Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

A. Douady

Faisceaux anaplats

Séminaire Jean Leray, n° 4 (1964-1965), p. 74-88
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964-1965___4_74_0>

FAISCEAUX ANAPLATS

par

A. DOUADY

1. Notations.

Si $X = (X, \Phi)$ est un espace analytique banachique, on note $\mathcal{O}_X$ le faisceau $\Phi(\underline{\underline{C}})$ sur X. Si $f = (f_0, f_1)$ est un morphisme d'espaces analytiques banachiques de X' dans X et si $\mathcal{F}$ est un faisceau $\mathcal{O}_X$-module sur X, on notera $f^* \mathcal{F}$ le faisceau $\mathcal{O}_{X'}$-module $\mathcal{O}_{X'} \boxtimes_{f_0^* \mathcal{O}_X} f_0^* \mathcal{F}$ sur X'.

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau $\mathcal{O}_{S \times X}$-module sur un produit $S \times X$ d'espaces analytiques banachiques, pour tout point $s \in S$, on notera $\mathcal{F}(s)$ le faisceau $\mathcal{O}_X$-module $i_s^* \mathcal{F}$ sur X, où i_s désigne le morphisme d'injection de X dans $S \times X$ défini par s.

Si S est un espace analytique de dimension finie, $\mathcal{F}(s)$ s'identifie à $\mathcal{F}/\underline{\underline{m}}_s \mathcal{F} = \underline{\underline{C}} \boxtimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}$. Il n'en est plus ainsi en général si S n'est pas de dimension finie.

2. Un lemme préliminaire.

LEMME 1. *Soit* U *un ouvert de* $\underline{\underline{C}}^n$, *soient* $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$ *des faisceaux analytiques cohérents sur* U, *et soit* K *un compact convexe privilégié pour* $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$, *et* $\mathcal{F}''$.

(a) *Soient* $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ *et* $g : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}''$ *des homomorphismes de* $\mathcal{O}_U$*-modules tels que* $g \circ f = 0$. *Si*

$$B(K, \mathcal{F}) \to B(K, \mathcal{F}') \to B(K, \mathcal{F}'')$$

est une suite exacte directe, $\mathcal{F} \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F}''$ *est une suite exacte de faisceaux sur* K.

(b) <u>Toute suite exacte directe</u> $B(K)$-<u>linéaire</u> :

$$B(K,\mathcal{F}) \overset{u}{\to} B(K,\mathcal{F}') \overset{v}{\to} B(K,\mathcal{F}'')$$

<u>induit une suite exacte de faisceaux sur l'intérieur</u> $\overset{\circ}{K}$ <u>de</u> K.

<u>Démonstration</u>. (a_0) Avec les hypothèses de (a), $\mathcal{F} \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F}''$ est une suite exacte sur $\overset{\circ}{K}$. En effet, pour tout $h \in H^0(K,\mathrm{Ker}\ g)$, la restriction de h à $\overset{\circ}{K}$ est dans l'image de f, et $H^0(K,\mathrm{Ker}\ g)$ engendre $\mathrm{Ker}\ g_x$ d'après le théorème A classique.

(a) Soit a un point intérieur à K et considérons l'application $m : \underline{\underline{C}} \times \underline{\underline{C}}^n \to \underline{\underline{C}}^n \to \underline{\underline{C}}^n$ définie par $m(t,x) = (1-t)a + tx$. Posons

$$\tilde{U} = m^{-1}(U)\ ,\quad \tilde{\mathcal{F}} = m^*\mathcal{F}\ ,\quad \tilde{f} = m^*f : \tilde{\mathcal{F}} \to \tilde{\mathcal{F}}',\ \text{etc...}$$

L'ensemble J des $t \in \underline{\underline{C}}$ tels que K soit privilégié pour $\tilde{\mathcal{F}}(t)$, $\tilde{\mathcal{F}}'(t)$ et $\tilde{\mathcal{F}}''(t)$ est un voisinage de 1 et les $B(K,\tilde{\mathcal{F}}(t))$ sont les fibres d'un fibré vectoriel $B(K,\tilde{\mathcal{F}})$ sur J ; de même pour $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$. Les homomorphismes f et g définissent des homomorphismes analytiques de fibrés vectoriels :

$$B(K,\tilde{\mathcal{F}}) \xrightarrow{f} B(K,\tilde{\mathcal{F}}') \xrightarrow{g} B(K,\tilde{\mathcal{F}}'')\ .$$

Comme on a une suite exacte pour $t = 1$, on a encore une suite exacte pour t suffisamment voisin de 1, donc une suite exacte $\tilde{\mathcal{F}}(t) \to \tilde{\mathcal{F}}'(t) \to \tilde{\mathcal{F}}''(t)$ sur $\overset{\circ}{K}$ d'après (a_0). Ceci signifie que $\mathcal{F} \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F}''$ est une suite exacte sur $\overset{\circ}{K}_t$, où $K_t = m(t \times K)$. Or pour $t > 1$, $\overset{\circ}{K}_t \supset K$ et l'assertion (a) est démontrée.

(b) Posons $I = [0,1] \cap J$. Les applications u et v définissent des morphismes non nécessairement analytiques mais continus

$$B(K,\tilde{\mathcal{F}})|_I \overset{u}{\to} B(K,\tilde{\mathcal{F}}')|_I \overset{v}{\to} B(K,\tilde{\mathcal{F}}'')|_I$$

de fibrés vectoriels. Comme on a une suite exacte pour $t = 1$, on a encore une suite exacte pour $t \in I$ suffisamment voisin de 1. Mais pour $t < 1$, $u(t)$ et $v(t)$ sont induits par des homomorphismes de faisceaux définis au voisinage de K_t, et on peut appliquer (a_o). D'où une suite exacte de faisceaux sur $\overset{\circ}{K}_t$. Comme

$$\bigcup_{t_o < t < 1} \overset{\circ}{K}_t = \overset{\circ}{K} ,$$

le lemme est démontré.

3. Faisceaux anaplats.

Soient S un espace analytique banachique et U un ouvert de $\underline{\underline{C}}^n$.

DÉFINITION. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau $\mathcal{O}_{S \times U}$-module sur $S \times U$. Nous dirons que $\mathcal{F}$ est S-anaplat si, pour tout point $(s,x) \in S \times U$, il existe une résolution finie*

$$0 \to \mathcal{L}_p \to \dots \to \mathcal{L}_o \to \mathcal{F} \to 0$$

de $\mathcal{F}$ sur un voisinage de (s,x) dans $S \times U$ telle que

$$0 \to \mathcal{L}_p(s) \to \dots \to \mathcal{L}_o(s) \to \mathcal{F}(s) \to 0$$

soit une suite exacte.

Remarques.

1) Il suffit de supposer $0 \to \mathcal{L}_p(s) \to \dots \to \mathcal{L}_o(s)$ exacte, l'exactitude de $\mathcal{L}_1(s) \to \mathcal{L}_o(s) \to \mathcal{F}(s) \to 0$ étant automatique en vertu des propriétés du produit tensoriel.

2) Cette condition d'exactitude ne dépend pas du choix de la résolution de $\mathcal{F}$: elle signifie que

$$\mathrm{Tor}_q^{\mathcal{O}_{S \times U}}(\mathcal{O}_U, \mathcal{F}) = 0 \qquad \text{pour} \quad q > 0 .$$

3) Si S est de dimension finie, dire que $\mathcal{F}$ est anaplat équivaut à dire que $\mathcal{F}$ est cohérent et $\mathcal{O}_S$-plat.

Soient $\mathcal{F}$ un faisceau S-anaplat sur $S \times U$, s un point de S, et $K \subset U$ un compact convexe $\mathcal{F}(s)$-privilégié. D'après le théorème A sous la forme que nous lui avons donné, il existe une résolution finie

$$0 \to \mathcal{L}_p \to \dots \to \mathcal{L}_o \to \mathcal{F} \to 0$$

de $\mathcal{F}$ sur $s \times K$. Cette résolution définit un complexe de fibrés analytiques banachiques $B(K, \mathcal{L}_*)$:

$$0 \to B(K, \mathcal{L}_p) \to \dots \to B(K, \mathcal{L}_o)$$

au voisinage de s dans S. Ce complexe est direct et acyclique en degrés > 0 en s, donc encore au voisinage de s, et

$$H^o(B(K, \mathcal{L}_*)) = \mathrm{Coker}[d_1 : B(K, \mathcal{L}_1) \to B(K, \mathcal{L}_o)]$$

est un fibré banachique trivial au voisinage de s. Il résulte du corollaire 2 du théorème 1 de l'exposé sur les théorèmes A et B que ce fibré vectoriel est indépendant, à un isomorphisme canonique près, du choix de la résolution $\mathcal{L}_*$ de $\mathcal{F}$; nous le noterons $B(K, \mathcal{F})$.

Pour s' voisin de s, il résulte du lemme 1(a) et de l'exactitude à droite du produit tensoriel que $\mathcal{L}_*(s')$ est une résolution de $\mathcal{F}(s')$ sur K. Par suite K est $\mathcal{F}(s')$-privilégié et la fibre de $B(K, \mathcal{F})$ en s' n'est autre que $B(K, \mathcal{F}(s'))$. L'ensemble S' des points $s \in S$ tels que K soit $\mathcal{F}(s)$-privilégié est ouvert dans S et les fibrés vectoriels construits localement se recollent en un fibré vectoriel $B(K, \mathcal{F})$ sur S' .

PROPOSITION 1. <u>Soient</u> $\mathcal{F}, \mathcal{F}', \mathcal{F}''$ <u>des faisceaux</u> S-<u>anaplats sur</u> $S \times U$, <u>et</u> $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$, $g : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}''$ <u>des homomorphismes tels que</u> $g \circ f = 0$. <u>Soit</u> (s,x) <u>un point de</u> $S \times U$; <u>si</u> $\mathcal{F}(s) \to \mathcal{F}'(s) \to \mathcal{F}''(s)$ <u>est une suite exacte en</u> x , <u>la suite</u> $\mathcal{F} \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F}''$ <u>est exacte au voisinage de</u> (s,x).

<u>Démonstration</u>. (a) <u>Exactitude au point</u> (s,x) : Soit $K \subset U$ un voisinage privilégié de x pour $f(s)$ et $g(s)$, i.e. pour le noyau, l'image et le conoyau de ces homomorphismes ; f et g définissent des morphismes de fibrés

$$B(K, \mathcal{F}) \to B(K, \mathcal{F}') \to B(K, \mathcal{F}'') .$$

On a une suite exacte directe au point s , donc une suite exacte directe de fibrés triviaux sur un voisinage V de s dans S. Pour $S' \subset S$, notons $B_{S'}(K, \mathcal{F})$ l'espace vectoriel des sections de $B(K, \mathcal{F})$ sur S'. Si $S' \subset V$, on a une suite exacte

$$B_{S'}(K, \mathcal{F}) \to B_{S'}(K, \mathcal{F}') \to B_{S'}(K, \mathcal{F}'') .$$

En passant à la limite inductive sur les voisinages ouverts de s dans S et sur les voisinages privilégiés de x dans U , on obtient une suite exacte

$$\mathcal{F}_{(s,x)} \to \mathcal{F}'_{(s,x)} \to \mathcal{F}''_{(s,x)} .$$

(b) <u>Exactitude au voisinage de</u> (s,x) : soit K un voisinage privilégié de x pour $f(s)$ et $g(s)$. Pour s' suffisamment voisin de s , on a une suite exacte directe

$$B(K, \mathcal{F}(s')) \to B(K, \mathcal{F}'(s')) \to B(K, \mathcal{F}''(s'))$$

et d'après le lemme 1 (a) ,

$$\mathcal{F}(s') \to \mathcal{F}'(s') \to \mathcal{F}''(s')$$

est une suite exacte en tout point $x' \in K$. L'hypothèse du lemme 2 est donc vérifiée en tout point suffisamment voisin de (s,x), et la proposition est démontrée.

COROLLAIRE. _Soit_ $\mathcal{F}$ _un faisceau_ S-_anaplat sur_ $S \times U$. _L'ensemble_ supp $\mathcal{F}$ _des points_ (s,x) de $S \times U$ _tels que_ $\mathcal{F}_{s,x} \neq 0$ _est fermé dans_ $S \times U$.

Démonstration. Si $\mathcal{F}_{s,x} = 0$, on a en x une suite exacte $0 \to \mathcal{F}(s) \to 0$, donc $0 \to \mathcal{F} \to 0$ est une suite exacte au voisinage de (s,x).

PROPOSITION 2. (Changement de base) _Soient_ $\mathcal{F}$ _un faisceau_ S-_anaplat sur_ $S \times U$, S' _un espace analytique banachique et_ $f : S' \to S$ _un morphisme_. Le faisceau $\mathcal{F}' = (f \times I_U)^* \mathcal{F}$ _sur_ $S' \times U$ _est_ S'-_anaplat_.

Démonstration. Soit $s' \in S'$ et $s = f(s') \in S$. Si

$$\mathcal{L}_* : 0 \to \mathcal{L}_p \to \dots \to \mathcal{L}_o \to \mathcal{F} \to 0$$

est une résolution de $\mathcal{F}$ au voisinage de (s,x), le complexe $\mathcal{L}'_* = (f \times I)^* \mathcal{L}_*$ est une résolution de $\mathcal{F}'$ au voisinage de (s',x). En effet

$$\mathcal{L}'_1 \to \mathcal{L}'_o \to \mathcal{F}' \to 0$$

est exacte d'après les propriétés du produit tensoriel et $0 \to \mathcal{L}'_p \to \dots \to \mathcal{L}'_o$ est exacte d'après la proposition 1, le complexe $\mathcal{L}'_*(s') = \mathcal{L}_*(s)$ étant acyclique en degré > 0.

PROPOSITION 3. _Soit_ $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ _une suite exacte de faisceaux_ $\mathcal{O}_{S \times U}$-_modules sur_ $S \times U$.

(a) Si $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ sont S-anaplats, $\mathcal{F}$ est S-anaplat.

(b) Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}''$ sont S-anaplats, $\mathcal{F}'$ est S-anaplat.

(c) Supposons $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ S-anaplats ; pour que $\mathcal{F}''$ soit S-anaplat, il faut et il suffit que pour tout $s \in S$, l'homomorphisme $\mathcal{F}'(s) \to \mathcal{F}(s)$ soit injectif.

Démonstration. (a) Soient $\mathcal{L}'_*$ et $\mathcal{L}''_*$ des résolutions de $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ au voisinage de (s,x). On peut construire une résolution $\mathcal{L}_*$ de $\mathcal{F}$ au voisinage de (s,x) telle que $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}'_k \oplus \mathcal{L}''_k$, et la suite exacte des Tor montre que

$$\mathrm{Tor}_q^{\mathcal{O}_{S\times U}}(\mathcal{O}_U, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{pour} \quad q > 0.$$

(b) Soient $\mathcal{L}_*$ et $\mathcal{L}''_*$ des résolutions de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}''$ au voisinage de (s,x). On peut construire une résolution $\mathcal{L}'_*$ de $\mathcal{F}'$ au voisinage de (s,x) telle que $\mathcal{L}'_k = \mathcal{L}_k \oplus \mathcal{L}''_{k+1}$ pour $k \neq 1$ et $\mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}''_2 \oplus \mathcal{L}''_0$; la suite exacte des Tor montre que

$$\mathrm{Tor}_q^{\mathcal{O}_{S\times U}}(\mathcal{O}_U, \mathcal{F}') = 0 \quad \text{pour} \quad q > 0.$$

(c) Soient $\mathcal{L}_*$ et $\mathcal{L}'_*$ des résolutions de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ au voisinage de (s,x). On peut construire une résolution $\mathcal{L}''_*$ de $\mathcal{F}''$ au voisinage de (s,x) telle que $\mathcal{L}''_k = \mathcal{L}_k \oplus \mathcal{L}'_{k-1}$; la suite exacte des Tor montre que

$$\mathrm{Tor}_q^{\mathcal{O}_{S\times U}}(\mathcal{O}_U, \mathcal{F}'') = 0 \quad \text{pour} \quad q > 1$$

et que

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_{S\times U}}(\mathcal{O}_U, \mathcal{F}'') = 0$$

en (s,x) si et seulement si $\mathcal{F}'(s) \to \mathcal{F}(s)$ est injective en x. La proposition est démontrée.

PROPOSITION 4. Soient $\mathcal{F}$ un faisceau S-anaplat sur $S \times U$, et $(s,x) \in S \times U$. Toute résolution finie de $\mathcal{F}(s)$ en x provient d'une résolution de $\mathcal{F}$ au voisinage de (s,x).

<u>Démonstration</u> par récurrence sur la longueur de la résolution. La résolution donnée de $\mathcal{F}(s)$ en x peut se mettre sous la forme

$$0 \to \mathcal{L}_p(s) \to \dots \to \mathcal{L}_o(s) \to \mathcal{F}(s) \to 0 ,$$

où les $\mathcal{L}_k$ sont des faisceaux $\mathcal{O}_{S \times U}$-modules libres de type fini sur $S \times U$, les homomorphismes étant définis au voisinage de x dans U. Comme $\mathcal{F}_{(s,x)} \to \mathcal{F}(s)_x$ est surjectif, il existe un homomorphisme $\mathcal{L}_o \to \mathcal{F}$ défini au voisinage de (s,x) induisant l'homomorphisme donné $\mathcal{L}_o(s) \to \mathcal{F}(s)$ en x. D'après la proposition 1, cet homomorphisme $\mathcal{L}_o \to \mathcal{F}$ est surjectif au voisinage de (s,x), et son noyau $\mathcal{F}_1$ est S-anaplat d'après la proposition 3 (b). Enfin comme

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_{S \times U}}(\mathcal{O}_U, \mathcal{F}) = 0,$$

on a

$$\mathcal{F}_1(s) = \mathrm{Ker}[\mathcal{L}_o(s) \to \mathcal{F}(s)] ;$$

par hypothèse de récurrence la résolution

$$0 \to \mathcal{L}_p(s) \to \dots \to \mathcal{L}_1(s) \to \mathcal{F}_1(s) \to 0$$

de $\mathcal{F}_1(s)$ en x provient d'une résolution

$$0 \to \mathcal{L}_p \to \dots \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{F}_1 \to 0$$

de $\mathcal{F}_1$ au voisinage de (s,x) et

$$0 \to \mathcal{L}_p \to \dots \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_o \to \mathcal{F} \to 0$$

est une résolution de $\mathcal{F}$ au voisinage de (s,x), ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION 5. *Soit* $U = U' \times U''$, *où* $U' \subset \underline{\underline{C}}^{n'}$, $U'' \subset \underline{\underline{C}}^{n''}$, $n' + n'' = n$. *Soient* $\mathcal{F}'$ *et* $\mathcal{F}''$ *des faisceaux* S-*anaplats sur* $S \times U'$ *et* $S \times U''$ *respectivement. Le faisceau* $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \boxtimes_{\mathcal{O}_{S \times U'}} \mathcal{O}_{S \times U} \boxtimes_{\mathcal{O}_{S \times U''}} \mathcal{F}''$ *sur* $S \times U$ *est* S-*anaplat*.

Démonstration. Soient $\mathcal{L}'_*$ et $\mathcal{L}''_*$ des résolutions de $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ au voisinage de (s,x') et (s,x'') respectivement. Les complexes $\mathcal{L}'_*(s)$ et $\mathcal{L}''_*(s)$ sont des résolutions de $\mathcal{F}'(s)$ et $\mathcal{F}''(s)$ en x' et x'' respectivement, et

$$\mathcal{L}_* = \mathcal{L}'_* \boxtimes_{\mathcal{O}_{S \times U'}} \mathcal{O}_{S \times U} \boxtimes_{\mathcal{O}_{S \times U''}} \mathcal{L}''_*$$

est un complexe tel que $\mathcal{L}_*(s)$ soit une résolution de $\mathcal{F}(s)$ en (x',x''). Il résulte de la proposition 1 et des propriétés du produit tensoriel que $\mathcal{L}_*$ est une résolution de $\mathcal{F}$ au voisinage de (s,x',x''), et la proposition est démontrée.

4. Morphisme défini par un faisceau.

Soient S un espace analytique banachique, U un ouvert de $\underline{\underline{C}}^n$, soit $\mathcal{E}$ un faisceau analytique cohérent sur U , notons $\mathcal{E}_S$ le faisceau $\pi^*\mathcal{E}$ sur $S \times U$, où π désigne la projection de $S \times U$ sur U . Soient $K \subset U$ un compact convexe $\mathcal{E}$-privilégié et $\mathcal{F}$ un sous-faisceau de $\mathcal{E}_S$ tel que $\mathcal{E}_S/\mathcal{F}$ soit S-anaplat (ce qui équivaut à dire que $\mathcal{F}$ est S-anaplat et $\mathcal{F}(s) \to \mathcal{E}$ injectif pour tout $s \in S$).

L'ensemble S_1 des $s \in S$ tels que K soit privilégié pour $\mathcal{F}(s)$ et $\mathcal{E}/\mathcal{F}(s)$ est ouvert dans S et on a sur S_1 une suite exacte directe de fibrés analytiques banachiques

$$0 \to B(K,\mathcal{F}) \to B(K,\mathcal{E})_S \to B(K, \mathcal{E}_S/\mathcal{F}) \to 0 ,$$

où $B(K,\mathcal{E})_S$ désigne le fibré trivial sur S de fibre $B(K,\mathcal{E})$.

Soit $\mathcal{G}_K(\mathcal{E})$ l'ouvert de $\mathcal{G}_{B(K)}(B(K,\mathcal{E}))$ formé des sous $B(K)$-modules de $B(K,\mathcal{E})$ admettant une résolution finie directe. Nous allons définir un morphisme $\beta_K(\mathcal{F})$ de S_1 dans $\mathcal{G}_K(\mathcal{E})$ tel que $\beta_K(\mathcal{F})(s) = B(K,\mathcal{F}(s))$ pour tout point s de S_1.

Soit s un point de S_1. D'après le théorème A, il existe une résolution finie de $\mathcal{F}$ sur $s \times K$, qu'on peut écrire comme une suite exacte

$$0 \to \mathcal{L}_p \to \dots \to \mathcal{L}_o \to \mathcal{E}_S \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}_k = \mathcal{O}_{S\times U}^{r_k}.$$

On en déduit un complexe analytique de fibrés vectoriels

$$0 \to B(K,\mathcal{L}_p) \to \dots \to B(K,\mathcal{L}_o) \to B(K,\mathcal{E}_S)$$

au voisinage de s, qui donne une suite exacte directe en s, donc sur un voisinage V de s. D'où un morphisme de V dans

$$\mathcal{S}_K(0,\mathcal{O}_U^{r_p},\dots,\mathcal{O}_U^{r_o},\mathcal{E}) = \mathcal{S}_{B(K)}(0,B(K)^{r_p},\dots,B(K)^{r_o},B(K,\mathcal{E})).$$

En composant avec le morphisme

$$\mathcal{S}_K(0,\mathcal{O}_U^{r_p},\dots,\mathcal{O}_U^{r_o},\mathcal{E}) \to \mathcal{G}_K(\mathcal{E}),$$

on obtient un morphisme de V dans $\mathcal{G}_K(\mathcal{E})$.

Ce morphisme ne dépend pas du choix de la résolution de $\mathcal{F}$ sur $s \times K$: cela résulte du corollaire 2 du théorème 1 de l'exposé sur les théorèmes A et B, qui donne une équivalence d'homotopie entre deux résolutions. Les morphismes ainsi définis localement se recollent en un morphisme $\beta_K(\mathcal{F})$ de S_1 dans $\mathcal{G}_K(\mathcal{E})$.

Il est immédiat à partir des définitions qu'on a la propriété de fonctorialité suivante : Soit $f : S' \to S$ un morphisme d'espaces analytiques banachiques, et posons $\mathcal{F}' = (f \times I_U)^* \mathcal{F}$. Le faisceau $\mathcal{F}'$ est un sous-faisceau de $\mathcal{E}_{S'}$, tel que $\mathcal{E}_{S'}/\mathcal{F}'$ soit S'-anaplat ; définissons S'_1 comme S_1. Alors $S'_1 = f^{-1}(S_1)$ et

$$\beta_K(\mathcal{F}') = \beta_K(\mathcal{F}) \circ f : S'_1 \to \mathcal{G}_K(\mathcal{E}).$$

5. <u>Faisceau défini par un morphisme</u>.

Soit U un ouvert de $\underline{\underline{C}}^n$, soit $\mathcal{E}$ un faisceau analytique cohérent sur U, soit $K \subset U$ un compact convexe $\mathcal{E}$-privilégié d'intérieur non vide ; rappelons qu'on note $\mathcal{G}_K(\mathcal{E})$ l'ouvert de $\mathcal{G}_{B(K)}(B(K, \mathcal{E}))$ formé des sous modules de $B(K, \mathcal{E})$ admettant une résolution finie directe.

Soient S un espace analytique banachique et f un morphisme de S dans $\mathcal{G}_K(\mathcal{E})$. Nous allons associer à f un sous faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}_S$ restreint à $S \times \overset{\circ}{K}$ tel que $\mathcal{E}_S/\mathcal{F}$ soit anaplat sur $S \times \overset{\circ}{K}$.

Soient s un point de S, et $F = f(s) \in \mathcal{G}_K(\mathcal{E})$. Le module F admet une résolution finie directe, i.e. une suite exacte directe

$$0 \to B(K)^{r_p} \to \dots \to B(K)^{r_o} \xrightarrow{\varepsilon} B(K, \mathcal{E})$$

telle que $\operatorname{Im} \varepsilon = F$. Considérons

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{B(K)}(0, B(K)^{r_p}, \dots, B(K)^{r_o}, B(K, \mathcal{E})) ;$$

le morphisme $\mathcal{S} \to \mathcal{G}_K(\mathcal{E})$ admettant des sections locales, il existe un voisinage S' de s dans S tel que $f|_{S'}$ se factorise en un morphisme

$g : S' \to \mathcal{S}$. Au dessus de $S' \times \overset{\circ}{K}$, le morphisme g donne naissance à un complexe de faisceaux

$$\mathcal{L}_* : 0 \to \mathcal{O}^{r_p}_{S \times U} \to \dots \to \mathcal{O}^{r_o}_{S \times U} \to \mathcal{E}_S .$$

Il résulte du lemme 1 (b) que pour tout point $s' \in S'$, le complexe

$$\mathcal{L}_*(s') : 0 \to \mathcal{O}^{r_p}_S \to \dots \to \mathcal{O}^{r_o}_S \to \mathcal{E}$$

est une suite exacte sur $\overset{\circ}{K}$, et la proposition 1 montre que $\mathcal{L}_*$ est une suite exacte sur $S' \times \overset{\circ}{K}$. L'image $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}^{r_o}_{S \times U} \to \mathcal{E}_S$ est donc un sous faisceau anaplat de $\mathcal{E}_S$ au dessus de $S' \times \overset{\circ}{K}$ et la proposition 3 (c) montre que $\mathcal{E}_S/\mathcal{F}$ est anaplat.

Le faisceau $\mathcal{F}$ ne dépend pas du choix du relèvement g de $\mathcal{F}$: on le vérifie à l'aide du lemme utilisé dans la démonstration de la proposition 3 de l'exposé précédent. Les faisceaux ainsi construits localement se recollent en un sous faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}_S$ sur $S \times \overset{\circ}{K}$.

On a la propriété de fonctorialité suivante : si $h : S' \to S$ est un morphisme d'espaces analytiques banachiques, le faisceau associé à $f \circ h : S' \to \mathcal{G}_K(\mathcal{E})$ est $\mathcal{F}' = (h \times I_{\overset{\circ}{K}})^* \mathcal{F}$. En particulier, si on note $\mathcal{R}$ le sous faisceau de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_K(\mathcal{E})}$ restreint à $\mathcal{G}_K(\mathcal{E}) \times \overset{\circ}{K}$ associé au morphisme identique de $\mathcal{G}_K(\mathcal{E})$, le faisceau $\mathcal{F}$ associé à $f : S \to \mathcal{G}_K(\mathcal{E})$ n'est autre que $(f \times I_{\overset{\circ}{K}})^* \mathcal{R}$. Le faisceau $\mathcal{R}$ sera dans la suite qualifié d'universel.

6. Aller-retours.

Soit U un ouvert de $\underline{\underline{C}}^n$, soit $\mathcal{E}$ un faisceau analytique cohérent sur U, soient $K \subset U$ un compact $\mathcal{E}$-privilégié, d'intérieur non vide.

Si S est un espace analytique banachique et $\mathcal{F}$ un sous faisceau de $\mathcal{E}_S$ tel que $\mathcal{E}_S/\mathcal{F}$ soit S-anaplat, on a associé à $\mathcal{F}$ un morphisme $\beta_K(\mathcal{F})$ d'un ouvert S_1 de S dans $\mathcal{G}_K(\mathcal{E})$. Le faisceau $(\beta_K(\mathcal{F}) \times I_{\overset{\circ}{K}})^*\mathcal{R}$ associé à $\beta_K(\mathcal{F})$ n'est autre que la restriction de $\mathcal{F}$ à $S_1 \times \overset{\circ}{K}$. Cela résulte des constructions.

Soit $K' \subset \overset{\circ}{K}$ un compact $\mathcal{E}$-privilégié. Le faisceau universel $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{G}_K(\mathcal{E}) \times \overset{\circ}{K}$ définit un morphisme $\beta_{K'}(\mathcal{R})$ d'un ouvert $\mathcal{G}_1$ de $\mathcal{G}_K(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{G}_{K'}(\mathcal{E})$. Avec les notations du n°5 de l'exposé précédent, $\rho_0 : B(K) \to B(K')$ et $\rho_1 : B(K, \mathcal{E}) \longrightarrow B(K', \mathcal{E})$ désignant les restrictions, on a $\mathcal{G}_1 \subset W$ et $\beta_{K'}(\mathcal{R})$ est la restriction à $\mathcal{G}_1$ du morphisme ρ_* défini dans la proposition 3 dudit exposé. Cela résulte encore des constructions.

Comme ρ_0 et ρ_1 sont des applications compactes, on peut appliquer la proposition 4 dudit exposé : le morphisme $\beta_{K'}(\mathcal{R})$ est compact en tout point.

7. Faisceaux S-anaplats sur $S \times X$.

Soient S un espace analytique banachique, X un espace analytique de dimension finie, $\mathcal{F}$ un faisceau $\mathcal{O}_{S \times X}$-module sur $S \times X$. Si $\varphi : X_1 \to U$ est un isomorphisme d'un ouvert X_1 de X sur un sous espace analytique fermé Y d'un ouvert U de $\underline{\underline{C}}^n$, posons

$$\varphi_S = I_S \times \varphi : S \times X_1 \to S \times U .$$

Le faisceau $\varphi_{S*}\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_{S \times U}$-module qui a pour fibre $\mathcal{F}_{(s,x)}$ en $(s, \varphi(x))$ et 0 sur $S \times (U-Y)$.

PROPOSITION 6. <u>Soient</u> U' <u>et</u> U'' <u>des ouverts de</u> $\underline{\underline{C}}^{n'}$ <u>et</u> $\underline{\underline{C}}^{n''}$ <u>respectivement,</u> X_1 <u>un ouvert de</u> X, φ' <u>et</u> φ'' <u>des isomorphismes de</u> X_1 <u>sur des sous espaces analytiques fermés</u> Y' <u>et</u> Y'' <u>de</u> U' <u>et</u> U'' <u>respectivement</u>. <u>Si</u> $\varphi'_{S*}\mathcal{F}$ <u>est</u> S-<u>anaplat, il en est de même de</u> $\varphi''_{S*}\mathcal{F}$.

Traitons d'abord un cas particulier :

LEMME 2. <u>Soient</u> U' <u>un ouvert de</u> $\underline{\underline{C}}^{n'}$, U'' <u>un voisinage de</u> 0 <u>dans</u> $\underline{\underline{C}}^{n''}$, $U = U' \times U'' \subset \underline{\underline{C}}^{n}$, $n = n'+n''$, <u>et soit</u> $i : U' \to U$ <u>l'injection</u> $x' \longmapsto (x',0)$. <u>Soient</u> $\mathcal{F}'$ <u>un faisceau</u> $\mathcal{O}_{S\times U'}$-<u>module sur</u> $S\times U'$ <u>et</u> $\mathcal{F} = i_{S*}\mathcal{F}'$. <u>Le faisceau</u> $\mathcal{O}_{S\times U}$-<u>module</u> $\mathcal{F}$ <u>est</u> S-<u>anaplat si et seulement si</u> $\mathcal{F}'$ <u>est</u> S-<u>anaplat</u>.

<u>Démonstration</u>.

(a) $\mathcal{F}'$ <u>anaplat</u> $\Longrightarrow \mathcal{F}$ <u>anaplat</u>. Soit C le faisceau $\mathcal{O}_{U''}/\underline{\underline{m}}$ sur U'', où $\underline{\underline{m}}$ est l'idéal maximal de l'origine. On a

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}' \boxtimes_{\mathcal{O}_{S\times U'}} \mathcal{O}_{S\times U} \boxtimes_{\mathcal{O}_{S\times U''}} C_S$$

et l'assertion (a) résulte de la proposition 5.

(b) $\mathcal{F}$ <u>anaplat</u> $\Longrightarrow \mathcal{F}'$ <u>anaplat</u>. Soit (s,x') un point de $S\times U'$. Le faisceau $\mathcal{F}(s) = i_*\mathcal{F}'(s)$ est cohérent, donc $\mathcal{F}'(s)$ est cohérent et admet au voisinage de x' une résolution finie

$$0 \to \mathcal{O}_{U'}^{r_p} \to \dots \to \mathcal{O}^{r_0} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{F}'(s) \to 0 .$$

Nous démontrons l'assertion (b) par récurrence sur p . L'homomorphisme ε se relève en $\bar{\varepsilon} : \mathcal{O}_{S\times U'}^{r_0} \to \mathcal{F}'$ au voisinage de (s,x') ; posons $\mathcal{F}'_1 = \operatorname{Ker}\bar{\varepsilon}$. D'après la proposition 1, l'homomorphisme

$$i_{S*}\bar{\varepsilon} : i_{S*}\,\mathcal{O}_{S\times U'}^{r_0} \to \mathcal{F}$$

est surjectif au voisinage de $(s,x',0)$, et la proposition 3 montre que son noyau $\mathcal{F}_1 = i_{S*}\mathcal{F}'_1$ est anaplat et que $\mathcal{F}_1(s) = \mathrm{Ker}\ i_*\mathcal{E} = i_*\mathrm{Ker}\,\mathcal{E}$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence : $\mathcal{F}'_1$ est S-anaplat au voisinage de (s,x'). Il en résulte que $\mathcal{F}'$ est S-anaplat au voisinage de (s,x') et le lemme est démontré.

Démonstration de la proposition. Posons

$$U = U' \times U'' \quad \text{et} \quad \varphi = (\varphi', \varphi'') : X_1 \to U ;$$

nous allons montrer que $\varphi_{S*}\mathcal{F}$ est S-anaplat si et seulement si $\varphi'_{S*}\mathcal{F}$ l'est. Soit $x \in X_1$. Il existe un morphisme $h : U'_1 \to U''$, où U'_1 est un voisinage de $\varphi'(x)$ dans U', tel que $\varphi'' = h \circ \varphi'$ au voisinage de x ; d'où $\varphi = j \circ \varphi'$, où $j : U'_1 \to U$ est l'immersion $x' \longmapsto (x', h(x'))$. Quitte à rétrécir U'_1 , on peut définir un isomorphisme

$$\psi : U_1 \to U'_1 \times U''_1 ,$$

où U_1 est un voisinage de $\varphi(x)$ dans U et U''_1 un voisinage de 0 dans $\underline{\underline{C}}^{n''}$, par $\psi(x', x'') = (x', x'' - h(x'))$. Le lemme montre alors que $\varphi_{S*}\mathcal{F}$ est S-anaplat sur $S \times U_1$ si et seulement si $\varphi'_{S*}\mathcal{F}$ est S-anaplat sur $S \times U'_1$. Par suite, $\varphi'_{S*}\mathcal{F}$ anaplat $\Longleftrightarrow \varphi_{S*}\mathcal{F}$ anaplat $\Longleftrightarrow \varphi''_{S*}\mathcal{F}$ anaplat, et la proposition est démontrée.

DÉFINITION. <u>Nous dirons que le faisceau</u> $\mathcal{O}_{S \times X}$<u>-module</u> $\mathcal{F}$ <u>est</u> S-<u>anaplat si, pour tout point</u> x <u>de</u> X, <u>il existe un voisinage ouvert</u> X_1 <u>de</u> x <u>dans</u> X, <u>et un isomorphisme</u> φ <u>de</u> X_1 <u>sur un sous espace analytique fermé d'un ouvert</u> U <u>de</u> $\underline{\underline{C}}^n$, <u>tel que le faisceau</u> $\mathcal{O}_{S \times U}$<u>-module</u> $\varphi_{S*}\mathcal{F}$ <u>soit</u> S-<u>anaplat</u>.