

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

J. LERAY

J. L. LIONS

**Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non
linéaires par les méthodes de Minty-Browder**

Séminaire Jean Leray, n° 1 (1964), p. 1-19

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964__1_1_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES RÉSULTATS DE VISIK SUR LES PROBLÈMES ELLIPTIQUES NON LINÉAIRES
PAR LES MÉTHODES DE MINTY-BROWDER

par

J. LERAY et J.L. LIONS

Dans des notes aux Doklady de 1961 puis dans un travail récent détaillé, Visik [3] a donné une méthode générale de résolution pour certains problèmes elliptiques non linéaires [Cf. hypothèses du § 2]. M. Visik montre l'existence d'une solution de certains problèmes aux limites

1°) en construisant une solution approchée en dimension finie ;

2°) en passant à la limite par utilisation d'inégalités a priori et de résultats de compacité.

D'un autre côté, Minty [2] a observé - et appliqué à des équations intégrales - que des hypothèses de monotonie convenables permettent d'éviter les résultats de compacité ; Browder [1] a ensuite observé que les idées de Minty pouvaient s'appliquer aux équations elliptiques considérées par Visik et a développé cette idée dans une série de travaux, sans arriver, semble-t-il, à un énoncé contenant tous ceux de Visik.

L'obtention d'un tel énoncé est l'objet de cet exposé ; le paragraphe 1 donne un résultat "abstrait" général, le paragraphe 2 des exemples.

Notons que, de toutes façons, les résultats donnés ici ne dispensent nullement de la lecture du travail de Visik, notamment en ce que, avec des hypothèses supplémentaires sur les coefficients, M. Visik obtient des informations supplémentaires sur la régularité de la solution.

M. L. Schwartz (qui nous a suggéré de remplacer dans (1.1) $\text{Re}(A(v),v)$ par $(A(v),v)$) nous a communiqué une démonstration d'un résultat moins général que le Th. 1 mais sans hypothèse de séparabilité sur V . Des résultats de ce type, avec des démonstrations différentes se trouvent également dans Minty.

§ 1. Résultats généraux

1. Soit V un espace de Banach séparable et réflexif, sur $\underline{\mathbb{R}}$ ou $\underline{\mathbb{C}}$; soit $(^1)$ V' son dual (ou anti-dual). Soit $\| \cdot \|$ (resp. $\| \cdot \|_*$) la norme dans V (resp. V'); si $v \in V, v' \in V', (v',v)$ désigne la valeur de v' en v .

Une application, en général non linéaire, d'un Banach X dans un Banach Y est dite bornée si elle transforme ensembles bornés de X en ensembles bornés de Y .

Le but du § est de montrer le

THÉORÈME 1. Soit $v \rightarrow A(v)$ un opérateur borné de $V \rightarrow V'$, continu de tout sous-espace de V de dimension finie dans V' faible. On suppose que A est coercitif au sens suivant :

$$(1.1) \quad \lim_{\|v\| \rightarrow \infty} \frac{(A(v),v)}{\|v\|} = \infty .$$

Alors, si l'une des hypothèses I, II ci-après a lieu, A est surjectif.

Hypothèse I.

$A(v)$ est monotone i.e. $\text{Re}(A(u) - A(v), u-v) > 0 \quad \forall u,v \in V .$

Hypothèse II.

Il existe une application bornée : $u,v \rightarrow A(u,v)$ de $V \times V \rightarrow V'$ telle que $A(u,u) = A(u) \quad \forall u \in V$, vérifiant les conditions :

1) Le dual d'un Banach séparable est séparable : V' sera donc séparable.

(i) (Continuité et monotonie en v) : $\forall u \in V, v \rightarrow A(u,v)$ est continue de toute droite de V dans V' faible, et

$$\operatorname{Re}(A(u,u) - A(u,v), u-v) \geq 0 \quad \forall u, v \in V ;$$

(ii) (continuité de $A(u,v)$ en u) : Soit u_μ une suite telle que $u_\mu \rightarrow u$ dans V faible et $(A(u_\mu, u_\mu) - A(u_\mu, u), u_\mu - u) \rightarrow 0$; alors $\forall v \in V, A(u_\mu, v) \rightarrow A(u, v)$ dans V' faible.

(iii) (continuité de $(A(u,v), u)$ en u) : Soit u_μ une suite telle que $u_\mu \rightarrow u$ dans V faible et $A(u_\mu, v) \rightarrow v'$ dans V' faible ; alors

$$(A(u_\mu, v), u_\mu) \rightarrow (v', u) .$$

2. Le cas où V est de dimension finie.

Lorsque V est de dimension finie, on montre le résultat en utilisant seulement (1.1). Par changement de norme (ne modifiant pas l'hypothèse) on se ramène au cas où $V = V' = \underline{\underline{\mathbb{R}^N}}$ (cas réel pour simplifier) ; soit B_K la boule $\|v\| \leq K$ de bord $S_K = \{v \mid \|v\| = K\}$. Grâce à (1.1), pour K quelconque, on peut choisir R assez grand pour que

$$(2.1) \quad (A(v), v) \geq KR \quad , \quad \forall v \in S_R \quad (\text{changer } A \text{ en } -A \text{ si nécessaire}) .$$

Alors pour $\theta \in]0, 1[$, et $v \in S_R$, on a :

$$\left| (\theta A(v) + (1 - \theta) \frac{K}{R} v, v) \right| \geq KR$$

donc

$$\left\| \theta A(v) + (1 - \theta) \frac{K}{R} v \right\| \geq K \quad \forall v \in S_R ,$$

et donc le degré topologique sur B_K de la restriction de $\theta A + (1 - \theta) \frac{K}{R} I$ à B_R ($I =$ identité sur V) est égal à 1, d'où le résultat.

Note. Si $V = \underline{\underline{\mathbb{C}^N}}$, on commence par déformer A , pour obtenir (2.1) : cf. Browder.

3. Solutions approchées u_m .

Soit $w_1 \dots w_m \dots$ une suite de V telle que, pour tout $m, w_1 \dots w_m$

soient linéairement indépendants et que, V_m désignant l'espace engendré par $w_1 \dots w_m$, $\bigcup_m V_m$ soit dense dans V .

On va vérifier :

$$(3.1) \quad \begin{cases} f \text{ étant donné dans } V', \text{ il existe } u_m \in V_m \text{ tel que} \\ (A(u_m), w) = (f, w) \quad \forall w \in V_m \end{cases}$$

En effet, si $\vartheta_1 \dots \vartheta_m \in V'$ avec $(\vartheta_i, w_j) = \delta_i^j$, définissons $P_m \in \mathcal{L}(V'; V')$ par

$$P_m v' = \sum_{j=1}^m (v', w_j) \vartheta_j .$$

Alors (3.1) équivaut à

$$B_m(u_m) = P_m b ,$$

où

$$B_m(v) = P_m(A(v)) .$$

Si V'_m est l'espace engendré par $\vartheta_1 \dots \vartheta_m$, B_m applique V_m dans V'_m ; comme $(B_m(v), v) = (A(v), v)$, la condition analogue à (1.1) est satisfaite; d'où (3.1)/appliquant 2.

4. Passage à la limite.

De (3.1) résulte que

$$|(A(u_m), u_m)| = |(f, u_m)| \leq \|f\|_* \|u_m\|$$

d'où, utilisant (1.1) (les c désignent des constantes diverses) :

$$\|u_m\| \leq c$$

Alors $\|A(u_m)\|_* \leq c$, et V étant réflexif, on peut extraire u_{μ} telle que

$$(4.1) \quad \begin{aligned} u_\mu &\rightarrow u \text{ dans } V \text{ faible,} \\ A(u_\mu) &\rightarrow \chi \text{ dans } V' \text{ faible.} \end{aligned}$$

Appliquant (3.1) pour $m = \mu$, on en déduit que $\chi = f$. Donc

$$(4.2) \quad A(u_\mu) \rightarrow f \text{ dans } V' \text{ faible.}$$

Comme $\|A(u_\mu, u)\|_* \leq c$, on peut supposer (par nouvelle extraction - mais on ne change pas les indices) que

$$(4.3) \quad A(u_\mu, u) \rightarrow u' \text{ dans } V' \text{ faible.}$$

Vérifions que

$$(4.4) \quad (A(u_\mu, u_\mu) - A(u_\mu, u), u_\mu - u) \rightarrow 0.$$

En effet

$$(A(u_\mu, u_\mu), u_\mu) = (f, u_\mu) \rightarrow (f, u)$$

et d'après (4.2) :

$$(A(u_\mu, u_\mu), u) \rightarrow (f, u) ;$$

d'après (iii)

$$(A(u_\mu, u), u_\mu) \rightarrow (u', u)$$

et enfin d'après (4.3),

$$(A(u_\mu, u), u) \rightarrow (u', u).$$

Tout ceci entraîne (4.4).

D'après (4.1) (4.4) et (ii)

$$(4.5) \quad A(u_\mu, v) \rightarrow A(u, v) \text{ dans } V' \text{ faible}$$

et

$$(4.6) \quad (A(u_\mu, v), u_\mu) \rightarrow (A(u, v), u) .$$

Mais alors on a :

$$(4.7) \quad X_\mu^v = (A(u_\mu, u_\mu) - A(u_\mu, v), u_\mu - v) \rightarrow (f - A(u, v), u - v) .$$

Mais d'après (i), $\operatorname{Re} X_{\mu}^V \geq 0$. Donc (4.7) donne :

$$(4.8) \quad \operatorname{Re}(f - A(u,v), u-v) \geq 0 \quad \forall v \in V .$$

Posant $v = u - \lambda w$, $\lambda > 0$, $w \in V$, il en résulte

$$\operatorname{Re}(f - A(u, u - \lambda w), w) \geq 0 \quad \forall w \in V \quad \text{et} \quad \lambda > 0 ;$$

faisant tendre λ vers 0, en utilisant (i), il vient

$$\operatorname{Re}(f - A(u), w) \geq 0 \quad \forall w \in V$$

donc

$$f = A(u)$$

ce qui démontre le théorème.

§ 2. Applications à un type d'équation aux dérivées partielles contenant l'équation d'Euler du calcul des variations.

1. Notations.

Ω = ouvert de $\underline{\mathbb{R}}^n$, borné ; les fonctions considérées sont à valeurs réelles

$$W_p^m(\Omega) = \{u \mid D^{\alpha} u \in L_p(\Omega), |\alpha| \leq m\}, \quad 1 < p < \infty ;$$

$$\|u\| = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p} ;$$

$\overset{\circ}{W}_p^m(\Omega)$ = adhérence dans $W_p^m(\Omega)$ du sous-espace des fonctions à support compact dans Ω ;

$$\overset{\circ}{W}_p^m(\Omega) \subset V \subset W_p^m(\Omega),$$

V fermé dans $W_p^m(\Omega)$, inclusions strictes ou non ;

V' , dual de V , n'est un espace de distributions sur Ω que si $V = \overset{\circ}{W}_p^m(\Omega)$.

Notons que V est séparable et réflexif.

On suppose que

(1.1) l'application identique est compacte de $V \rightarrow W_p^{m-1}(\Omega)$.

Cette hypothèse a par ex. toujours lieu si $V = W_p^m(\Omega)$ et elle a lieu si $V = W_p^m(\Omega)$, Ω ayant la propriété du cône.

Les fonctions A_α :

Soit N_1 (resp N_2) le nombre de dérivations D^β dans $\underline{\mathbb{R}}^n$ d'ordre $\leq m-1$ (resp. d'ordre = m) ; soit $A_\alpha(x, \eta, \xi)$ une famille de fonctions ($|\alpha| \leq m$) définies sur $\Omega \times \underline{\mathbb{R}}^{N_1} \times \underline{\mathbb{R}}^{N_2}$, à valeurs dans $\underline{\mathbb{R}}$; ces fonctions sont de Carathéodory i.e. :

pour presque tout $x \in \Omega$, $\eta, \xi \rightarrow A_\alpha(x, \eta, \xi)$ est continue sur $\underline{\mathbb{R}}^{N_1} \times \underline{\mathbb{R}}^{N_2}$;

pour tout $\eta, \xi \in \underline{\mathbb{R}}^{N_1} \times \underline{\mathbb{R}}^{N_2}$, $x \rightarrow A_\alpha(x, \eta, \xi)$ est mesurable.

On pose :

$$D^k u = \{ D^\beta u, |\beta| = k \} \quad ;$$

$$\delta u = \{ u, Du, \dots, D^{m-1} u \} \quad ;$$

$$A_\alpha(x, \delta u, D^m v) : x \rightarrow A_\alpha(x, \delta u(x), D^m v(x)).$$

On suppose que

$$(1.2) \begin{cases} \forall u \in W_p^m(\Omega), v \in W_p^m(\Omega), \text{ on a} \\ A_\alpha(x, \delta u, D^m v) \in L_{p'}(\Omega), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \end{cases}$$

D'après M.A. Krasnosel'skii [Topological methods in the theory of non linear integral equations ; Pergamon, 1964 ; traduction de l'édition russe de 1956] on peut donner la condition nécessaire et suffisante pour que (1.2) ait lieu.

Notons seulement ceci, de vérification facile : (1.2) a lieu si :

$$(1.3) \quad |A_{\alpha}(x, \eta, \xi)| \leq c[|\eta|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + k(x)], \quad k \in L_p(\Omega).$$

On peut améliorer (i.e. augmenter) l'exposant de $|\eta|$ dans (1.3) en utilisant les inégalités de Sobolev.

L'opérateur A.

Pour $u, w \in V$, on définit

$$(1.4) \quad a(u, w) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} A_{\alpha}(x, \delta u, D^m u) D^{\alpha} w \, dx$$

ce qui a un sens puisque $A_{\alpha}(x, \delta u, D^m u) \in L_p(\Omega)$ et $D^{\alpha} w \in L_p(\Omega)$. La forme $w \rightarrow a(u, w)$ est linéaire continue sur V , donc de la forme

$$(1.5) \quad a(u, w) = (A(u), w), \quad A(u) \in V'.$$

Le problème aux limites.

Pour f donné dans V' , on cherche u dans V satisfaisant à

$$(1.6) \quad A(u) = f$$

ou, ce qui revient au même

$$(1.6') \quad a(u, w) = (f, w) \quad \forall w \in V.$$

C'est un problème avec conditions aux limites de Dirichlet (resp. Neumann, resp. "mêlées") si $V = \overset{\circ}{W}_p^m(\Omega)$ (resp. $W_p^m(\Omega)$), resp. $\overset{\circ}{W}_p^m(\Omega) \subset V \subset W_p^m(\Omega)$ avec inclusions strictes).

2. Théorème 2.

On suppose que (1.1) et (1.3) ont lieu, ainsi que

$$(2.1) \quad \frac{|a(v, v)|}{\|v\|} \rightarrow \infty \quad \text{si} \quad \|v\| \rightarrow \infty ;$$

$$(2.2)_1 \left\{ \begin{array}{l} \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, \eta, \xi) \xi_\alpha / [|\xi| + |\xi|^{p-1}] \rightarrow \infty \text{ si } \eta \rightarrow \infty, \\ x \text{ fixé, p.p. dans } \Omega, \text{ et pour } |\eta| \text{ borné,} \end{array} \right.$$

$$(2.2)_2 \left\{ \begin{array}{l} \sum_{|\alpha|=m} [A_\alpha(x, \eta, \xi^*) - A_\alpha(x, \eta, \xi)] [\xi_\alpha^* - \xi_\alpha] > 0 \text{ si } \xi^* \neq \xi, \\ \text{p.p. dans } \Omega \end{array} \right.$$

Conclusion : il existe $u \in V$ solution du problème aux limites (1.6).

Remarques.

1) Il est facile de donner des conditions suffisantes pour que (2.1) ait lieu. Par exemple, l'hypothèse

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, \eta, \xi) \xi_\alpha \geq |\xi|^p \text{ pour } |\xi| > \text{constante,}$$

et les inégalités de Sobolev impliquent que (2.1) a lieu quand Ω est suffisamment petit et régulier et que $V = \overset{\circ}{W}^m_p(\Omega)$ (car alors

$$\|u\| \sim \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

2) On peut remplacer (sans changer la conclusion) (η, ξ) par ζ et (2.2) par

$$(2.3) \quad \sum_{|\alpha| \leq m} [A_\alpha(x, \zeta) - A_\alpha(x, \zeta^*)] [\zeta_\alpha - \zeta_\alpha^*] \geq 0;$$

on prendra alors $A(u, v) = A(v)$; ce cas est plus simple à établir que celui de l'énoncé du Théorème 2.

3. Lemmes.

LEMME 3.1. Si $u_\mu \rightarrow u$ dans $W_p^{m-1}(\Omega)$ fort et $v \in W_p^m(\Omega)$, on a

$$A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m v) \rightarrow A_\alpha(x, \delta u, D^m v)$$

dans L_p , fort. Cf. Krasnosel'skii, loc.cit. en 1.

LEMME 3.2. Soit $g \in L_q(\Omega)$, $g_\nu \in L_q(\Omega)$, $\|g_\nu\|_{L_q(\Omega)} \leq c$; $1 < q < \infty$; si $g_\nu \rightarrow g$ p.p., alors $g_\nu \rightarrow g$ dans $L_q(\Omega)$ faible.

Démonstration. Soit

$$E(N) = \left\{ x \mid x \in \Omega, |g_\nu(x) - g(x)| \leq 1 \quad \forall \nu \geq N \right\};$$

$E(N)$ croît avec N et $\text{mes}(E(N)) \rightarrow \text{mes } \Omega$; alors l'ensemble des fonctions $\varphi_N \in L_q(\Omega)$, nulles (p.p.) hors de $E(N)$, est lorsque $N \rightarrow \infty$, dense dans $L_q(\Omega)$. Or

$$\int_\Omega \varphi_N(x) [g_\nu(x) - g(x)] dx \rightarrow 0$$

lorsque $\nu \rightarrow \infty$ (φ_N fixée); d'où le résultat.

LEMME 3.3. Soit $u_\mu, u \in W_p^m(\Omega)$, $\|u_\mu\| \leq c$, $u_\mu \rightarrow u$ dans V faible. On pose :

$$F_\mu = F(x, \delta u_\mu, D^m u_\mu, D^m u) = \sum_{|\alpha|=m} [A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m u_\mu) - A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m u)] [D^\alpha u_\mu - D^\alpha u]$$

et l'on suppose que

$$\int_\Omega F(x, \delta u_\mu, D^m u_\mu, D^m u) dx \rightarrow 0$$

Alors

$$(3.1) \quad A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m u_\mu) \rightarrow A_\alpha(x, \delta u, D^m u) \text{ dans } L_p(\Omega) \text{ faible.}$$

Démonstration.

Grâce à (2.2)₂, $F_\mu \geq 0$; donc de toute sous-suite de $\{\mu\}$ on peut extraire une sous-suite $\{\nu\}$ telle que

$$(3.2) \quad \delta u_\nu(x) \rightarrow \delta u(x), F_\nu(x) \rightarrow 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega .$$

Fixons x non exceptionnel dans (3.2) et tel que $k(x) < \infty$ (k donné dans (1.3)) ; notons $\eta = \delta u(x)$, $\eta_\nu = \delta u_\nu(x)$, $\xi = D^m u(x)$ et ξ^* l'une quelconque des limites de $D^m u_\nu(x) = \xi_\nu$. Alors

$$F_\nu(x) \geq \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, \eta_\nu, \xi_\nu) \xi_{\nu\alpha} - c(|\xi_\nu|^{p-1} + |\xi_\nu| + 1)$$

et si l'on avait $|\xi^*| = \infty$, alors, vu (2.2)₁, on aurait $F_\nu(x) \rightarrow \infty$ contrairement à (3.2). Donc $|\xi^*| < \infty$.

Alors (3.2) et la continuité en η, ξ des A_α impliquent

$$\sum_{|\alpha|=m} [A_\alpha(x, \eta, \xi^*) - A_\alpha(x, \eta, \xi)] [\xi_\alpha^* - \xi_\alpha] = 0$$

donc, vu (2.2)₂,

$$\xi^* = \xi$$

Donc

$$A_\alpha(x, \delta u_\nu(x), D^m u_\nu(x)) \rightarrow A_\alpha(x, \delta u(x), D^m u(x)) \quad \text{p.p. dans } \Omega ,$$

et, vu le Lemme 3.2,

$$(3.3) \quad A_\alpha(x, \delta u_\nu, D^m u_\nu) \rightarrow A_\alpha(x, \delta u, D^m u) \quad \text{dans } L_p(\Omega) \text{ faible.}$$

Pour que de toute suite extraite de $\{\mu\}$ on puisse extraire une suite donnant lieu à (3.3) (donc avec une limite indépendante de la suite extraite), il faut que (3.1) ait lieu.

4. Démonstration du théorème 2.

Il est commode de poser

$$a_1(u, v, w) = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} A_{\alpha}(x, \delta u, D^m v) D^{\alpha} w \, dx ,$$

$$a_2(u, w) = \sum_{|\alpha| < m-1} \int_{\Omega} A_{\alpha}(x, \delta u, D^m u) D^{\alpha} w \, dx$$

Alors

$$a(u, v, w) = a_1(u, v, w) + a_2(u, w)$$

définit $A(u, v) \in V'$ par

$$a(u, v, w) = (A(u, v), w) .$$

Il est facile de voir que tous ces opérateurs sont bornés. L'hypothèse (2.1) est évidemment équivalente à (1.1) de sorte que pour montrer le théorème il suffit, en vertu du théorème 1, de vérifier que les hypothèses II, (i), (ii), (iii) ont lieu.

Vérification de (i).

On a :

$$(A(u, u) - A(u, v), u-v) = [a_1(u, u, u-v) - a_1(u, v, u-v)]$$

et ceci est ≥ 0 d'après (2.2) ; il reste à montrer que

$$a(u, v_1 + \lambda v_2, w) \rightarrow a(u, v, w) \text{ si } \lambda \rightarrow 0, \quad u, v_i, w \in V .$$

Cela résulte de ce que

$$A_{\alpha}(x, \delta^{m-1} u, D^m(v_1 + \lambda v_2)) \rightarrow A_{\alpha}(x, \delta^{m-1} u, D^m v_1)$$

dans $L_p(\Omega)$ faible (il y a même convergence dans L_p , fort !) ce qui suit par ex. du Lemme 3.2.

Vérification de (ii)

Soit u_μ une suite telle que $u_\mu \rightarrow u$ dans V faible et

$$(A(u_\mu, u_\mu) - A(u_\mu, u), u_\mu - u) \rightarrow 0.$$

Avec les notations du Lemme 3.3,

$$(A(u_\mu, u_\mu) - A(u_\mu, u), u_\mu - u) = \int_{\Omega} F_\mu \, dx$$

et donc, d'après le Lemme 3.3

$$A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m u) \rightarrow A_\alpha(x, \delta u, D^m u) \text{ dans } L_p(\Omega) \text{ faible,}$$

et, pour $|\alpha| = m$, $A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m v) \rightarrow A_\alpha(x, \delta u, D^m v)$ dans $L_p(\Omega)$ faible (et même fort). Donc

$$a(u_\mu, v, w) \rightarrow a(u, v, w) \quad \forall w \in V$$

donc $A(u_\mu, v) \rightarrow A(u, v)$ dans V' faible, c.q.f.d.

Vérification de (iii)

Soit $u_\mu \rightarrow u$ dans V faible, $A(u_\mu, v) \rightarrow v'$ dans V' faible. Alors (Lemme 3.1) $A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m v) \rightarrow A_\alpha(x, \delta u, D^m v)$ dans $L_p(\Omega)$ fort, donc

$$(4.1) \quad a_1(u_\mu, v, u_\mu) \rightarrow a_1(u, v, u).$$

Par ailleurs

$$|a_2(u_\mu, u_\mu - u)| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m-1} \|D^\alpha(u_\mu - u)\|_{L_p(\Omega)}$$

et donc, d'après (1.1), $a_2(u_\mu, u_\mu - u) \rightarrow 0$.

Grâce à (4.1),

$$a_2(u_\mu, u) = (A(u_\mu, v), u) - a_1(u_\mu, v, u) \rightarrow (v', u) - a_1(u, v, u),$$

donc

$$a_2(u_\mu, u_\mu) = a_2(u_\mu, u_\mu - u) + a_2(u_\mu, u) \rightarrow (v', u) - a_1(u, v, u).$$

Alors

$$(A(u_\mu, v), u_\mu) = a_1(u_\mu, v, u_\mu) + a_2(u_\mu, u_\mu) \rightarrow (V', u),$$

et (iii) suit.

5. Remarques.

1) Dans le cas où les coefficients $A_\alpha(x, \eta, \xi)$ ont une croissance plus rapide que polynomiale, il faut remplacer les espaces de Sobolev $W_p^m(\Omega)$ construits à partir de $L_p(\Omega)$ par des espaces analogues construits à partir d'espaces d'Orlicz sur Ω .

Noter aussi que les A_α n'ont pas tous forcément "même croissance" ; on peut donc être conduit à introduire au lieu de $W_p^m(\Omega)$ des espaces

$$W_{p_\alpha}^m(\Omega) = \{u \mid D^\alpha u \in L_{p_\alpha}(\Omega), |\alpha| \leq m, p_\alpha \text{ dépendant de } \alpha\};$$

remarque analogue encore en remplaçant $L_{p_\alpha}(\Omega)$ par un espace d'Orlicz dépendant de α . Pour tout cela, cf. Visik [4].

2) Si la frontière Γ de Ω est assez régulière, on peut également introduire dans (1.4) des intégrales de surface.

§ 3. Application au système de Navier-Stokes

(cas stationnaire : vitesse tangente aux parois)

Il s'agit du problème de Dirichlet, qui régit les écoulements visqueux stationnaires

$$\begin{cases} \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - u_k D_k u_i = f_i, \text{ div. } u = 0 & \text{dans } \Omega ; \\ u_i = \gamma_i \text{ (donné) sur } \partial\Omega \text{ (bord de } \Omega \text{)} ; \end{cases}$$

$i = 1, \dots, n$; $u = (u_1, \dots, u_n)$; $\Omega \subset \underline{\mathbb{R}}^n$; Ω borné.

Notations.

$$W^n = W \times \dots \times W \quad (n \text{ fois}) ;$$

$$V = \left\{ w \mid w \in (W_2^1(\Omega))^n, \operatorname{div} w = 0 \right\}; \|w\|^2 = \sum_{k,i} \int_{\Omega} |D_k w_i|^2 dx$$

$$H = \left\{ f \mid f \in (L_2(\Omega))^n, \operatorname{div} f = 0 \right\}$$

$V \subset H \subset V'$; V' = dual de V ; H est identifié à son dual.

On suppose $\partial \Omega$ deux fois différentiable ;

On se donne $\gamma \in (W_2^1(\Omega))^n$, dont la trace sur $\partial \Omega$ est donc définie ;

pour

$$u - \gamma \in V, \quad v - \gamma \in V, \quad w \in V,$$

on pose

$$(1.1) \quad a(u, v, w) = \sum_{i,k=1}^n (D_k v_i, D_k w_i) + \sum_{i,k=1}^n \int_{\Omega} u_k (D_k v_i) w_i dx$$

en écrivant donc $a(u, v, w)$ au lieu de $a(u - \gamma, v - \gamma, w)$. La fonction

trilinéaire $u - \gamma, v - \gamma, w \rightarrow a(u, v, w)$ est continue sur $V \times V \times V$ si la dimension $n \leq 4$, car le théorème de Sobolev donne alors $u, w \in (L_4(\Omega))^n$, donc

$$(1.2) \quad a(u, v, w) = (A(u, v), w), \quad \text{où } A(u, v) \in V'.$$

2) Preuve que $A(u, v)$ vérifie l'hypothèse II du théorème 1.- Vérification

de (i) : $v \rightarrow a(u, v, w)$ est continue sur V .

Ensuite

$$(A(u, u) - A(u, v), u - v) = a(u, u, u - v) - a(u, v, u - v) = \sum_{i,k} (D_k(u_i - v_i), D_k(u_i - v_i))$$

car

$$\sum_{i,k} \int_{\Omega} u_k (D_k w_i) w_i dx = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \int_{\Omega} u_k D_k (w_i)^2 dx = 0 ;$$

par Stokes, puisque $\operatorname{div} u = 0$; ce résultat s'énonce :

$$(2.1) \quad (A(u,u) - A(u,v), u-v) = \|u-v\|^2.$$

Vérification de (ii) : Vu (2.1), si $(A(u_\mu, u_\mu) - A(u_\mu, u), u_\mu - u) \rightarrow 0$, alors $u_\mu \rightarrow u$ dans V fort ; donc

$$a(u_\mu, v, w) \rightarrow a(u, v, w) ;$$

donc

$$A(u_\mu, v) \rightarrow A(u, v) \text{ dans } V' \text{ faible.}$$

Vérification de (iii) : Soit $u_\mu \rightarrow u$ dans V faible ; alors

$$u_{\mu, k} \rightarrow u_k \text{ dans } L_2(\Omega) \text{ fort,}$$

$$u_{\mu, k} \text{ est borné dans } L_4(\Omega).$$

De toute suite extraite de $\{u_\mu\}$ on peut donc extraire une suite $\{u_\nu\}$ telle que

$$u_{\nu, k}(x) \rightarrow u_k(x) \text{ p.p. ;}$$

évidemment

$$u_{\nu, k} \rightarrow u_k \text{ dans } L_4(\Omega) \text{ faible,}$$

$$u_{\nu, k} u_{\nu, i} \rightarrow u_k u_i \text{ dans } L_2(\Omega) \text{ faible.}$$

Donc

$$u_{\mu, k} \rightarrow u_k \text{ dans } L_4(\Omega) \text{ faible ;}$$

$$u_{\mu, k} u_{\mu, i} \rightarrow u_k u_i \text{ dans } L_2(\Omega) \text{ faible.}$$

Donc

$$A(u_{\mu, v}) \rightarrow A(u, v) \text{ dans } V' \text{ faible ;}$$

$$(A(u_{\mu, v}), u - \gamma) \rightarrow (A(u, v), u - \gamma).$$

Voici prouvé (iii) et même bien plus.

3. Condition pour que A soit coercitif.- Puisque nous notons $a(u, v, w)$ ce que le § 1 noterait $a(u - \gamma, v - \gamma, w)$, il s'agit de chercher sous quelle condition

$$(3.1) \quad \lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \frac{(A(u,u), u-\gamma)}{\|u\|} = \infty .$$

On a

$$\begin{aligned} (A(u,u), u-\gamma) &= a(u,u, u-\gamma) \\ &= \sum_{i,k=1}^n (D_k u_i, D_k (u_i - \gamma_i)) + \sum_{i,k=1}^n \int_{\Omega} u_k (D_k u_i) (u_i - \gamma_i) dx \\ &= \sum_{i,k=1}^n (D_k u_i, D_k (u_i - \gamma_i)) + \sum_{i,k=1}^n \int_{\Omega} u_k (D_k \gamma_i) (u_i - \gamma_i) dx \end{aligned}$$

car

$$\sum_k \int_{\Omega} u_k (u_i - \gamma_i) D_k (u_i - \gamma_i) dx = \frac{1}{2} \sum_k \int_{\Omega} u_k D_k (u_i - \gamma_i)^2 dx = 0$$

par Stokes.

Soit $\{u_{\mu}\}$ une suite telle que $\frac{(A(u_{\mu}, u_{\mu}), u_{\mu} - \gamma)}{\|u_{\mu}\|^2}$ tende vers sa limite inférieure ($u_{\mu} - \gamma \in V$) ; on peut la choisir convergente dans V faible ; soit U sa limite ; on a (cf. iii) :

$$u_{\mu,k} \rightarrow U_k \text{ dans } L_4(\Omega) \text{ faible,}$$

$$u_{\mu,k} u_{\mu,i} \rightarrow U_k U_i \text{ dans } L_2(\Omega) \text{ faible ;}$$

donc :

$$U \in V, \|U\| \leq 1,$$

$$(3.2) \quad \lim.\text{inf.} \frac{(A(u,u), u-\gamma)}{\|u\|^2} = 1 + \sum_{i,k} \int_{\Omega} U_i U_k D_k \gamma_i dx$$

soit $\Omega(\varepsilon)$ la partie de Ω distante de $\partial\Omega$ de moins de ε .

On prouve aisément ([5], p.38-41) ceci :

$$\int_{\Omega(\varepsilon)} U_i U_k \leq c \varepsilon^2 \|U\|^2 \quad (c : \text{indépendant de } \varepsilon \text{ et de } U \in V) ;$$

γ peut être choisi tel que

$$\gamma = 0 \text{ hors de } \Omega(\varepsilon), \quad \left| D_k \gamma_i \right| \leq \frac{c}{\varepsilon} ,$$

si γ a sur $\partial \Omega$ des valeurs données tangentes à $\partial \Omega$. Sous cette condition, un choix approprié de ε et γ , indépendant de U , permet donc de déduire de (3.2) que

$$\lim.\inf. \frac{(A(u,u), u-\gamma)}{\|u\|^2} \geq \frac{1}{2} ;$$

d'où l'hypothèse de coercivité (3.1), pour ce choix de γ .

4. Conclusions.- Le théorème 1 s'applique donc : le système de Navier-Stokes a au moins une solution $u \in W_2^1(\Omega)$ prenant sur $\partial \Omega$ des valeurs données tangentes à $\partial \Omega$, si $n \leq 4$.

Note.- [5] prouve ce théorème pour $n \leq 3$ et des valeurs au bord, dont le flux est nul à travers chaque composante connexe du bord : [5] chap. II donne la majoration a priori permettant d'appliquer la théorie des points fixes par laquelle il convient de remplacer le chap. I de [5]. Mais la preuve de cette majoration a priori ne suffit pas à établir la coercivité. Pour obtenir ce théorème de [5] par la méthode du § 1, il faut sans doute améliorer cette méthode : faire un emploi moins particulier de la théorie des points fixes, permettant de remplacer l'hypothèse de coercivité par celle qu'existe une majoration a priori.

Note.- [5] traite le cas où Ω n'est pas borné par passage à la limite.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. E. BROWDER. Variational boundary value problems for quasi-linear elliptic equations of arbitrary order, Proc. Nat. Acad. Sci. vol. 50 (1963), pp. 31-37, Notes II, III, idem. Divers articles à paraître.
- [2] G.J. MINTY. a) Monotone (non linear) operators in Hilbert space. Duke Math. J. 29 (1962), p.341-346.
b) On the Maximal domain of a monotone function, Michigan Math. J. 8 (1961), p.135-137.
c) On a "monotonicity" method for the solution of non linear equations in Banach spaces. Proc. Nat. Acad. Sc. 50 (1963), p.1038-1041.
- [3] I.M. VISIK. a) Doklady Akad. Nauk. t.138 (1961), p.518-521.
b) Troudi Moskov. Mat. Obv. t.12 (1963), p.125-184.
- [4] ----- Doklady Akad. Nauk. t.151 (1963), p.758-761.
- [5] J. LERAY. Journal de Math., t.12 (1933), p.21-63.