.

En utilisant l'inégalité de Young, on démontre que A est générateur infinitésimal d'un semi-groupe de croissance $m-1$ (et non de croissance $m-2$) analytique et tel que $\sigma_{m-1}(A) = \overline{\mathbb{R}}_-$.

En plus si $m > 2$, on a $\sigma(A) = \mathbb{C}$.

BIBLIOGRAPHIE

[I] S. AGMON-A. DOUGLIS-L. NIRENBERG. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959) 623-727.

[2] S. AGMON-L. NIRENBERG. Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space, Comm. Pure Appl. Math. XVI (1963) 121-234.

[3] G. DA PRATO-U. MOSCO. Semigruppi distribuzioni analitici, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, XIX (1965), 367-396.

[4] G. DA PRATO. Nouveau type de semi-groupe, C.R. Acad. Sc. Paris 262 (1966), 996-998.
Semigruppi di crescenza n , Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, XX (1966), 753 + 782.

[5] G. DA PRATO. Semigruppi regolarizzabili, Ricerche di Matematica, XV (1966), 223-248.

[6] G. DA PRATO-E. GIUSTI. Equazioni di evoluzione in L^p, Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa, XXI (1967), 485-505.

[7] G. DA PRATO. R-semigruppi analitici ed equazioni di evoluzione in L^p , Ricerche di Matematica, XVI (1967), 233-249.

[8] G. DA PRATO-E. GIUSTI. Equazioni di Schrödinger e delle onde per l'operatore di Laplace iterato in $L^p(R^n)$, Ann. di Matematica, LXXVI (1967), 377-398.

[9] D. FUJIWARA. A characterisation of exponential distributions semi-groups. Journ. Math. Soc. Japan 18 (1965), 267-274.

[10] D. FUJIWARA. Some remarks on holomorphic distribution semi-groups (preprint).

[11] E. HILLE-R.S. PHILLIPS, Functional analysis and semi-groups, Colloq. Publ. Amer. Math. Soc. 31 (1957).

[12] P. GRISVARD. Equations opérationnelles abstraites dans les espaces de Banach et problèmes aux limites dans des ouverts cylindriques, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, XXI (1967).

[13] J.L. LIONS. Les semi-groupes distributions, Portugaliae Math. 19 (1960), 141-164.

[14] J.L. LIONS. Une remarque sur les applications du théorème de Hille-Yosida, J. Math. Soc. Japan, 9 (1957), 62-70.

[15] W. LITTMAN. The wave operator and L^p norms, J. Math. and Mech., 19 (1960) 55-68.

[16] S. MIZOHATA. Quelques problèmes au bord, du type mixte, pour des équations hyperboliques. Séminaire sur les équations aux dérivées partielles I, Collège de France (1966-67), 23-60.

[17] K. YOSIDA. On the differentiability and the representation of one parameter semi-groups of linear operators, J. Math. Soc. Japan, 1 (1948).

[18] K. YOSIDA. Functional Analysis, Springer-Verlag, (1965).