

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

A. DOUADY

L'espace analytique des sous modules d'un module de Banach

Séminaire Jean Leray, n° 4 (1964-1965), p. 60-73

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964-1965__4_60_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'ESPACE ANALYTIQUE DES SOUS MODULES D'UN MODULE DE BANACH

par
A. DOUADY

1. Variété de morphismes directs (complément au premier exposé).

Soient E et E' deux espaces de Banach, notons $\mathcal{P}(E, E')$ l'ensemble des triplets $(F, h, F') \in \mathcal{G}(E) \times \mathcal{L}(E, E') \times \mathcal{G}(E')$ tels que $F = \text{Ker } h$ et $F' = \text{Im } h$.

PROPOSITION 0. a) Soient E et E' deux espaces de Banach. L'ensemble $\mathcal{P}(E, E')$ est une sous-variété directe localement fermée de

$$\mathcal{G}(E) \times \mathcal{L}(E, E') \times \mathcal{G}(E').$$

La projection p_2 induit une immersion directe injective de $\mathcal{P}(E, E')$ dans $\mathcal{L}(E, E')$. Les projections p_{12} et p_{23} induisent des isomorphismes de $\mathcal{P}(E, E')$ sur des sous-variétés directes localement fermées de $\mathcal{G}(E) \times \mathcal{L}(E, E')$ et $\mathcal{L}(E, E') \times \mathcal{G}(E')$ respectivement. La projection p_{13} induit une submersion directe de $\mathcal{P}(E, E')$ dans $\mathcal{G}(E) \times \mathcal{G}(E')$.

b) Soient E, E' et E'' trois espaces de Banach. L'ensemble

$$\mathcal{P}(E, E', E'') = \mathcal{P}(E, E') \times \mathcal{G}(E') \mathcal{P}(E', E'')$$

est une sous-variété directe localement fermée de

$$\mathcal{G}(E) \times \mathcal{L}(E, E') \times \mathcal{G}(E') \times \mathcal{L}(E', E'') \times \mathcal{G}(E'').$$

La projection p_{24} induit un isomorphisme de $\mathcal{P}(E, E', E'')$ sur une sous-variété directe localement fermée de $\mathcal{L}(E, E') \times \mathcal{L}(E', E'')$, qui est ouverte dans l'ensemble $\mathcal{D}(E, E', E'')$ des couples $(h, h') \in \mathcal{L}(E, E') \times \mathcal{L}(E', E'')$ tels que

$h' \circ h = 0$. La projection p_{135} induit une submersion directe de $\mathcal{S}(E, E', E'')$ dans $\mathcal{G}(E) \times \mathcal{G}(E') \times \mathcal{G}(E'')$.

Démonstration. a) Soient (F_0, G_0) et (F'_0, G'_0) des couples de sous-espaces vectoriels fermés supplémentaires de E et E' respectivement. L'expression de $\mathcal{S}(E, E')$ dans la carte

$$\psi_{F_0, G_0} \times \mathcal{L}(E, E') \times \psi_{F'_0, G'_0} : U_{G_0} \times \mathcal{L}(E, E') \times U_{G'_0} \rightarrow W,$$

où

$$W = \mathcal{L}(F_0, G_0) \times \mathcal{L}(E, E') \times \mathcal{L}(F'_0, G'_0)$$

est l'ensemble des triplets $(f, h = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}, f')$ vérifiant les conditions :

- (i) : c inversible ;
- (ii) : $b = dc^{-1} a$;
- (iii) : $f = -c^{-1} a$;
- (iv) : $f' = dc^{-1}$.

En identifiant W à $V \times V'$, où

$$V = \{(a, c, d)\} \quad \text{et} \quad V' = \{(b, f, f')\} ,$$

on voit que l'expression de $\mathcal{S}(E, E')$ est le graphe d'une application analytique d'un ouvert de V dans V' . Ceci montre que $\mathcal{S}(E, E')$ est une sous-variété directe de $\mathcal{G}(E) \times \mathcal{L}(E, E') \times \mathcal{G}(E')$ et que p_2 est une immersion. L'injectivité de p_2 est évidente. Les projections p_{12} et p_{23} sont donc aussi des immersions injectives, nous devons voir que ce sont des homéomorphismes sur leurs images. Cela résulte de ce que deux des conditions :

$$\text{Ker } h \in U_{G_0} \quad ; \quad c \text{ inversible} \quad ; \quad \text{Im } h \in U_{G'_0} \quad ;$$

entraînent la troisième.

En identifiant W à $V_1 \times V'_1$, où $V_1 = \{(f, f', c)\}$ et $V'_1 = \{(a, b, d)\}$, on voit que l'expression de $\mathcal{Y}(E, E')$ est le graphe d'une application analytique de V_1 dans V'_1 . On en déduit que p_{13} est une submersion directe.

b) Le fait que $\mathcal{Y}(E, E', E'')$ soit une sous-variété directe de

$$\mathcal{Q}(E) \times \mathcal{L}(E, E') \times \mathcal{Q}(E') \times \mathcal{L}(E', E'') \times \mathcal{Q}(E'')$$

résulte de ce que $p_3 : \mathcal{Y}(E, E') \rightarrow \mathcal{Q}(E')$ et $p_1 : \mathcal{Y}(E', E'') \rightarrow \mathcal{Q}(E')$ sont des submersions directes. Il est également immédiat que p_{135} est une submersion directe et que p_{24} est une immersion directe injective. Nous devons voir que p_{24} induit un homéomorphisme de $\mathcal{Y}(E, E', E'')$ sur un ouvert de $\mathcal{D}(E, E', E'')$. Si (F_0, G_0) , (F'_0, G'_0) , (F''_0, G''_0) sont des couples de sous-espaces vectoriels fermés supplémentaires de E , E' , E'' respectivement, et si

$$h = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E, E') \quad \text{et} \quad h' = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E', E''),$$

les relations

$$\langle\langle h' \circ h = 0 ; \quad c \text{ inversible} ; \quad c' \text{ inversible} ; \rangle\rangle$$

entraînent

$$\langle\langle \text{Ker } h \in U_{G_0} ; \quad \text{Im } h = \text{Ker } h' \in U_{G'_0} ; \quad \text{Im } h' \in U_{G''_0} \rangle\rangle .$$

Notre dernière assertion en découle et la proposition est démontrée.

2. L'espace analytique des sous modules directs d'un module de Banach.

Soient A une algèbre de Banach, et E un A -module de Banach. On appellera sous A -module direct de E tout sous A -module fermé de E qui admette un supplémentaire topologique en tant qu'espace vectoriel. Nous allons munir l'ensemble $\mathcal{Q}_A(E)$ des sous A -modules directs de E d'une structure de sous-espace analytique banachique de $\mathcal{Q}(E)$.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels fermés supplémentaires de E ; définissons une application analytique ψ de l'ouvert U_G de $\mathcal{C}_A(E)$ (formé des sous-espaces de E admettant G comme supplémentaire) dans $\mathcal{L}(A \hat{\otimes} F, G)$ (qui n'est autre que l'espace des applications bilinéaires continues de $A \times F$ dans G , la topologie dont on munit le produit tensoriel étant ici la topologie π), en posant

$$\psi(F') = p_{F'} \circ m \circ (I_A \hat{\otimes} j_{F'}),$$

où $p_{F'}$ désigne la projection de E sur G de noyau F' , où $m : A \hat{\otimes} E \rightarrow E$ est la multiplication, et où $j_{F'}$ est l'injection de F dans E d'image F' telle que $j_{F'}(x) - x \in G$ pour $x \in F$. On a $\psi^{-1}(0) = \mathcal{C}_A(E) \cap U_G$.

Soient (F_0, G_0) et (F_1, G_1) deux couples de sous-espaces vectoriels fermés supplémentaires de E , et définissons ψ_0 et ψ_1 comme ci-dessus. Posons $U_1 = U_{G_1}$. Les structures de sous-espace analytique banachique de $\mathcal{C}_A(E)$ induites sur $\mathcal{C}_A(E) \cap U_0 \cap U_1$ par les modèles $\mu(U_0, \mathcal{L}(A \hat{\otimes} F_0, G_0), \psi_0)$ et $\mu(U_1, \mathcal{L}(A \hat{\otimes} F_1, G_1), \psi_1)$ coïncident, comme on le voit en se ramenant aux deux cas particuliers suivants :

(i) $G_0 = G_1$. Dans ce cas, $\psi_1 = \varepsilon^* \circ \psi_0$, où ε est l'isomorphisme de F_1 sur F_0 parallèlement à $G = G_0 = G_1$, et

$$\varepsilon^* : \mathcal{L}(A \hat{\otimes} F_0, G) \rightarrow \mathcal{L}(A \hat{\otimes} F_1, G)$$

l'isomorphisme associé à ε .

(ii) $F_0 = F_1$. Dans ce cas, $\psi_1(F') = \varepsilon(F') \circ \psi_0(F') \circ (I_A \hat{\otimes} \gamma(F'))$ pour $F' \in U_0 \cap U_1$, où $\varepsilon(F')$ est l'isomorphisme de G_0 sur G_1 parallèlement à F' et $\gamma(F') = j_0(F')^{-1} \circ j_1(F')$, en notant $j_i(F')$ l'isomorphisme de

F sur F' parallèlement à G_1 . Les applications ε et γ de $U_0 \cap U_1$ dans $\mathcal{L}(G_0, G_1)$ et $\mathcal{L}(F, F')$ respectivement sont analytiques.

Il existe donc sur $\mathcal{C}_A(E)$ une structure de sous-espace analytique banachique de $\mathcal{C}(E)$ et une seule qui, pour tout couple (F, G) de sous-espaces supplémentaires de E , induise sur $\mathcal{C}_A(E) \cap U_G$ la structure décrite ci-dessus. L'ensemble $\mathcal{C}_A(E)$ sera toujours muni de cette structure.

3. Le morphisme Im .

Soit A une algèbre de Banach, et soient E et E' deux A -modules de Banach. On notera $\mathcal{P}_A(E, E')$ l'espace analytique banachique

$$\text{Hom}_A(E, E') \times_{\mathcal{L}(E, E')} \mathcal{P}(E, E').$$

PROPOSITION 1. L'application analytique $p_3 : \mathcal{P}(E, E') \rightarrow \mathcal{C}(E')$ induit un morphisme $\mathcal{P}_A(E, E') \rightarrow \mathcal{C}_A(E')$.

Remarque : Ensemblistement, cette proposition dit seulement que l'image d'une application A -linéaire de E dans E' est un sous A -module de E' .

Démonstration*. Soient (F_0, G_0) et (F'_0, G'_0) des couples de sous-espaces vectoriels fermés supplémentaires de E et E' respectivement et soit $s = (F, f, F') \in \mathcal{P}_A(E, E')$, avec $F \in U_{G_0} \subset \mathcal{C}(E)$, $f \in \text{Hom}_A(E, E')$, $F' \in U_{G'_0} \subset \mathcal{C}(E')$.

*) Dans le calcul qui suit, nous ferons l'abus de notation suivant : on se fixe un espace analytique banachique T quelconque ; quand nous écrivons $x \in X$, cela signifiera que x est un morphisme de T dans X ; si $\varphi : X \rightarrow Y$ est un morphisme, nous écrivons $\varphi(x)$ pour $\varphi \circ x$, etc...

Il s'agit de montrer que $F' \in \mathcal{Y}_A(E')$. La question étant locale, cela suffira, et en vertu de la proposition 2 de l'exposé sur les espaces analytiques banachiques, cela se ramène à montrer que $\psi'(F') = 0$, où $\psi' : U_{G'_0} \rightarrow \mathcal{L}(A \hat{\otimes} F'_0, G'_0)$ est l'application définie au n° précédent, soit

$$\psi'(F') = p_{F'} \circ m \circ (I_A \hat{\otimes} j_{F'}).$$

Or $j_{F'} = f|_{G'_0} \circ u(f)^{-1}$, où u est l'application composée

$$\text{Hom}_A(E, E') \rightarrow \mathcal{L}(E, E') \rightarrow \mathcal{L}(G_0, F'_0).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \psi'(F') &= p_{F'} \circ m \circ (I_A \hat{\otimes} f|_{G'_0}) \circ (I_A \hat{\otimes} u(f)^{-1}) \\ &= p_{F'} \circ f \circ m|_{A \hat{\otimes} G'_0} \circ (I_A \hat{\otimes} u(f)^{-1}) = 0, \end{aligned}$$

car $p_{F'} \circ f = 0$ dès que $(F, f, F') \in \mathcal{Y}(E, E')$. Ceci démontre la proposition.

On démontrerait de même que l'application analytique $p_1 : \mathcal{Y}(E, E') \rightarrow \mathcal{Y}(E)$ induit un morphisme $\mathcal{Y}_A(E, E') \rightarrow \mathcal{Y}_A(E)$.

PROPOSITION 2. Si E est de la forme $A \hat{\otimes} L$, où L est un espace de Banach, le morphisme

$$\mathcal{Y}_A(E, E') \rightarrow \mathcal{Y}_A(E')$$

est lisse.

Rappelons qu'un morphisme $Y \rightarrow X$ est dit lisse si, pour tout point $y \in Y$, il existe un voisinage V de l'image x de y dans X et un voisinage W de y dans Y tels que l'image de W soit dans V et que W soit isomorphe, comme espace analytique au-dessus de V , à un produit $V \times U$, où U est un ouvert d'un espace de Banach.

Démonstration*. Soit (F'_0, G'_0) un couple de sous-espaces vectoriels fermés supplémentaires de E' , et notons π la projection de E' sur F'_0 de noyau G'_0 .

(i) Définissons un morphisme

$$\alpha : \mathcal{Y}_A(E, E') \rightarrow \mathcal{Q}_A(E') \times \mathcal{L}(L, F'_0)$$

par $\alpha(s) = (F', \pi \circ f|_L)$ pour $s = (F, f, F') \in \mathcal{Y}_A(E, E')$.

(ii) Définissons un morphisme

$$\beta : U_{G'_0} \times \mathcal{L}(L, F'_0) \rightarrow \text{Hom}_A(E, E') \times U_{G'_0}$$

par $\beta(F', u) = (f, F')$, où $f = m \circ (I_A \hat{\otimes} j_{F'}) \circ u$.

Si $F' \in \mathcal{Q}_A(E')$, on a

$$p_{F'} \circ m \circ (I_A \hat{\otimes} j_{F'}) = 0,$$

d'où

$$p_{F'} \circ f = p_{F'} \circ m \circ (I_A \hat{\otimes} j_{F'}) \circ (I_A \hat{\otimes} u) = 0.$$

Il en résulte que β induit un morphisme de Ω dans $\mathcal{Y}_A(E, E')$, où Ω désigne l'ouvert de $\mathcal{Q}_A(E') \times \mathcal{L}(L, F'_0)$ formé des couples (F', u) tels que F' appartienne à $U_{F'_0}$ et que $\pi \circ f \in \mathcal{L}(E, F'_0)$ soit un épimorphisme direct, et où $\mathcal{Y}_A(E, E')$ est plongé dans $\text{Hom}_A(E, E') \times \mathcal{Q}(E')$.

(iii) Il est immédiat que $\alpha \circ \beta = I_\Omega$. Montrons que $\beta \circ \alpha$ est l'identité de l'ouvert W de $\mathcal{Y}_A(E, E')$ formé des couples (f, F') tels que F' appartienne à $U_{G'_0}$. Pour $s = (f, F') \in W$, posons $\beta(\alpha(s)) = t = (g, F')$. On a $\alpha(t) = \alpha \circ \beta \circ \alpha(s) = \alpha(s)$, soit $\pi \circ g|_L = \pi \circ f|_L$. Comme $f = j_{F'} \circ \pi \circ f$ et $g = j_{F'} \circ \pi \circ g$, ceci entraîne $g|_L = f|_L$, d'où $g = f$ car $\text{Hom}_A(E, E') = \mathcal{L}(L, E')$.

La proposition est démontrée.

*) Voir note précédente.

COROLLAIRE : Soient A une algèbre de Banach, E un A -module de Banach, L_0, \dots, L_r des espaces de Banach. Le morphisme

$$\mathcal{P}_A(A \hat{\otimes} L_r, \dots, A \hat{\otimes} L_0, E) \rightarrow \mathcal{Q}_A(E)$$

est lisse.

Démonstration par récurrence. Le morphisme

$$\mathcal{P}_A(A \hat{\otimes} L_r, \dots, A \hat{\otimes} L_0, E) \rightarrow \mathcal{P}_A(A \hat{\otimes} L_{r-1}, \dots, A \hat{\otimes} L_0, E)$$

se déduit du morphisme

$$\mathcal{P}_A(A \hat{\otimes} L_r, A \hat{\otimes} L_{r-1}) \rightarrow \mathcal{Q}_A(A \hat{\otimes} L_{r-1})$$

par changement de base. Il est donc lisse. Comme le morphisme

$$\mathcal{P}_A(A \hat{\otimes} L_{r-1}, \dots, A \hat{\otimes} L_0, E) \rightarrow \mathcal{Q}_A(E)$$

est lisse par hypothèse de récurrence, le morphisme

$$\mathcal{P}_A(A \hat{\otimes} L_r, \dots, A \hat{\otimes} L_0, E) \rightarrow \mathcal{Q}_A(E),$$

composé de deux morphismes lisses, est lisse.

4. Présentations finies directes.

Soit A une algèbre de Banach. Un A -module de Banach F sera dit de type fini direct s'il existe un épimorphisme direct A -linéaire $\varepsilon : A^r \rightarrow F$, où $r \in \underline{\mathbb{N}}$.

Si F est de type fini direct, tout épimorphisme A -linéaire $\varepsilon' : A^{r'} \rightarrow F$ est direct. En effet, soit $\varepsilon : A^r \rightarrow F$ un épimorphisme direct, on peut construire une application A -linéaire, nécessairement continue, $f : A^r \rightarrow A^{r'}$ telle que $\varepsilon = \varepsilon' \circ f$; si $\sigma \in \mathcal{Q}(F, A^r)$ est une section de ε , l'application $\sigma' = f \circ \sigma \in \mathcal{Q}(F, A^{r'})$ est une section de ε' .

Si F admet une présentation finie directe, i.e. une suite exacte directe A -linéaire $A^q \rightarrow A^r \rightarrow F \rightarrow 0$, toute présentation finie de F est directe. En effet, si $\varepsilon : A^r \rightarrow F$ et $\varepsilon' : A^{r'} \rightarrow F$ sont deux épimorphismes directs, considérons $\varepsilon'' = (\varepsilon, \varepsilon') : A^{r+r'} \rightarrow F$; on a

$$\text{Ker } \varepsilon'' \cong \text{Ker } \varepsilon \oplus A^{r'} \cong A^r \oplus \text{Ker } \varepsilon',$$

donc si $\text{Ker } \varepsilon$ est de type fini direct, il en est de même de $\text{Ker } \varepsilon''$.

Soit E un A -module de Banach. Il résulte du corollaire de la proposition 2 que l'ensemble des sous A -modules directs de E admettant une présentation finie directe est ouvert dans $\mathcal{Q}_A(E)$.

5. Changement d'algèbre.

Soient A et A' deux algèbres de Banach, E un A -module de Banach, E' un A' -module de Banach, $\rho_0 : A \rightarrow A'$ un homomorphisme d'algèbres continu, qu'on ne suppose pas d'image fermée, et $\rho_1 : E \rightarrow E'$ une application continue ρ_0 -linéaire (i.e. A -linéaire quand on considère E' comme un A -module au moyen de ρ_0), de sorte que $\rho = (\rho_0, \rho_1)$ est un dimorphisme.

Soit $F \in \mathcal{Q}_A(E)$ un sous A -module admettant une présentation finie directe, que nous considérerons comme un point $s \in \mathcal{Y}_A(A^q, A^r, E)$. L'espace analytique banachique $\mathcal{Y}_A(A^q, A^r, E)$ s'identifie à un ouvert du sous-espace $\mathcal{D}_A(A^q, A^r, E)$ de $\text{Hom}_A(A^q, A^r) \times \text{Hom}_A(A^r, E)$ formé des couples (u, v) tels que $v \circ u = 0^{(*)}$.

(*) Comme $\text{Hom}_A(A^q, E)$ est un sous-espace direct de $\mathcal{L}(A^q, E)$, les modèles définis par la multiplication

$$m : \text{Hom}_A(A^q, A^r) \times \text{Hom}_A(A^r, E) \rightarrow \text{Hom}_A(A^q, E)$$

et par $i \circ m$, où :

$$i : \text{Hom}_A(A^q, E) \rightarrow \mathcal{L}(A^q, E)$$

est l'injection canonique, coïncident.

On définit

$$\rho_* : \text{Hom}_A(A^q, A^r) \times \text{Hom}_A(A^r, E) \rightarrow \text{Hom}_{A'}(A'^q, A'^r) \times \text{Hom}_{A'}(A'^r, E')$$

par extension des scalaires de A à A' et au moyen de ρ_1 , et ρ_* induit un morphisme de $\mathcal{D}_A(A^q, A^r, E)$ dans $\mathcal{D}_{A'}(A'^q, A'^r, E')$.

Considérons l'hypothèse suivante :

$$(H) \quad \rho_*(s) \in S_{A'}(A'^q, A'^r, E') .$$

Remarquons que cette hypothèse porte seulement sur F : elle signifie que ρ_1 identifie $A' \otimes_A F$ à un sous A' -module direct F' de E' admettant une présentation finie directe.

PROPOSITION 3. L'ensemble W des $F \in \mathcal{G}_A(E)$ vérifiant (H) est ouvert dans $\mathcal{G}_A(E)$, et il existe un morphisme et un seul ρ_* de W dans $\mathcal{G}_{A'}(E')$ tel que, quels que soient q et r , le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_A(A^q, A^r, E) \Big|_W & \xrightarrow{\rho_*} & \mathcal{Y}_{A'}(A'^q, A'^r, E') \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \xrightarrow{\rho_*} & \mathcal{G}_{A'}(E') \end{array}$$

soit commutatif.

Démonstration. Pour tous q, r le morphisme $p : \mathcal{Y}_A(A^q, A^r, E) \rightarrow \mathcal{G}_A(E)$ est lisse, donc ouvert, et en posant

$$X_{q,r} = \mathcal{Y}_A(A^q, A^r, E) \cap \rho_*^{-1}(\mathcal{Y}_{A'}(A'^q, A'^r, E')) ,$$

$W_{q,r} = p(X_{q,r})$ est ouvert dans $\mathcal{G}_A(E)$. Donc $W = \bigcup W_{q,r}$ est ouvert.

Le morphisme $X_{q,r} \rightarrow W_{q,r}$ étant lisse et surjectif, c'est un épimorphisme

effectif^(*) dans la catégorie des espaces analytiques banachiques, et pour montrer l'existence et l'unicité d'un morphisme $\rho_{q,r} : W_{q,r} \rightarrow \mathcal{G}_{A'}(E')$ rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_{q,r} & \longrightarrow & \mathcal{P}_{A'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ W_{q,r} & \longrightarrow & \mathcal{G}_{A'} \end{array}$$

commutatif, il suffit de montrer que $\rho_* \times \rho_*$ induit un morphisme de

$$X_{q,r} \times_{W_{q,r}} X_{q,r} \text{ dans } \mathcal{P}_{A'} \times_{\mathcal{G}_{A'}} \mathcal{P}_{A'} .$$

Considérons l'ensemble H des sextuplets (u,v,u',v',f_0,f_1) d'applications A-linéaires tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A^q & \xrightarrow{f_1} & A^q \\ u \downarrow & & \downarrow u' \\ A^r & \xrightarrow{f_0} & A^r \\ & \searrow v & \swarrow v' \\ & & E \end{array}$$

soit commutatif et que les couples (u,v) et (u',v') appartiennent à $\mathcal{P}_A(A^q, A^r, E)$. On munit de façon évidente H d'une structure d'espace analytique banachique.

(*) Dans une catégorie avec produits fibrés, on dit qu'un morphisme $X \rightarrow W$ est un épimorphisme effectif si W est conoyau de la double flèche

$$X \times_W X \rightrightarrows X .$$

LEMME. On a un morphisme lisse surjectif φ d'un ouvert Y de H dans

$$\mathcal{Y}_A(A^q, A^r, E) \times \mathcal{Z}_A(E) \mathcal{Y}_A(A^q, A^r, E)$$

défini par

$$\varphi(u, v, u', v', f_0, f_1) = ((u, v), (u', v')).$$

Démonstration du lemme(*). Soit $h = (u, v, u', v', f_0, f_1) \in H$, et supposons qu'il existe un couple (F_0, G_0) de sous-espaces supplémentaires de E tel que $F = \text{Im } v \in U_{G_0}$ et $F' = \text{Im } v' \in U_{G_0}$. Soit $p_{F'} \in \mathcal{L}(E, G)$ la projection de noyau F' ; on a $p_{F'} \circ v = p_{F'} \circ v' \circ f_0 = 0$, ce qui entraîne $F = F'$. Il en résulte qu'on a un morphisme φ d'un ouvert Y de H dans $\mathcal{Y}_A \times \mathcal{Z}_A \mathcal{Y}_A$ défini par la formule de l'énoncé. La surjectivité est un résultat classique. Nous nous contenterons de montrer que φ a des sections locales, ce qui nous suffira pour démontrer la proposition, laissant au lecteur le soin de montrer qu'il est lisse.

Soit $((u, v), (u', v')) \in \mathcal{Y}_A \times \mathcal{Z}_A \mathcal{Y}_A$; soient (F_0, G_0) , (T_0, S_0) et (T_1, S_1) des couples de sous-espaces supplémentaires de E , A^r et A^q respectivement, et supposons que $\text{Im } v = \text{Im } v' \in U_{G_0}$, $\text{Ker } v' \in U_{S_0}$ et $\text{Ker } v' \in U_{S_1}$. Nous allons construire

$$f_0 \in \text{Hom}_A(A^r, A^r) \quad \text{et} \quad f_1 \in \text{Hom}_A(A^q, A^q)$$

tels que $(u, v, u', v', f_0, f_1) \in H$. Vu les conventions faites, cela suffira.

Notons π les projections $E \rightarrow F_0$, $A^r \rightarrow T_0$ et $A^q \rightarrow T_1$ de noyau G_0 , S_0 et S_1 respectivement, et notons i les injections canoniques $G_0 \rightarrow E$, $S_0 \rightarrow A^r$ et $S_1 \rightarrow A^q$. Alors

$$a = \pi \circ u' \circ i \in \mathcal{L}(S_1, T_0) \quad \text{et} \quad b = \pi \circ v' \circ i \in \mathcal{L}(S_0, F_0)$$

(*) Même convention que pour la démonstration des propositions 1 et 2.

sont inversibles. Définissons $f_0 \in \text{Hom}_A(A^r, A^r)$ et $f_1 \in \text{Hom}_A(A^q, A^q)$ par

$$f_0 \Big|_{\underline{\mathbb{C}}^r} = i \circ b^{-1} \circ \pi \circ v \in \mathcal{L}(\underline{\mathbb{C}}^r, A^r)$$

et

$$f_1 \Big|_{\underline{\mathbb{C}}^q} = i \circ a^{-1} \circ \pi \circ f_0 \circ u \in \mathcal{L}(\underline{\mathbb{C}}^q, A^q) .$$

Maintenant f_0 et f_1 répondent à la question, ce qui démontre notre assertion.

Fin de la démonstration de la proposition. Soient Y' et φ' les analogues de Y et φ relativement au A' -module E' . Notons Z l'ouvert

$$\varphi^{-1}(X_{q,r} \times_{W_{q,r}} X_{q,r})$$

de Y . On définit par extension des scalaires et au moyen de ρ_1 un morphisme ρ_* de Z dans Y' . On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\rho_*} & Y' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ X_{q,r} \times_{W_{q,r}} X_{q,r} & & \mathcal{Y}_{A'} \times_{\mathcal{W}_{A'}} \mathcal{Y}_{A'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{q,r} \times X_{q,r} & \xrightarrow{\rho_* \times \rho_*} & \mathcal{Y}_{A'} \times \mathcal{Y}_{A'} . \end{array}$$

Comme φ est surjectif et admet des sections locales, on voit que

$\rho_* \times \rho_*$ induit un morphisme de $X_{q,r} \times_{W_{q,r}} X_{q,r}$ dans $\mathcal{Y}_{A'} \times_{\mathcal{W}_{A'}} \mathcal{Y}_{A'}$, ce qui permet comme on l'a vu de construire un morphisme $\rho_{q,r}$ de $W_{q,r}$ dans $\mathcal{Y}_{A'}(E')$. Si $r' \geq r$ et $q' - r' \geq q - r$, on a $W_{q',r'} \supset W_{q,r}$, et on vérifie immédiatement que $\rho_{q',r'}$ et $\rho_{q,r}$ coïncident sur $W_{q,r}$. Ceci

permet de construire ρ par recollement et la proposition est démontrée.

PROPOSITION 4. Avec les notations de la proposition 3, si les applications ρ_0 et ρ_1 sont compactes, le morphisme ρ_* de W dans $\mathcal{G}_{A'}(E')$ est compact en tout point.

Démonstration. L'application

$$\rho_* : \text{Hom}_A(A^q, A^r) \times \text{Hom}_A(A^r, E) \rightarrow \text{Hom}_{A'}(A'^q, A'^r) \times \text{Hom}_{A'}(A'^r, E')$$

est compacte. Le morphisme $\rho_* : \mathcal{Y}_{A|W} \rightarrow \mathcal{Y}_{A'}$ est donc compact en tout point, et comme le morphisme $\mathcal{Y}_{A|W} \rightarrow W$ est surjectif et admet des sections locales, il en résulte que $\rho_* : W \rightarrow \mathcal{G}_{A'}$ est compact en tout point et la proposition est démontrée.