Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

A. Douady

Le théorème d'existence

Séminaire Jean Leray, nº 4 (1964-1965), p. 89-100
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964-1965___4_89_0>

LE THÉORÈME D'EXISTENCE

par

A. DOUADY

1. Où l'on pose le problème.

Dans tout cet exposé, X désignera un espace analytique de dimension finie et $\mathcal{E}$ un faisceau analytique cohérent sur X. On cherche un espace analytique H de dimension finie et un sous faisceau analytique cohérent $\mathcal{R}$ de $\mathcal{E}_H$ tel que $\mathcal{E}_H/\mathcal{R}$ soit H-plat et H-propre (c'est-à-dire que la projection sur H du support de $\mathcal{E}_H/\mathcal{R}$ soit propre), tels que soit vérifiée la propriété universelle : Quels que soient l'espace analytique S de dimension finie et le sous faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}_S$ tel que $\mathcal{E}_S/\mathcal{F}$ soit S-plat et S-propre, il existe un morphisme et un seul $f : S \to H$ tel que

$$\mathcal{F} = (f \times I_X)^* \mathcal{R} \ .$$

Ce problème peut encore s'énoncer en disant que l'on cherche à représenter le foncteur qui, à tout espace analytique S de dimension finie, associe l'ensemble des sous faisceaux analytiques cohérents $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}_S$ tels que $\mathcal{E}_S/\mathcal{F}$ soit S-plat et S-propre.

Nous montrerons d'abord que le foncteur qui, à tout espace analytique banachique S, associe l'ensemble des sous faisceaux $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}_S$ tels que $\mathcal{E}_S/\mathcal{F}$ soit S-anaplat et S-propre, est représentable, puis que l'espace analytique H qui le représente est de dimension finie.

Cela résoudra le problème posé. Rappelons en effet que, si S est de dimension finie, ≪ S-anaplat ≫ équivaut à ≪ cohérent et S-plat ≫.

Remarques.

1. Soit H une solution du problème universel. En prenant pour S un point simple, l'ensemble des morphismes de S dans H s'identifie à l'ensemble sous-jacent à H ; d'autre part la valeur du foncteur que l'on représente n'est autre que l'ensemble des sous faisceaux analytiques cohérents $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ tels que $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ soit à support compact.

On voit donc que l'ensemble sous jacent à H s'identifie à l'ensemble des sous faisceaux analytiques cohérents $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ tels que $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ soit à support compact.

Un aspect du problème est donc de munir d'une structure d'espace analytique l'ensemble des sous faisceaux analytiques cohérents $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ tels que $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ soit à support compact.

2. Si $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X$, on trouve pour l'ensemble sous jacent à H l'ensemble des faisceaux cohérents d'idéaux $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_X$ tels que $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ soit à support compact, autrement dit l'ensemble des sous espaces analytiques compacts de X. Pour tout espace analytique S, l'ensemble des morphismes de S dans H s'identifie alors à l'ensemble des sous espaces analytiques Y de $S \times X$ plats et propres sur S.

3. L'espace tangent de Zariski $T_s H$ à H en un point s de H, auquel correspond un sous faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$, s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{E}/\mathcal{F})$. Soit en effet $\bullet\!\!\to$ un espace réduit à un point muni de l'algèbre des nombres duaux $D = \underline{\underline{C}}[t]/(t^2)$. Alors $T_s H$ est l'ensemble des morphismes $\bullet\!\!\to$ dans H qui

appliquent le point en s, donc s'identifie à l'ensemble des sous faisceaux cohérents $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{E}' = D \otimes_{\underline{\underline{C}}} \mathcal{E}$ tels que $\mathcal{E}'/\mathcal{F}'$ soit D-plat et $\underline{\underline{C}} \otimes_D \mathcal{F}' = \mathcal{F}$. Identifions $\mathcal{E}'$ à $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$, la première projection $p : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ s'identifiant à $I_{\mathcal{E}'} \otimes \varepsilon$, où $\varepsilon : D \to \underline{\underline{C}}$ est l'augmentation. Si $\mathcal{F}' \subset \mathcal{E}'$ vérifie les conditions ci-dessus, on a $p(\mathcal{F}') = \mathcal{F}$ et $\operatorname{Ker} p \cap \mathcal{F}' = 0 \times \mathcal{F}$. On peut donc considérer $\mathcal{F}'/0 \times \mathcal{F}$ comme le graphe d'un morphisme de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{E}/\mathcal{F}$. On vérifie que l'on obteint ainsi une bijection de $T_s H$ sur $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{E}/\mathcal{F})$ et que c'est un isomorphisme d'espace vectoriel. Ceci nous montre déjà que $T_s H$ est de dimension finie si on sait seulement que H est solution du problème universel banachique.

2. Cuirasses.

Si φ est une carte de X, i.e. un isomorphisme d'un ouvert de X sur un sous espace analytique fermé d'un ouvert U de $\underline{\underline{C}}^n$, si $K \subset U$ est un polycylindre, i.e. un compact convexe de la forme $K_1 \times \ldots \times K_n$, si $\mathcal{F}$ est un faisceau analytique cohérent sur X, nous commettrons l'abus de langage suivant : nous dirons que K est $\mathcal{F}$-privilégié si K est privilégié pour $\varphi_* \mathcal{F}$ et nous écrirons $B(K, \mathcal{F})$ pour $B(K, \varphi_* \mathcal{F})$, $\mathcal{G}_K(\mathcal{F})$ pour $\mathcal{G}_K(\varphi_* \mathcal{F})$, etc...

On appellera cuirasse sur X la donnée :

(i) d'une famille finie $(\varphi_i)_{i \in I}$ de cartes de X (pour tout i, φ_i est un isomorphisme d'un ouvert X_i de X sur un sous espace analytique fermé d'un ouvert U_i de $\underline{\underline{C}}^{n_i}$) ;

(ii) pour tout $i \in I$, d'un polycylindre $K_i \subset U_i$;

(iii) pour tout $i \in I$, d'un compact $V_i \subset \varphi_i^{-1}(\mathring{K}_i) \subset X_i$;

(iv) pour tout couple (i,j), d'une carte φ_{ij} de X ayant pour domaine X_{ij}

$$X_{ij} = X_i \cap X_j$$

(φ_{ij} est un isomorphisme de X_{ij} sur un sous espace analytique fermé d'un ouvert U_{ij} de $\underline{\underline{C}}^{n_{ij}}$)

(v) pour tout couple (i,j), d'une famille finie $(K_{ij\alpha})_{\alpha \in A_{ij}}$ de polycylindres contenus dans U_{ij} telle que

$$\bigcup_{\alpha \in A_{ij}} \varphi_{ij}^{-1}(\mathring{K}_{ij\alpha}) \supset V_i \cap V_j \quad \text{et} \quad \bigcup_{\alpha \in A_{ij}} \varphi_{ij}^{-1}(K_{ij\alpha}) \subset \varphi_i^{-1}(\mathring{K}_i) \cap \varphi_j^{-1}(\mathring{K}_j) ;$$

(vi) d'un fermé L de X tel que $L \cup \bigcup V_i = X$.

Remarquons que ces conditions entraînent que $X-L$ est relativement compact dans X.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X, la cuirasse

$$M = ((\varphi_i), (K_i), (V_i), (\varphi_{ij}), (K_{ij\alpha}), L)$$

sera dite semi-privilégiée pour $\mathcal{F}$ si K_i est $\mathcal{F}$-privilégié pour tout $i \in I$ et si $K_{ij\alpha}$ est $\mathcal{F}$-privilégié pour tous i,j,α. Si $\mathcal{F}$ est un sous faisceau analytique cohérent de $\mathcal{E}$; on dira que M est $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$-privilégiée si M est semi-privilégiée pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ (donc pour $\mathcal{E}$) et si

$$\operatorname{supp} \mathcal{E}/\mathcal{F} \cap L = \emptyset .$$

Remarquons que ceci entraîne que $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ est à support compact.

PROPOSITION 1. Soit $\mathcal{F}$ un sous faisceau analytique cohérent de $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ soit à support compact. Alors il existe une cuirasse M sur X qui soit $(\mathcal{E},\mathcal{F})$-privilégiée.

Cette proposition est facile à partir du théorème des voisinages privilégiés.

PROPOSITION 2. Soient S un espace analytique banachique, $\mathcal{F}$ un sous faisceau de $\mathcal{E}_S$ tel que $\mathcal{E}_S/\mathcal{F}$ soit S-anaplat et S-propre. Soit M une cuirasse sur X. Alors l'ensemble des $s \in S$ tels que M soit $(\mathcal{E},\mathcal{F}(s))$-privilégiée est ouvert dans S.

Cette proposition résulte du fait, déjà remarqué au cours de l'exposé précédent, que si $\mathcal{F}_1$ est un faisceau S-anaplat sur $S \times U$, où U est un ouvert de $\underline{\underline{C}}^n$, et $K \subset U$ un polycylindre, l'ensemble des $s \in S$ tels que K soit privilégié pour $\mathcal{F}_1(s)$ est ouvert dans S, ainsi que du corollaire de la proposition 1 de cet exposé.

3. L'espace Θ.

Jusqu'au n°6, nous munissons X d'une cuirasse

$$M = ((\varphi_i), (K_i), (V_i), (\varphi_{ij}), (K_{ij\alpha}), L)$$

semi-privilégiée pour $\mathcal{E}$.

Pour chaque $i \in I$, notons $\mathcal{R}_i$ le sous faisceau universel de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_{K_i}(\mathcal{E})}$ défini au dessus de $\mathcal{G}_{K_i}(\mathcal{E}) \times \varphi_i^{-1}(\overset{\circ}{K}_i)$. Notons G_i l'ouvert de $\mathcal{G}_{K_i}(\mathcal{E})$ formé des points s tels que :

(i) $\forall j \in I \ \forall \alpha \in A_{ij}$ $K_{ij\alpha}$ est $\mathcal{R}_i(s)$-privilégié,

(ii) $\operatorname{supp}(\mathcal{E}/\mathcal{R}_i(s)) \cap L \cap V_i = \emptyset$.

Posons encore $G_{ij\alpha} = \mathcal{G}_{K_{ij\alpha}}(\mathcal{E})$, notons $\rho'_{ij\alpha}$ le morphisme de G_i dans $G_{ij\alpha}$ induit par $\beta_{K_{ij\alpha}}(\mathcal{R}_i)$, et posons $\rho''_{ij\alpha} = \rho'_{ji\alpha}$. Définissons les morphismes ρ' et ρ'' de $\prod G_i$ dans $\prod G_{ij\alpha}$ par

$$\rho'(s) = s' \quad \text{avec} \quad s'_{ij\alpha} = \rho'_{ij\alpha}(s_i)$$

et

$$\rho''(s) = s'' \quad \text{avec} \quad s''_{ij\alpha} = \rho''_{ij\alpha}(s_j).$$

Notons Θ l'espace analytique banachique noyau de la double flèche

$$(\rho', \rho'') : \prod G_i \rightrightarrows \prod G_{ij} .$$

4. <u>Morphisme dans</u> Θ <u>défini par un faisceau</u>.

Soient S un espace analytique banachique et $\mathcal{F}$ un sous faisceau de $\mathcal{E}_S$ tel que $\mathcal{E}_S/\mathcal{F}$ soit S-anaplat et S-propre. Soit S_1 l'ouvert de S formé des s tels que M soit $(\mathcal{E}, \mathcal{F}(s))$-privilégiée. Pour tout $i \in I$, le morphisme $\beta_{K_i}(\mathcal{F})$ induit un morphisme de S_1 dans G_i, d'où un morphisme $\beta_M(\mathcal{F})$ de S_1 dans $\prod G_i$.

La description faite au cours de l'exposé précédent du comportement des $\beta_K(\mathcal{F})$ permet d'écrire les égalités suivantes entre morphismes définis sur S_1 :

$$\rho'_{ij\alpha} \circ \beta_{K_i}(\mathcal{F}) = \beta_{K_{ij\alpha}}(\mathcal{R}_i) \circ \beta_{K_i}(\mathcal{F}) = \beta_{K_{ij\alpha}}((\beta_{K_i}(\mathcal{F}) \times I_{\overset{\circ}{K}_i})^* \mathcal{R}_i)$$

$$= \beta_{K_{ij\alpha}}(\mathcal{F}|_{S \times \overset{\circ}{K}_i}) = \beta_{K_{ij\alpha}}(\mathcal{F}) .$$

De même

$$\rho''_{ij\alpha} \circ \beta_{K_j}(\mathcal{F}) = \beta_{K_{ij\alpha}}(\mathcal{F}).$$

Il en résulte que

$$\rho' \circ \beta_M(\mathcal{F}) = \rho'' \circ \beta_M(\mathcal{F}),$$

donc $\beta_M(\mathcal{F})$ peut être considéré comme un morphisme de S_1 dans Θ .

On a la propriété de fonctorialité suivante : Soit $f : S' \to S$ un morphisme d'espaces analytiques banachiques, et posons $\mathcal{F}' = (f \times I_X)^* \mathcal{F}$; définissons S'_1 comme S_1. Alors $S'_1 = f^{-1}(S_1)$ et

$$\beta_M(\mathcal{F}') = \beta_M(\mathcal{F}) \circ f : S'_1 \to \Theta \quad .$$

5. <u>Sous faisceau universel de</u> $\mathcal{E}_\Theta$.

Notons p_i la projection de Θ sur G_i. Le faisceau $\tilde{\mathcal{R}}_i = (p_i \times I)^* \mathcal{R}_i$ est un sous faisceau de $\mathcal{E}$ défini sur $\varphi_i^{-1}(K_i)$.

LEMME. <u>On a</u>

$$\tilde{\mathcal{R}}_i|_{V_i \cap V_j} = \tilde{\mathcal{R}}_j|_{V_i \cap V_j} \quad \underline{\text{et}} \quad \tilde{\mathcal{R}}_i|_{V_i \cap L} = \mathcal{E}_\Theta|_{V_i \cap L} \quad .$$

On a en effet

$$\tilde{\mathcal{R}}_i|_{\varphi_{ij}^{-1}(\mathring{K}_{ij\alpha})} = \tilde{\mathcal{R}}_{ij\alpha} \quad ,$$

où

$$\tilde{\mathcal{R}}_{ij\alpha} = (p_{ij\alpha} \times I)^* \mathcal{R}_{ij\alpha} \; ,$$

avec

$$p_{ij\alpha} = \rho'_{ij\alpha} \circ p_i = \rho''_{ij\alpha} \circ p_j : \Theta \to G_{ij\alpha} \; .$$

Comme

$$V_i \cap V_j \subset \bigcup \varphi_{ij}^{-1}(\mathring{K}_{ij\alpha}),$$

la première assertion en résulte. La seconde résulte de la condition (ii) dans la définition de G_i et de la proposition 1 de l'exposé précédent.

Ce lemme montre qu'il existe un sous faisceau et un seul $\tilde{\mathcal{R}}$ de $\mathcal{E}_\Theta$ tel que $\tilde{\mathcal{R}}_{|V_i} = \tilde{\mathcal{R}}_{i|V_i}$ pour tout $i \in I$ et $\tilde{\mathcal{R}}_{|L} = \mathcal{E}_{\Theta}$. Le faisceau $\tilde{\mathcal{R}}$ sera qualifié d'universel. Il jouit des propriétés suivantes : $\mathcal{E}_{\Theta}/\tilde{\mathcal{R}}$ est Θ-anaplat, et supp $(\mathcal{E}_{\Theta}/\tilde{\mathcal{R}})$ est fermé dans $\Theta \times \overline{X-L}$, comme $\overline{X-L}$ est compact, la projection de ce support sur Θ est propre.

PROPOSITION 3. <u>Soient</u> S <u>un espace analytique banachique,</u> $\mathcal{F}$ <u>un sous faisceau de</u> $\mathcal{E}_S$ <u>tel que</u> $\mathcal{E}_S/\mathcal{F}$ <u>soit</u> S-<u>anaplat et</u> S-<u>propre</u>. <u>Posons</u> $f = \beta_M(\mathcal{F}) : S_1 \to \Theta$ <u>On a alors</u>

$$(f \times I_X)^* \tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{F}_{|S_1 \times X} .$$

<u>Démonstration</u>. Pour tout $i \in I$, posons

$$f_i = p_i \circ f = \beta_{K_i}(\mathcal{F}) : S_1 \to G_i .$$

On a :

$$(f \times I)^* \tilde{\mathcal{R}}_{|V_i} = (f \times I)^* \tilde{\mathcal{R}}_{i|V_i} = (f_i \times I)^* \mathcal{R}_{i|V_i} = \mathcal{F}_{|S_1 \times V_i} ,$$

la dernière égalité provenant du n°6 de l'exposé précédent, car $V_i \subset \varphi_i^{-1}(\mathring{K}_i)$. D'autre part les deux membres de la formule de l'énoncé coïncident avec $\mathcal{E}_S$ sur $S_1 \times L$. Ils coïncident donc sur $S_1 \times X$ et la proposition est démontrée.

6. <u>L'espace</u> $H_M(E)$.

Considérons le morphisme

$$\theta = \beta_M(\mathcal{R}) : \Theta_1 \to \Theta \quad ,$$

où Θ_1 est l'ouvert de Θ formé des points s tels que M soit $(\mathcal{E}, \mathcal{R}(s))$-privilégiée. Si contrariant que cela puisse être, θ ne coïncide pas avec l'identité. Cependant :

PROPOSITION 4. <u>Soient</u> S <u>un espace analytique banachique,</u> $\mathcal{F}$ <u>un sous faisceau de</u> $\mathcal{E}_S$ <u>tel que</u> $\mathcal{E}_S/\mathcal{F}$ <u>soit</u> S-<u>anaplat et</u> S-<u>propre</u>. <u>Alors l'image du morphisme</u> $\beta_M(\mathcal{F}) : S_1 \to \Theta$ <u>est contenue dans</u> Θ_1 <u>et on a</u>

$$\Theta \circ \beta_M(\mathcal{F}) = \beta_M(\mathcal{F}) .$$

<u>Démonstration</u>. Posons $f = \beta_M(\mathcal{F}) : S_1 \to \Theta$. On a

$$\beta_M(\mathcal{F}) = \beta_M(\mathcal{F}|_{S_1 \times X}) = \beta_M((f \times I)^* \tilde{\mathcal{R}}) ;$$

La propriété de fonctorialité vue au n°4 dit que le domaine de définition S_1 de ce morphisme est $f^{-1}(\Theta_1)$, ce qui prouve la première assertion, et que

$$\beta_M((f \times I)^* \tilde{\mathcal{R}}) = \beta_M(\tilde{\mathcal{R}}) \circ f = \Theta \circ f,$$

ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE. <u>On a</u> $\Theta(\Theta_1) \subset \Theta_1$ <u>et</u> $\Theta \circ \Theta = \Theta$.

C'est la proposition 4 appliquée au faisceau $\mathcal{R}$.

Notons $H_M(\mathcal{E})$ l'espace analytique noyau de la double flèche

$$(I, \Theta) : \Theta_1 \rightrightarrows \Theta_1 .$$

Soit ι le morphisme d'inclusion de $H_M(\mathcal{E})$ dans Θ et notons $\mathcal{R}$ le sous-faisceau $(\iota \circ I_X)^* \mathcal{R}$ de $\mathcal{E}_{H_M(\mathcal{E})}$. Ce sous faisceau mérite le nom d'universel : $\mathcal{E}_{H_M(\mathcal{E})}/\mathcal{R}$ est $H_M(\mathcal{E})$-anaplat ; pour tout $h \in H_M(\mathcal{E})$, la cuirasse M est $(\mathcal{E}, \mathcal{R}(h))$-privilégiée, enfin :

PROPOSITION 5. <u>Soient</u> S <u>un espace analytique banachique,</u> $\mathcal{F}$ <u>un sous faisceau de</u> $\mathcal{E}_S$ <u>tel que</u> $\mathcal{E}_S/\mathcal{F}$ <u>soit</u> S-<u>anaplat et que</u> M <u>soit</u> $(\mathcal{E}, \mathcal{F}(s))$-<u>privilégiée pour tout</u> $s \in S$. <u>Alors il existe un morphisme et un seul</u> f <u>de</u> S <u>dans</u> $H_M(\mathcal{E})$ tel que $\mathcal{F} = (f \times I_X)^* \mathcal{R}$.

<u>Démonstration</u>. Le morphisme $\beta_M(\mathcal{F})$ est défini sur S et la proposition 4 montre qu'il peut être considéré comme un morphisme $f : S \to H_M(\mathcal{E})$. La proposition 3 montre que ce morphisme répond à la question. Si g est un autre

morphisme répondant à la question, on a

$$\iota \circ f = \beta_M(\mathcal{F}) = \beta_M((g \times I_X)^* \mathcal{R}) = \beta_M(\mathcal{R}) \circ g = \iota \circ g ,$$

d'où $f = g$, ce qui démontre la proposition.

7. Solution du problème universel.

THÉORÈME 1. *Il existe un espace analytique banachique* $H(\mathcal{E})$ *et un sous faisceau* $\mathcal{R}$ *de* $E_{H(\mathcal{E})}$ *jouissant de la propriété universelle suivante :*

(i) $\mathcal{E}_{H(\mathcal{E})}/\mathcal{R}$ *est* $H(\mathcal{E})$-*anaplat et* $H(\mathcal{E})$-*propre* ;

(ii) *Pour tout espace analytique banachique* S *et tout sous faisceau* $\mathcal{F}$ *de* $\mathcal{E}_{S(\mathcal{E})}$ *tel que* $\mathcal{E}_{S(\mathcal{E})}/\mathcal{F}$ *soit* $S(\mathcal{E})$-*anaplat et* $S(\mathcal{E})$-*propre, il existe un morphisme et un seul* $f : S \to H(\mathcal{E})$ *tel que* $\mathcal{F} = (f \times I_X)^* \mathcal{R}$.

Démonstration. Pour toute cuirasse M sur X, posons $H_M = H_M(\mathcal{E})$, notons $\mathcal{R}_M$ le sous faisceau universel de $\mathcal{E}_{H_M}$; l'ensemble sous jacent $|H_M|$ à H_M s'identifie à l'ensemble des sous faisceaux analytiques cohérents $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ tels que M soit $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$-privilégiée.

Considérons l'ensemble $|H|$ des sous faisceaux analytiques cohérents $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ tels que $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ soit à support compact. Pour toute cuirasse M sur X, l'ensemble $|H_M|$ s'identifie à une partie de $|H|$. Si M et M' sont deux cuirasses sur X, l'ensemble $|H_M| \cap |H_{M'}|$ est ouvert dans H_M et dans $H_{M'}$ pour leurs topologies respectives ; nous noterons $H_{M,M'}$ cet ensemble muni de la structure analytique induite par celle de H_M . Les espaces analytiques $H_{M,M'}$ et $H_{M',M}$ sont solution d'un même problème universel ; il existe donc un morphisme et un seul

$$\gamma_{MM'} : H_{M,M'} \to H_{M',M}$$

tel que $\mathcal{A}_M = (\gamma_{MM'} \times I_X)^*\mathcal{A}_{M'}$ sur $H_{M,M'} \times X$. Les morphismes $\gamma_{MM''}$ et $\gamma_{M'M''} \circ \gamma_{MM'}$ coïncident sur $H_{M,M'} \cap H_{M,M''}$. Comme $|H| = \bigcup |H_M|$ d'après la proposition 1, on peut faire de l'ensemble $|H|$ un espace analytique banachique H tel que, pour toute cuirasse M, l'ensemble $|H_M|$ soit ouvert dans H et la structure de H_M s'identifie à la structure induite par celle de H. Les sous faisceaux $\mathcal{A}_M$ de $\mathcal{E}_{H_M}$ se recollent alors en un sous faisceau $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}_H$.

Montrons que le couple $(H, \mathcal{A})$ jouit de la propriété universelle requise. Soient S et $\mathcal{F}$ vérifiant les hypothèses de (ii). Pour toute cuirasse M sur X, soit S_M l'ensemble des $s \in S$ tels que M soit $(\mathcal{E}, \mathcal{F}(s))$-privilégiée, et soit $f_M : S_M \to H_M$ le morphisme satisfaisant à la condition de la proposition 5. Les propositions 1 et 2 montrent que les S_M forment un recouvrement ouvert de S, et l'unicité dans la proposition 5 montre que les f_M se recollent en un morphisme f de S dans H, qui est évidemment le seul répondant à la question. Ceci démontre le théorème.

8. La finitude.

THÉORÈME 2. L'espace analytique $H(\mathcal{E})$ est séparé et de dimension finie en tout point.

Démonstration.

a) Séparation. Pour toute cuirasse M, l'espace $H_M(\mathcal{E})$ est séparé, car c'est un sous espace d'un produit de variétés grassmaniennes, qui sont séparées. Etant donné deux points distincts s_0 et s_1 de $H(\mathcal{E})$, on peut construire une cuirasse M qui soit $(\mathcal{E}, \mathcal{A}(s_i))$-privilégiée pour $i = 0, 1$. Les points s_o et s_1 ont alors des voisinages disjoints dans $H_M(\mathcal{E})$, donc dans $H(\mathcal{E})$.

b) Finitude. Soit s un point de $H(\mathcal{E})$. On peut construire deux cuirasses

$$M = ((\varphi_i),(K_i)_{i\in I},\ldots) \quad \text{et} \quad M' = ((\varphi_i),(K'_i)_{i\in I},\ldots)$$

qui soient $(\mathcal{E}, \mathcal{R}(s))$-privilégiées et telles que $K'_i \subset \overset{\circ}{K}_i$ pour tout $i \in I$. Le morphisme $\beta_{M'}(\mathcal{R})$, qui n'est autre que l'identité de $H_M \cap H_{M'}$, est induit par le morphisme $\prod \beta_{K'_i}(\mathcal{R}_i)$ d'un ouvert de $\prod G_{K_i}(\mathcal{E})$ dans $\prod G_{K'_i}(\mathcal{E})$. Comme on l'a remarqué au n°6 de l'exposé précédent, les morphismes $\beta_{K'_i}(\mathcal{R}_i)$ sont compacts. Par suite $I_{H(\mathcal{E})}$ est un morphisme compact en s. Le critère de finitude (Espaces analytiques banachiques, Proposition 3) nous apprend que $H(\mathcal{E})$ est de dimension finie en s, ce qui démontre le théorème.