Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

A. Douady

Les théorèmes *A* et *B* pour un polycylindre de dimension finie dans un espace analytique banachique

Séminaire Jean Leray, nº 4 (1964-1965), p. 48-59
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964-1965___4_48_0>

LES THÉORÈMES A ET B
POUR UN POLYCYLINDRE DE DIMENSION FINIE DANS UN ESPACE ANALYTIQUE BANACHIQUE

par

A. DOUADY

Si (X, Φ) est un espace analytique banachique, on notera $\mathcal{O}_X$ le faisceau $\Phi(\underline{\underline{C}})$ sur X . Dans tout cet exposé, S désignera un espace analytique banachique muni d'un point de base s_o , et U un ouvert de $\underline{\underline{C}}^n$. Nous nous proposons de démontrer les théorèmes A et B pour un compact $s_o \times K$, où $K \subset U$ est un compact convexe de la forme $K_1 \times \dots \times K_n$, et pour un faisceau $\mathcal{F}$ qui soit un $\mathcal{O}_{S \times U}$-module admettant localement une résolution finie.

1. Le théorème de Dolbeault.

THÉORÈME 1. Si $K \subset U$ est un compact convexe de la forme $K_1 \times \dots \times K_n$, $K_i \subset \underline{\underline{C}}$, on a $H^p(\{s_o\} \times K, \mathcal{O}_{S \times U}) = 0$ pour $p > 0$.

Démonstration. Pour tout ouvert V de $\underline{\underline{C}}^n$, et pour $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$, notons $\mathcal{Q}_{i_1,\ldots,\, i_p}(V)$ l'espace vectoriel des formes $f.d\bar{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{i_p}$ telles que

$$\frac{\partial^q f}{\partial \bar{z}_{j_1} \ldots \partial \bar{z}_{j_q}}$$

soit une fonction continue sur V pour toutes les suites $j_1,\ldots,\, j_q$ telles que

$$1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n \qquad \text{et} \quad \{j_1,\ldots,\, j_q\} \cap \{i_1,\ldots,\, i_p\} = \emptyset \ .$$

On définit ainsi un faisceau $\mathcal{Q}_{i_1,\ldots,\, i_p}$ sur $\underline{\underline{C}}^n$. Posons

$$\mathcal{Q}^p = \bigoplus_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \mathcal{Q}_{i_1,\ldots,\, i_p} \ .$$

Si $L = L_1 \times \ldots \times L_n \subset \underline{\underline{C}}^n$ est un compact convexe d'intérieur non vide, notons $Q_{i_1,\ldots,\, i_p}(L)$ l'espace de Banach des formes $f.d\bar{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{i_p}$ telles que la distribution

$$\frac{\partial^q f}{\partial \bar{z}_{j_1} \ldots \partial \bar{z}_{j_q}}$$

sur $\overset{\circ}{L}$ soit induite par une fonction continue sur L pour toutes les suites $j_1,\ldots,j_q$ comme ci-dessus, muni de la norme

$$\sup_{j_1,\ldots,j_q} \left\| \frac{\partial^q f}{\partial \bar{z}_{j_1} \ldots \partial \bar{z}_{j_q}} \right\| \ .$$

Posons encore $Q^p(L) = \bigoplus Q_{i_1,\ldots,i_p}(L)$. On a les propriétés suivantes :

(a) : $Q_{i_1,\dots,i_p}(L) = Q^{\delta_1}(L_1) \hat{\otimes}_\varepsilon \dots \hat{\otimes}_\varepsilon Q^{\delta_n}(L_n)$,

<u>où</u> $\delta_i = 1$ <u>pour</u> $i \in \{i_1,\dots, i_n\}$ <u>et</u> 0 <u>sinon</u>.

Quand on plonge $Q^{\delta_1}(L_1) \otimes \dots \otimes Q^{\delta_n}(L_n)$ dans $Q_{i_1,\dots,i_p}(L)$, la norme induite coïncide avec la norme ε sur le produit tensoriel. On peut en effet identifier $Q^1(L_i)$ à $\mathscr{C}(L_i)$ et plonger $Q^o(L_i)$ dans $\mathscr{C}(L_i) \oplus \mathscr{C}(L_i)$ par $f \to (f, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i})$. Or on sait que si E' est un sous-espace d'un espace normé E muni de la norme induite, $E' \otimes_\varepsilon F$ est un sous-espace de $E \otimes_\varepsilon F$ muni de la norme induite et que $\mathscr{C}(L) = \mathscr{C}(L_1) \hat{\otimes}_\varepsilon \dots \hat{\otimes}_\varepsilon \mathscr{C}(L_n)$.

D'autre part $Q^{\delta_1}(L_1) \otimes \dots \otimes Q^{\delta_n}(L_n)$ est dense dans $Q_{i_1,\dots,i_p}(L)$, comme on le voit en approchant f d'abord par une fonction f_t définie au voisinage de L par $f_t(x) = f(ta + (1-t)x)$, a étant un point intérieur à L, puis par un polynôme en les z_i et $\bar{z}_i$ par régularisation. Ceci démontre la propriété (a).

(b) : <u>On a une suite exacte directe</u>

$$0 \to B(L) \to Q^o(L) \xrightarrow{d''} \dots \to Q^n(L) \to 0 .$$

L'application $d'' : Q^o(L_i) \to Q^1(L_i)$ a pour noyau l'espace $B(L_i)$ défini à l'exposé précédent. En définissant $s : Q^1(L_i) \to Q^o(L_i)$ par $s(f.d\bar{z}_i) = \varphi * f$, où $\varphi(z) = \frac{1}{\pi z}$ et où f est prolongée par 0 sur $\underline{\underline{C}} - L_i$, on a $d'' \circ s = I$. Le complexe $Q^*(L_i)$ est donc direct et a pour cohomologie

$$H^o(Q^*(L_i)) = B(L_i) , \quad H^1(Q^*(L_i)) = 0 .$$

Il en résulte que le complexe

$$Q^*(L) = Q^*(L_1) \hat{\otimes}_\varepsilon \dots \hat{\otimes}_\varepsilon Q^*(L_n)$$

est direct et acyclique en degrés > 0, et que

$$H^{o}(Q^{*}(L)) = B(L_1) \hat{\otimes}_{\varepsilon} \dots \hat{\otimes}_{\varepsilon} B(L_n) = B(L) ,$$

ce qui démontre la propriété (b).

(c) : <u>Pour tout ouvert</u> $V \subset \underline{\underline{C}}^n$, <u>on a</u> $\mathcal{Q}^p(V) = \varprojlim Q^p(L)$, la limite projective étant prise sur les compacts convexes d'intérieur non vide de la forme $L_1 \times \dots \times L_n$ contenus dans V , limite projective filtrante si V est un ouvert convexe de la forme $V_1 \times \dots \times V_n$.

(d) : <u>Si</u> $K = K_1 \times \dots \times K_n \subset U$ <u>est un compact convexe, on a</u>

$$H^{o}(K, \mathcal{Q}^p) = \varinjlim Q^p(L) ,$$

limite inductive sur les voisinages compacts convexes de la forme $L = L_1 \times \dots \times L_n$ de K dans U.

Faisons maintenant intervenir S . Notons $Q^p_S(L)$ (resp. $B_S(L)$ l'espace vectoriel des germes en s_0 de morphismes de S dans $Q^p(L)$ (resp. $B(L)$). Il résulte de la propriété (b) qu'on a une suite exacte

$$0 \to B_S(L) \to Q^o_S(L) \to \dots \to Q^n_S(L) \to 0 .$$

Définissons $\mathcal{Q}^p_S(V)$ par $\mathcal{Q}^p_S(V) = \varprojlim Q^p_S(L)$ comme dans la propriété (c). On vérifie en utilisant des partitions différentiables de l'unité sur $\underline{\underline{C}}^n$ que le préfaisceau $\mathcal{Q}^p_S$ ainsi défini est un faisceau*. La même construction appliquée aux $B_S(L)$ donne le faisceau $\mathcal{O}_{S \times U}$.

On a encore $H^{o}(K, \mathcal{Q}^p_S) = \varinjlim Q^p_S(L)$ comme dans la propriété (d) , et $\mathcal{O}_{S \times U}(K) = \varinjlim B_S(L)$. Par passage à la limite inductive, on obtient une suite exacte

$$0 \to H^{o}(K, \mathcal{O}_{S \times U}) \to H^{o}(K, \mathcal{Q}^o_S) \to \dots \to H^{o}(K, \mathcal{Q}^n_S) \to 0 .$$

---

* Tout préfaisceau fin est un faisceau.

En remplaçant K par un espace réduit à un point, on voit que cette suite exacte correspond à une suite exacte de faisceaux sur K, qui forment une résolution finie de $\mathcal{O}_{S \times U}$, et ceci démontre le théorème.

COROLLAIRE 1. *Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_{S \times U}$-module admettant une résolution finie sur K (i.e. une suite exacte*

$$0 \to \mathcal{L}_p \to \dots \to \mathcal{L}_o \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{F} \to 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}_i = \mathcal{O}_{S \times U}^{r_i}) ,$$

on a $H^q(K, \mathcal{F}) = 0$ pour $q > 0$ et la suite

$$0 \to H^o(K, \mathcal{L}_p) \to \dots \to H^o(K, \mathcal{L}_o) \to H^o(K, \mathcal{F}) \to 0$$

est exacte.

COROLLAIRE 2. *Soient $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ deux $\mathcal{O}_{S \times U}$-modules admettant des résolutions finies $\mathcal{L}'_*$ et $\mathcal{L}''_*$ sur K. Pour tout homomorphisme f de $\mathcal{F}'$ dans $\mathcal{F}''$, il existe un homomorphisme de $\mathcal{L}'_*$ dans $\mathcal{L}''_*$ au-dessus de f, unique à homotopie (algébrique) près.*

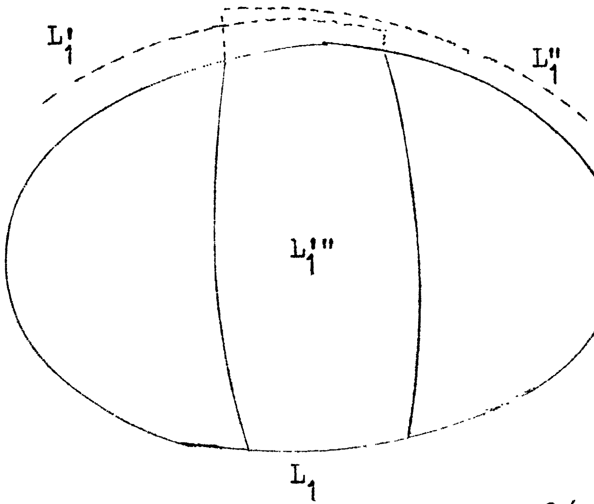
(Cf. exposé précédent)

2. Le théorème des matrices holomorphes.

Soit $L \subset \underline{\underline{C}}^n$ un compact convexe d'intérieur non vide de la forme $L_1 \times \dots \times L_n$, et soient L'_1 et L''_1 deux compacts convexes de $\underline{\underline{C}}$ tels que $L_1 = L'_1 \cup L''_1$, $\overline{L_1 - L'_1} \cap \overline{L_1 - L''_1} = \emptyset$. Posons

$$L'''_1 = L'_1 \cap L''_1 , \quad L' = L'_1 \times L_2 \times \dots \times L_n ,$$

définissons de même L'' et L'''.



PROPOSITION 1. <u>On a une suite exacte directe</u>

$$0 \to B(L) \overset{\alpha}{\to} B(L') \oplus B(L'') \overset{\beta}{\to} B(L''') \to 0 ,$$

<u>où</u>

$$\alpha(f) = (f|_{L'}, f|_{L''})$$

<u>et</u>

$$\beta(f', f'') = f''|_{L'''} - f'|_{L'''} .$$

<u>Démonstration</u>. Vu la proposition 3 de l'exposé précédent, il suffit de montrer qu'on a une suite exacte directe

$$0 \to B(L_1) \overset{\alpha}{\to} B(L'_1) \oplus B(L''_1) \overset{\beta}{\to} B(L'''_1) \to 0 .$$

Construisons une application linéaire continue :

$$\sigma : B(L'''_1) \to B(L'_1) \oplus B(L''_1)$$

telle que $\beta \circ \sigma = I$. Soit η une fonction continûment $\underline{\underline{R}}$-différentiable sur $\underline{\underline{C}}$, égale à 0 sur $L_1 - L''_1$ et à 1 sur $L_1 - L'_1$, et posons $\Theta = \frac{\partial \eta}{\partial \bar{z}}$. L'application σ définie par $\sigma(h) = (\varphi * (\Theta h) - \eta h ,$ $\varphi * (\Theta h) + (1 - \eta) h)$, où $\varphi(z) = \frac{1}{\pi z}$ et où Θh est prolongée par 0 en dehors de L'''_1, répond à la question. Comme $\operatorname{Ker} \beta = B(L_1)$, ceci démontre la proposition.

Soit A une algèbre de Banach, G le groupe des éléments inversibles de A ; notons $B(L,G)$ l'ensemble des $f \in B(L,A)$ telles que $f(L) \subset G$, c'est-à-dire le groupe des éléments inversibles de l'algèbre de Banach $B(L,A)$. L'ensemble $B(L,G)$ est ouvert dans $B(L,A)$ et est un groupe de Lie banachique.

PROPOSITION 2. *L'application* γ *de* $B(L',G) \times B(L'',G)$ *dans* $B(L''',G)$ *définie par* $\gamma(f',f'') = f''|_{L'''}\, f'|_{L'''}^{-1}$ *est une submersion directe surjective.*

Démonstration.

(a) γ *est une submersion directe* : l'application linéaire tangente

$$T_{(f',f'')}(\gamma) : B(L',A) \oplus B(L'',A) \to B(L''',A)$$

est égale à

$$\delta_{f'}^{-1} \circ \sigma_{f''} \circ \beta \circ (\sigma_{f'}^{-1} \oplus \sigma_{f''}^{-1}) \quad ,$$

où $\sigma_{f'}$ (resp. $\delta_{f'}$) est la multiplication à gauche (resp. à droite) par f' ou par $f'|_{L'''}$ et de même pour f'' , et où β est l'application définie dans la proposition 1. Comme β est un épimorphisme direct d'après la proposition 1 et que les autres sont des isomorphismes, γ est une submersion directe.

(b) γ *est surjective.*

LEMME. *L'application de restriction* $\rho : B(L'',G) \to B(L''',G)$ *a une image dense.*

Démonstration du lemme. D'après le Théorème de Runge, l'application de restriction $\rho_1 : B(L_1'') \to B(L_1''')$ a une image dense. Il en est donc de même de

$$\rho = \rho_1 \hat{\otimes} I_{B(L_2 \times \dots \times L_n)} \hat{\otimes}_\varepsilon I_A : B(L'',A) \to B(L''',A) .$$

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} B(L'',A) & \xrightarrow{\exp} & B(L'',G) \\ \rho\downarrow & & \rho\downarrow \\ B(L''',A) & \xrightarrow{\exp} & B(L''',G) \end{array}$$

montre que l'adhérence H de $\rho(B(L'',G))$ dans $B(L''',G)$ contient l'image de $B(L''',A)$ par exp , donc est un voisinage de 0 . Comme H est un sous-groupe de $B(L''',G)$, H est ouvert et fermé.

Soit a un point de L''' . Pour tout $h \in B(L''',G)$, la famille $(h_t)_{0 \leq t \leq 1}$ définie par $h_t(x) = h(tx + (1-t)a)$ est un chemin qui mène de l'application constante $h(a)$ à h dans $B(L''',G)$. Donc toute composante connexe de $B(L''',G)$ contient une application constante, et toute application constante appartenant à H , on a $H = B(L''',G)$, ce qui démontre le lemme.

<u>Fin de la démonstration de la proposition</u> 2.

Comme γ est une submersion, l'image de γ contient un voisinage ouvert W de 1 dans $B(L''',G)$. Soit $h \in B(L''',G)$, d'après le lemme, il existe un $h'' \in B(L'',G)$ tel que $\rho(h'') \in h.W^{-1}$. On a donc $h = \rho(h'')\,w$, où $w \in W$ se met sous la forme $\gamma(f',f'')$, d'où

$$h = \rho(h'').\gamma(f',f'') = \gamma(f',h''f'') ,$$

ce qui démontre la proposition.

<u>Remarque</u>. On pourrait, dans la proposition 2 , remplacer G par un groupe de Lie banachique quelconque. Nous ne l'avons pas fait pour éviter d'avoir à décrire la structure de groupe de Lie banachique sur $B(L,G)$.

COROLLAIRE 1. <u>Notons</u> $B_S(L',G)$ <u>l'ensemble des germes en</u> s_0 <u>de morphismes de</u> S <u>dans</u> $B(L',G)$, <u>et de même pour</u> L'' , L'''. <u>L'application</u> γ_S <u>de</u> $B_S(L',G) \times B_S(L'',G)$ <u>dans</u> $B_S(L''',G)$ <u>induite par</u> γ <u>est surjective</u>.

<u>Démonstration</u>.

Soit $h \in B_S(L''',G)$. D'après la proposition 2, on peut trouver une section locale de γ au voisinage de $h_0 = h(s_0)$, c'est-à-dire une application analytique $\sigma : W \to B(L',G) \times B(L'',G)$, où W est un voisinage de h_o dans $B(L''',G)$, telle que $\gamma \circ \sigma = I$. En posant $f = \sigma \circ h$, on a $h = \gamma_S(f)$, d'où le corollaire.

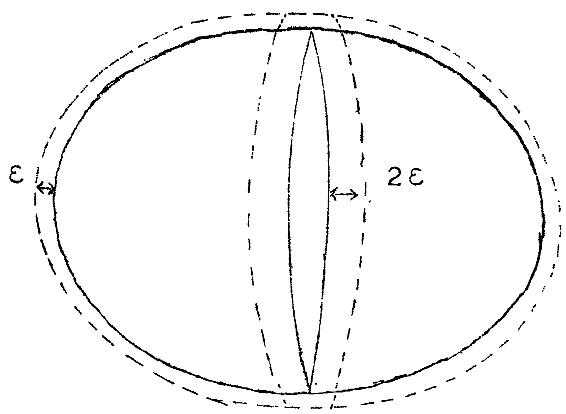
Soit maintenant $K \subset U$ un compact convexe de la forme $K_1 \times \dots \times K_n$, et soient K'_1 et K''_1 deux compacts convexes de $\underline{\underline{C}}$ tels que $K_1 = K'_1 \cup K''_1$. Posons $K'''_1 = K'_1 \cap K''_1$, $K' = K'_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$, et définissons de même K'' et K'''. En notant $\Phi_{S \times U}$ le foncteur structural de $S \times U$, et G gardant la même signification ($\Phi_{S \times U}(G)$ est donc le faisceau des morphismes d'ouverts de $S \times U$ dans G) , on a :

COROLLAIRE 2. <u>L'application</u> γ <u>de</u> $H^o(s_o \times K', \Phi_{S \times U}(G)) \times H^o(s_o \times K'', \Phi_{S \times U}(G))$ <u>dans</u> $H^o(s_o \times K''', \Phi_{S \times U}(G))$ <u>définie par</u>

$$\gamma(f',f'') = f''|_{s_o \times K'''} \; f'|_{s_o \times K'''}^{-1}$$

<u>est surjective</u>.

<u>Démonstration</u>. Pour tout $\varepsilon > 0$, et pour $1 \leqslant i \leqslant n$, notons $L_i(\varepsilon)$ l'ensemble des $x \in \underline{\underline{C}}$ tels que $d(x,K_i) \leqslant \varepsilon$, où $d(x,K_i)$ est la distance de x à K_i ; notons $L'_1(\varepsilon)$ l'ensemble des $x \in L_1(\varepsilon)$ tels que $d(x,K'_1) \leqslant 2\varepsilon$, définissons de même $L''_1(\varepsilon)$; et définissons $L(\varepsilon)$, $L'(\varepsilon)$, $L''(\varepsilon)$, $L'''(\varepsilon)$ comme plus haut. On est dans les conditions d'application des propositions 1 et 2 et du corollaire 1 d'icelle. Les ensembles $L'(\varepsilon)$ forment un système fondamental de voisinages de K' dans $\underline{\underline{C}}^n$, donc



on a

$$H^o(s_o \times K', \Phi_{S \times U}(G)) = \varinjlim B_S(L'(\varepsilon), G)$$

et de même pour K" et K'". Le corollaire 2 se déduit donc du corollaire 1 par passage à la limite inductive.

COROLLAIRE 3. <u>Soit</u> $\mathcal{F}$ <u>un</u> $\mathcal{O}_{S \times U}$<u>-module. Si</u> $\mathcal{F}|_{s_o \times K'}$ <u>et</u> $\mathcal{F}|_{s_o \times K''}$ <u>sont libres de type fini, il en est de même de</u> $\mathcal{F}|_{s_o \times K}$.

<u>Démonstration</u>. On peut supposer K' et K" non vides ; comme K est connexe, il en est de même de K'", donc $\mathcal{F}|_{s_o \times K'}$ et $\mathcal{F}|_{s_o \times K''}$ ont même rang r. En écrivant $\mathcal{O}$ pour $\mathcal{O}_{S \times U}$, le groupe des automorphismes de $\mathcal{O}^r|_{s_o \times K}$ s'identifie à $H^o(s_o \times K, GL(\underline{\underline{C}}, n))$, et de même pour K', K", K'". Soient g' et g" des isomorphismes de $\mathcal{O}^r$ sur $\mathcal{F}$ au-dessus de K' et K" respectivement, D'après le corollaire 2, l'automorphisme $h = g''^{-1} \circ g'$ de $\mathcal{O}^r_{|s_o \times K'''}$ se met sous la forme

$$f''|_{s_o \times K'''} \circ f'^{-1}|_{s_o \times K'''} ,$$

où f' et f" sont des automorphismes de $\mathcal{O}^r|_{s_o \times K'}$ et $\mathcal{O}^r|_{s_o \times K''}$ respectivement. Les isomorphismes $g' \circ f'$ et $g'' \circ f''$ de $\mathcal{O}^r$ sur $\mathcal{F}$ définis au-dessus de $s_o \times K'$ et $s_o \times K''$ respectivement coïncident sur $s_o \times K'''$, donc se recollent en un isomorphisme de $\mathcal{O}^r|_{s_o \times K}$ sur $\mathcal{F}|_{s_o \times K}$, ce qui démontre le corollaire 3.

3. <u>Les théorèmes</u> A <u>et</u> B .

THÉORÈME 2. <u>Soit</u> $K \subset U$ <u>un compact convexe de la forme</u> $K_1 \times \ldots \times K_n$, $K_i \subset \underline{\underline{C}}$, <u>et soit</u> $\mathcal{F}$ <u>un</u> $\mathcal{O}_{S \times U}$<u>-module. On suppose que pour tout point</u>

$x \in K$, *le faisceau* $\mathcal{F}$ *admet une résolution finie sur un voisinage de* x .

(A) *Le faisceau* $\mathcal{F}$ *admet une résolution finie sur* K ;

(B) *On a* $H^q(K,\mathcal{F}) = 0$ *pour tout* $q > 0$.

Considérons d'abord un cas particulier :

LEMME. *Soient* K_1' *et* K_1'' *deux compacts convexes de* $\underline{\underline{C}}$ *tels que* $K_1 = K_1' \cup K_1''$. *Posons* $K' = K_1' \times K_2 \times \dots \times K_n$, *définissons de même* K'' . *Si le faisceau* $\mathcal{F}$ *admet une résolution finie de longueur* $\leqslant p$ *sur* K' *et sur* K'' , *il admet aussi une résolution finie de longueur* $\leqslant p$ *sur* K .

Démonstration par récurrence sur p . Pour $p = 0$, le lemme se réduit au corollaire 3 de la proposition 2. Soit $p \geqslant 1$, et supposons le lemme démontré pour $p-1$. Soient $\mathcal{L}'_*$ et $\mathcal{L}''_*$ des résolutions de $\mathcal{F}$ au-dessus de K' et K'' respectivement. D'après le corollaire 2 du théorème 1, il existe des homomorphismes $f : \mathcal{L}'_* \to \mathcal{L}''_*$ et $g : \mathcal{L}''_* \to \mathcal{L}'_*$ au-dessus de $I_{\mathcal{F}}$ définis sur $K''' = K' \cap K''$. Au-dessus de K''' , on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}'_0 \oplus \mathcal{L}''_0 \arrow[drr, "{(\varepsilon',0)}"] & & \\
\mathcal{L}'_0 \oplus \mathcal{L}''_0 \arrow[u, "\tilde{g}", "\approx"'] \arrow[d, "\tilde{f}"', "\approx"] \arrow[rr, "{(\varepsilon',\varepsilon'')}"] & & \mathcal{F} \\
\mathcal{L}'_0 \oplus \mathcal{L}''_0 \arrow[urr, "{(0,\varepsilon'')}"'] & &
\end{tikzcd}$$

où $\tilde{f} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ f_0 & I \end{pmatrix}$ et $\tilde{g} = \begin{pmatrix} I & g_0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$. On peut étendre $\mathcal{L}'_0$ et $\mathcal{L}''_0$ en des faisceaux libres sur K , que nous noterons encore $\mathcal{L}'_0$ et $\mathcal{L}''_0$. Soient $\mathcal{L}_0$ le faisceau localement libre sur K obtenu en recollant $\mathcal{L}'_0 \oplus \mathcal{L}''_0$ à $|\mathcal{L}'_0 \oplus \mathcal{L}''_0|_{K''}$ au moyen de $\tilde{f} \circ \tilde{g}^{-1}$ et $\varepsilon : \mathcal{L}_0 \to \mathcal{F}$ l'homomorphisme surjectif obtenu en recollant $(\varepsilon', 0)$ et $(0, \varepsilon'')$. Il résulte du corollaire 3 de la proposition 2 que $\mathcal{L}_0$ est libre. Posons $\mathcal{F}_1 = \operatorname{Ker} \varepsilon$; on a

$$\mathcal{F}_1|_{K'} \approx \mathcal{F}'_1 \oplus \mathcal{L}'' \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_1|_{K''} \approx \mathcal{L}' \oplus \mathcal{F}''_1 ,$$

où $\mathcal{F}'_1 = \operatorname{Ker} \varepsilon'$ et $\mathcal{F}''_1 = \operatorname{Ker} \varepsilon''$. Le faisceau $\mathcal{F}_1$ admet donc une résolution de longueur $\leqslant p-1$ sur K' et sur K'' , et il résulte de l'hypothèse de récurrence qu'il admet une résolution de longueur $\leqslant p-1$ sur K. On obtient ainsi une résolution de longueur $\leqslant p$ de $\mathcal{F}$ sur K , ce qui démontre le lemme.

<u>Démonstration du théorème</u> Soit $\mathcal{W} = (W_\alpha)$ un recouvrement ouvert de K tel que $\mathcal{F}$ admette une résolution finie sur chacun des W_α. Identifions $\underline{\underline{C}}^n$ à $\underline{\underline{R}}^{2n}$, et soit $\varepsilon > 0$ tel que la trace sur K de tout cube de côté ε de $\underline{\underline{R}}^{2n}$ soit contenue dans l'un des W_α. Montrons, par récurrence sur m , que si $H = K \cap (C \times \underline{\underline{R}}^m)$, où $C \subset \underline{\underline{R}}^{2n-m}$ est un cube de côté ε , le faisceau $\mathcal{F}$ admet une résolution finie sur H. Cette propriété est vraie pour $m = 0$, car alors $H \cap C$ est contenu dans l'un des W_α. Supposons la propriété vraie pour $m-1$, on peut mettre H sous la forme $H_1 \cup \ldots \cup H_k$, où $H_i = K \cap (C_i \times \underline{\underline{R}}^{m-1})$,

$$C_i = C \times [b + (i-1)\varepsilon , b + i\varepsilon] \subset \underline{\underline{R}}^{2n-m+1}$$

est un cube de côté ε . Le lemme montre par récurrence sur i que $\mathcal{F}$ admet une résolution finie sur $H_1 \cup \ldots \cup H_i$, donc sur H. Faisant $m = 2n$, on obtient (A). Le corollaire 1 du théorème 1 donne (B) et le théorème est démontré.