Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

A. Douady

Variétés analytiques banachiques

Séminaire Jean Leray, n° 4 (1964-1965), p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964-1965___4_1_0>

VARIÉTÉS ANALYTIQUES BANACHIQUES

par

A. DOUADY

1. Applications polynomiales.

Soient E et F deux espaces de Banach(*). Une application f de E dans F est dite polynomiale homogène de degré n s'il existe une application n-linéaire symétrique $\tilde{f}$ de $E \times \ldots \times E$ dans F telle que $f(x) = \tilde{f}(x,\ldots,x)$. Dans ce cas $\tilde{f}$ est unique et déterminée par la formule

$$\tilde{f}(x_1,\ldots, x_n) = \frac{1}{n!}\Delta_{x_n} \ldots \Delta_{x_1} f\ (0)\ , \tag{1}$$

où on a posé :

$$\Delta_x h(y) = \frac{1}{2}\ (h(y+x) - h(y-x))\ .$$

PROPOSITION 1. *Pour une application polynomiale homogène* f *de* E *dans* F, *les conditions suivantes sont équivalentes* :

a) f *est continue* ;

b) f *est continue en* 0 ;

c) f *est bornée sur la boule unité* B_E *de* E ;

$\tilde{a}$) $\tilde{f}$ *est continue* ;

$\tilde{b}$) $\tilde{f}$ *est continue en* $(0,\ldots, 0)$;

$\tilde{c}$) $\tilde{f}$ *est bornée sur* $B_E \times \ldots \times B_E$.

(*) Sur le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes.

Les implications $\tilde{c} \Rightarrow \tilde{b} \Rightarrow \tilde{a} \Rightarrow a \Rightarrow b \Rightarrow c$ sont immédiates, montrons que $c \Rightarrow \tilde{c}$. Plus précisément, en posant

$$\|f\| = \sup \|f(B_E)\| \quad \text{et} \quad \|\tilde{f}\| = \sup \|\tilde{f}(B_E \times \ldots \times B_E)\| ,$$

on a l'inégalité :

$$(2) \qquad \|f\| \leqslant \|\tilde{f}\| \leqslant \frac{n^n}{n!} \|f\| .$$

En effet f est bornée par $n^n \|f\|$ sur la boule de rayon n ; soient $x_1, \ldots, x_n \in B_E$ on voit par récurrence sur k que $\Delta_{x_k} \ldots \Delta_{x_1} f$ est bornée par n^n f sur la boule de rayon $n-k$, et pour $k = n$, on trouve :

$$n! \|\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n)\| = \|\Delta_{x_n} \ldots \Delta_{x_1} f(0)\| \leqslant n^n \|f\| .$$

2. <u>Applications analytiques</u>.

Soient E et F deux espaces de Banach, et soit U un ouvert de E. Une application h de U dans F est dite analytique en un point a de U s'il existe une suite (f_n), où, pour tout n, f_n est une application polynomiale homogène de degré n de E dans F, et un nombre réel $r > 0$ tels que

$$(3) \qquad \sum \|f_n\| r^n < \infty$$

et que

$$h(a + x) = \sum f_n(x) \quad \text{pour } x \text{ suffisamment petit.}$$

La borne supérieure R des nombres r vérifiant (3) est appelée rayon de convergence de h en a. On appelle rayon de convergence strict de h en a la borne supérieure $\tilde{R}$ des nombres r vérifiant

$$(\tilde{3}) \qquad \sum \|\tilde{f}_n\| r^n < \infty .$$

Il résulte de (1) et de la formule de Stirling donnant une majoration de $\frac{n^n}{n!}$ que R et $\tilde{R}$ sont reliés par les inégalités

$$\frac{R}{e} \leqslant \tilde{R} \leqslant R \, . \tag{4}$$

<u>Exemples</u>

1. Soient E une algèbre de Banach, F un E-module. Si, pour tout n, $f_n(x)$ est de la forme $x^n c_n$, avec $c_n \in F$, on dit que h est E-analytique. Dans ce cas $R = \tilde{R}$; en effet $\|f_n\| = \|\tilde{f}_n\| = \|c_n\|$.

2. Prenons pour E l'espace ℓ^1 des suites sommables, $X = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ muni de la norme $\|X\| = \sum |x_i|$, et pour $f_n(x)$ le produit $x_1 \ldots x_n$ des n premières coordonnées. On a $\|f_n\| = \frac{1}{n^n}$, car le maximum de $|f_n|$ pour $\sum |x_i| \leqslant 1$ est atteint pour $|x_1| = \ldots = |x_n| = \frac{1}{n}$. D'autre part,

$$\tilde{f}_n(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} x^{(1)}_{\sigma(1)} \ldots x^{(n)}_{\sigma(n)} \, ,$$

d'où en prenant pour $x^{(i)}$ l'élément δ^i de Kronecker, $\|\tilde{f}_n\| \geqslant \frac{1}{n!}$, et l'inégalité (2) montre que $\|\tilde{f}_n\| = \frac{1}{n!}$. Pour la série $h = \sum n! \, f_n$, on a $\tilde{R} = 1$ et $R = e$.

3. <u>Cas complexe</u>.

PROPOSITION 2. <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces de Banach complexes,</u> U <u>un ouvert de</u> E, <u>et</u> h <u>une application de</u> U <u>dans</u> F. <u>Supposons que</u> h <u>soit localement bornée et que, pour toute droite affine complexe</u> $D \subset E$ <u>et toute forme linéaire continue</u> v <u>sur</u> F, $v \circ h$ <u>induise une fonction holomorphe sur</u> $D \cap U$. <u>Alors</u> h <u>est</u> $\underline{\underline{C}}$<u>-analytique, et si</u> h <u>est bornée sur une boule de centre</u> a <u>et de rayon</u> r <u>contenue dans</u> U, <u>le rayon de convergence</u> R <u>de</u> h <u>en</u> a <u>vérifie</u> $R \geqslant r$.

Cette proposition est connue dans le cas où E est de dimension finie et $F = \underline{\underline{C}}$; et le développement $h(a + x) = \sum f_n(x)$ est donné par la formule

$$(5) \qquad f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(a + e^{i\theta}x)e^{-ni\theta}\, d\theta \quad \text{pour} \quad \|x\| \leqslant r .$$

Dans le cas général, définissons $f_n(x)$ pour $\|x\| \leqslant r$ par la formule (5) (intégrale à valeurs dans l'espace de Banach F). Si $\|h\|$ est majorée par M sur la boule de centre a et de rayon r, on a $\|f_n(x)\| \leqslant M$ pour $\|x\| \leqslant r$. Pour montrer que f_n est polynomiale homogène de degré n, il suffit de vérifier que $\tilde{f}_n$ définie par (1) est n-linéaire et que $f_n(x) = \tilde{f}_n(x,\dots,x)$; il suffit même de vérifier ces relations pour la restriction de $v \circ f_n$ à E' pour toute forme linéaire continue v sur F et tout sous-espace E' de dimension finie de E, ce qui nous ramène au cas particulier connu. Il en résulte que la série $\sum f_n$ converge normalement sur toute boule de rayon $r' < r$, et de la relation $v(h(a + x)) = v(\sum f_n(x))$ pour toute forme v, on déduit $h(a + x) = \sum f_n(x)$. Ceci démontre la proposition.

Il résulte de cette proposition que l'ensemble des applications C-analytiques bornées de U dans F est fermé dans l'espace de Banach des applications continues bornées.

Soit h une fonction C-analytique en a, soit R_a son rayon de convergence en a, et supposons que h soit représentée par son développement en tout point de la boule de centre a et de rayon R_a. Alors

(i) h est analytique en tout point b tel que $\|b - a\| < R_a$;

(ii) son rayon de convergence R_b en b vérifie $R_b \geqslant R_a - \|b - a\|$.(*)

(*) La propriété (i) subsiste dans le cas réel, mais sa démonstration est plus délicate. J'ignore si la propriété (ii) subsiste, mais on a l'inégalité

$$\sqrt{R_b} \geqslant \sqrt{R_a} - \sqrt{\|b-a\|}.$$

Il est immédiat que les rayons de convergence stricts vérifient $\tilde{R}_b \geqslant \tilde{R}_a - \|b-a\|$ dans les deux cas.

4. Le théorème des fonctions implicites.

THÉORÈME. *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach,* U *un ouvert de* E, h *une application analytique de* U *dans* F, a *un point de* U, *et* $b = h(a)$. *On suppose que la partie linéaire du développement de* h *en* a *est un isomorphisme*(*) *de* E *sur* F. *Il existe alors un voisinage ouvert* V *de* a *dans* U *et un voisinage ouvert* W *de* b *dans* F *tels que* h *induise un homéomorphisme de* V *sur* W *et que l'application* h^{-1} *de* W *sur* V *soit analytique.*

On peut supposer $a = 0$, $b = 0$. Pour tout r, on pose $\|\tilde{h}\|_r = \sum \|\tilde{f}_n\| r^n$ si $h = \sum f_n$; on a donc $\|\tilde{h}\|_r < \infty$ si $r < \tilde{R}$, où $\tilde{R}$ est le rayon de convergence strict de h en 0. Si g est une application d'un voisinage de 0 dans F à valeurs dans un espace de Banach G, analytique en 0, $g \circ h$ est analytique en 0 et $\|\widetilde{g \circ h}\|_r \leqslant \tilde{g}_s$, où $s = \|\tilde{h}\|_r$.

Soit f_1 le terme linéaire du développement de h, posons $c = \|f_1^{-1}\|^{-1}$, et soit $k \in]0,1[$. Posons $\eta(x) = x - f_1^{-1} \circ h(x)$; η est analytique en $0 \in E$, d'ordre $\geqslant 2$. Il existe un $r > 0$ tel que $\|\tilde{\eta}\|_r \leqslant kr$. Posons $r' = c(1-k)r$, et soit B' la boule de rayon r' dans F. On définit par récurrence une suite (g_n) d'applications analytiques de B' dans E par

$$g_0(y) = 0 \ ; \ g_{n+1}(y) = f_1^{-1}(y) + \eta \circ g_n(y) .$$

On voit par récurrence que $\|\tilde{g}_n\|_{r'} \leqslant r$ et que $g_{n+1} - g_n$ et $h \circ g_n - 1$ sont d'ordre $> n$. La série g telle que $g - g_n$ soit d'ordre $> n$ pour

---

(*) D'après le théorème de Banach, il est équivalent de supposer qu'une application linéaire continue de E dans F est bijective ou que c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques.

tout n vérifie $\|\tilde{g}\|_{r'} \leqslant r$, et $h \circ g = 1$. L'application analytique h est donc localement inversible à droite, et pour la même raison g est localement inversible à droite. On voit donc que h est localement inversible, et le théorème est démontré.

5. Variétés.

Soit X un ensemble. Une carte de X est une bijection d'une partie de X sur un ouvert d'un espace de Banach. Deux cartes $\varphi_1 : U_1 \to U_1'$ et $\varphi_2 : U_2 \to U_2'$ sont dites compatibles si

$$U_{1,2}' = \varphi_1(U_1 \cap U_2) \quad \text{et} \quad U_{2,1}' = \varphi_2(U_2 \cap U_1)$$

sont ouverts dans U_1' et U_2' et si l'application $\gamma_{1,2} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ de $U_{2,1}'$ dans $U_{1,2}'$ (changement de carte) est analytique. Un atlas sur X est une famille de cartes deux à deux compatibles dont les domaines recouvrent X . Deux atlas sur X sont dits équivalents si toute carte de l'un est compatible avec toute carte de l'autre. Une structure de variété (analytique banachique) sur X est une classe d'équivalence d'atlas.

Etant donné une structure de variété sur X , il existe une topologie et une seule, appelée topologie sous jacente, telle que toute carte soit un homéomorphisme défini sur un ouvert de X .

Soient X et Y deux variétés, f une application continue de X dans Y , $\varphi : U \to U'$ une carte de X , $\psi : V \to V'$ une carte de Y . Alors

$$U'' = \varphi(U \cap f^{-1}(V))$$

est ouvert dans U' et $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est une application continue de U'' dans V' qu'on appelle l'expression de f dans les cartes données. On dit que f est analytique si son expression dans tout couple de cartes est analytique.

Soit X une variété et $x \in X$. On appelle espace tangent à X en x et on note $T_x X$ le quotient de l'ensemble des couples (φ, t) , où φ est une carte de X représentant un voisinage de x sur un ouvert d'un espace de Banach E telle que $\varphi(x) = 0$, et t un vecteur de E , par la relation d'équivalence $(\varphi, t) \sim (\varphi', t')$ si $t' = \alpha(t)$, où α est la partie linéaire du développement de l'application de changement de carte $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ en 0 . C'est de façon naturelle un espace de Banach, i.e. un espace vectoriel topologique normable complet. Soient X et Y deux variétés, f une application analytique de X dans Y , $x \in X$, $y = f(x)$. On définit l'application linéaire tangente à f en x ,

$$T_x f : T_x X \to T_y Y \quad \text{par} \quad T_x f(u) = v$$

si u est représenté par (φ, t) , et v par $(\psi, \alpha(t))$, où α est la partie linéaire du développement de l'expression de f dans les cartes φ, ψ .

6. Immersions et summersions directes.

Soient E et F deux espaces de Banach, u une application linéaire continue de E dans F . On dit que u est un morphisme strict si u induit un isomorphisme topologique de $E/\mathrm{Ker}\, u$ sur $\mathrm{Im}\, u$, ou, ce qui revient au même en vertu du théorème de Banach, si $\mathrm{Im}\, u$ est fermé. On dira que u est un morphisme direct si u est un morphisme strict et si $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ admettent un supplémentaire topologique (i.e. un supplémentaire fermé) dans E et F respectivement. Contrairement aux conventions générales des catégories, on réserve le nom de monomorphisme aux morphismes stricts injectifs et le nom d'épimorphisme aux morphismes surjectifs (qui sont tous stricts).

Soient X et Y deux variétés, f une application analytique de X dans Y, $x \in X$, $y = f(x)$. On dit que f est une immersion (resp. une immersion directe, resp. une submersion, resp. une submersion directe) en x s'il existe une carte φ de X représentant un voisinage de x sur un ouvert d'un espace de Banach E et une carte ψ de Y représentant un voisinage de y sur un ouvert d'un espace de Banach F telles que l'expression de f dans ces cartes soit induite par un monomorphisme (resp. un monomorphisme direct, resp. un épimorphisme, resp. un épimorphisme direct) de E dans F.

On utilise souvent le Théorème des fonctions implicites sous la forme suivante :

PROPOSITION 3. _Soient_ X _et_ Y _deux variétés,_ f _une application analytique de_ X _dans_ Y, $x \in X$.

a) _Si_ $T_x f$ _est un monomorphisme direct,_ f _est une immersion directe en_ x.

b) _Si_ $T_x f$ _est un épimorphisme direct,_ f _est une submersion directe en_ x.

Soient $\varphi : U \to U' \subset E$ et $\psi : V \to V' \subset F$ des cartes de X et Y respectivement avec $\varphi(x) = 0$; $\psi(y) = 0$, où $y = f(x)$; notons f' l'expression de f dans ces cartes.

a) Supposons que $T_x f$ soit un monomorphisme direct, et soit G un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$ dans F. L'application analytique g de $U' \times G$ dans F définie par $g(x,y) = f(x) + y$ est un isomorphisme local d'après le théorème 1, et $g^{-1} \circ \psi$ est une carte de Y au voisinage de y. L'expression de f dans les cartes φ, $g^{-1} \circ \psi$ est l'injection canonique de E dans $E \oplus G$.

b) Supposons que $T_x f$ soit un épimorphisme direct, soit K son noyau, et soit p une projection de E sur K parallèlement à un supplémentaire. L'application g de U' dans $V' \times K$ définie par $g(x) = (f'(x), p(x))$ est un isomorphisme local d'après le théorème 1 et $g \circ \varphi$ est une carte de X au voisinage de x. L'expression de f dans les cartes $g \circ \varphi, \psi$ est la projection de $F \times K$ sur F. La proposition est démontrée.

7. <u>Un contre-exemple</u>.

Avec les notations de la proposition 3, montrons par un exemple que $T_x f$ peut être un épimorphisme sans que f soit une submersion.

Soit E un espace de Banach et F un sous-espace fermé tel que E ne soit pas isomorphe à $F \oplus E/F$, et notons p l'application canonique de E sur E/F. Définissons l'application analytique f de $\underline{\underline{C}} \times E \times E/F$ dans E/F par $f(t,x,y) = p(x) + ty$. Pour $z = (0,0,0)$, on a

$$T_z f(t,x,y) = p(x) , \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} T_z f = \underline{\underline{C}} \oplus F \oplus E/F .$$

Pour $z = (t_0,0,0)$, on a

$$T_z f(t,x,y) = p(x) + t_0 y , \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} T_z f = \underline{\underline{C}} \oplus G ,$$

où G est le graphe de $\frac{-1}{t_0} p : E \to E/F$, donc $\operatorname{Ker} T_z f \approx \underline{\underline{C}} \oplus E$. Les espaces $\underline{\underline{C}} \oplus F \oplus E/F$ et $\underline{\underline{C}} \oplus E$ ne sont pas isomorphes, car des hyperplans de deux espaces isomorphes sont toujours isomorphes. Il en résulte que f n'est pas une submersion, car si f était une submersion, $f^{-1}(0)$ serait une sous-variété V de $C \times E \times E/F$, et on aurait, en tout point z de V, $T_z V = \operatorname{Ker} T_z f$. Or l'espace tangent à une variété reste constamment isomorphe à lui-même sur une composante connexe.

Reste à montrer qu'il existe un espace de Banach E et un sous-espace fermé F de E tels que $E \not\approx F \oplus E/F$. Prenons pour E l'espace ℓ^1 des suites sommables. Pour tout espace de Banach séparable H , il existe un épimorphisme u de E sur H , et en posant $F = \operatorname{Ker} u$, on a $E/F \simeq H$. Mais les sous-espaces vectoriels fermés de ℓ^1 jouissent de propriétés très particulières, par exemple : "toute suite faiblement convergente est convergente" (Théorème d'Orlicz). Si H ne possède pas cette propriété, par exemple si H est un espace de Hilbert séparable, E/F n'est isomorphe à aucun sous-espace fermé de E et $E \not\approx F \oplus E/F$.

8. La variété Grassmannienne d'une espace de Banach.

Soit E un espace de Banach, on appellera sous-espace direct de E tout sous-espace vectoriel fermé admettant un supplémentaire topologique. Nous allons munir l'ensemble $\mathcal{G}(E)$ des sous-espaces directs de E d'une structure de variété analytique banachique. Pour tout couple (F,G) de sous-espaces supplémentaires de E , notons U_G l'ensemble des sous-espaces F' de E admettant G comme supplémentaire ; on définit une bijection $\psi_{F,G}$ de U_G sur l'espace de Banach $\mathcal{L}(E,G)$ des applications linéaires continues de F dans G en associant à $F' \in U_G$ l'application de F dans G ayant pour graphe le sous-espace F' de $E = F \times G$. Les $\psi_{F,G}$ sont des cartes de $\mathcal{G}(E)$ dont les domaines recouvrent $\mathcal{G}(E)$. Pour étudier le changement de cartes , $\gamma = \psi_{F_1,G_1} \circ \psi^{-1}_{F_0,G_0}$, considérons d'abord deux cas particuliers :

(i) $G_0 = G_1$. Dans ce cas γ est un isomorphisme affine.

(ii) $F_0 = F_1$. Notons j l'application de F_0 dans G_0 dont le graphe est G_1 , soit $j = \psi_{G_0,F_0}(G_1)$, et i l'isomorphisme de G_0 sur G_1

défini par $i(x) = x + j(x)$. Soit $F \in U_{G_0}$, et $f = \psi_{F_0,G_0}(F)$; F est l'ensemble des $x + f(x)$ pour $x \in F_0$. La décomposition de $X + f(x)$ suivant F_0 et G est $X' + y'$, où $x' = x - j(f(x)) \in F_0$ et $y' = i(f(x)) \in G_1$. Pour que $F \in U_{G_1}$, il faut et il suffit que la projection de F sur F_0 parallèlement à G_1 soit un isomorphisme, c'est-à-dire que $I - j \circ f$ soit inversible. Alors $\gamma(f) = i \circ f \circ (I - j \circ f)^{-1}$. On constate que l'ensemble de définition de γ est ouvert et que γ y est analytique.

(iii) Cas général : Si $U_{G_0} \cap U_{G_1} \neq \emptyset$, soit F un supplémentaire commun à G_0 et G_1 . En passant par l'intermédiaire de ψ_{F,G_0} et ψ_{F,G_1} , le changement de carte se décompose en trois facteurs dont deux rentrent dans le cas (i) et un dans le cas (ii).

Les cartes $\psi_{F,G}$ forment un atlas qui munit $\mathcal{G}(E)$ d'une structure de variété. On définit une distance d sur l'ensemble $\hat{\mathcal{G}}(E)$ de tous les sous-espaces vectoriels fermés de E en posant $d(F,F') = \sup(\theta(F,F'), \theta(F',F))$, où

$$\theta(F,F') = \sup_{x \in F,\ \|x\| \leq 1} \inf_{y \in F',\ \|y\| \leq 1} \|x-y\| .$$

L'ensemble $\mathcal{G}(E)$ est ouvert dans $\hat{\mathcal{G}}(E)$ et la topologie sous-jacente à la structure de variété coïncide avec la topologie induite par d . En particulier cette topologie est séparée.

9. <u>Applications</u> Ker <u>et</u> Im.

Etant donné trois espaces de Banach E , E' , E'' , on notera $\mathcal{S}(E,E',E'')$ l'ensemble des couples (f,g) de morphismes directs tels que

$$E \xrightarrow{f} E' \xrightarrow{g} E''$$

soit une suite exacte. En particulier $\mathcal{S}(0,E,E')$ et $\mathcal{S}(E,E',0)$ sont respectivement l'ensemble des monomorphismes directs et des épimorphismes directs de E dans E' .

PROPOSITION 4. a) <u>L'ensemble</u> $\mathcal{S}(E,E',0)$ <u>est ouvert dans</u> $\mathcal{L}(E,E')$ <u>et l'application</u>

$$\mathrm{Ker} : \mathcal{S}(E,E',0) \to \mathcal{G}(E)$$

<u>qui à</u> f <u>associe</u> $\mathrm{Ker}\, f$ <u>est une submersion directe analytique</u>.

b) <u>L'ensemble</u> $\mathcal{S}(0,E,E')$ <u>est ouvert dans</u> $\mathcal{L}(E,E')$ <u>et l'application</u>

$$\mathrm{Im} : \mathcal{S}(0,E,E') \to \mathcal{G}(E')$$

<u>est une submersion directe analytique</u>.

c) <u>L'ensemble</u> $\mathcal{S}(E,E',E'')$ <u>est ouvert dans l'ensemble</u> $\mathcal{D}(E,E',E'')$ <u>des couples</u> $(f,g) \in \mathcal{L}(E,E') \times \mathcal{L}(E',E'')$ <u>tels que</u> $g \circ f = 0$ <u>et est une sous-variété directe localement fermée de</u> $\mathcal{L}(E,E') \times \mathcal{L}(E',E'')$; <u>l'application</u>

$$\chi : \mathcal{S}(E,E',E'') \to \mathcal{G}(E) \times \mathcal{G}(E') \times \mathcal{G}(E'')$$

<u>définie par</u> $\chi(f,g) = (\mathrm{Ker}\, f \;,\; \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g \;,\; \mathrm{Im}\, g)$ <u>est une submersion directe analytique</u>.

a) Soit $f_0 \in \mathcal{S}(E,E',0)$ un épimorphisme direct de E dans E' , posons $T = \mathrm{Ker}\, f_0$, et soit S un supplémentaire de T dans E . Soit

$$f = (a,b) : E = T \oplus S \to E' ,$$

où $a : T \to E'$ et $b : S \to E'$. Pour que $\mathrm{Ker}\, f \in U_S$, il faut et il suffit que b soit inversible, ce qui a lieu sur un ouvert de $\mathcal{L}(E,E')$ contenant f_0 . Dans ce cas, $\mathrm{Ker}\, f$ est le graphe de $-b^{-1}_{\circ}\, a : T \to S$; l'expression de l'application Ker dans la carte $f = (a,b) \to (-b^{-1} a,b)$ de $\mathcal{L}(E,E')$, définie au voisinage de f_o , et la carte $\psi_{T,S}$ de $\mathcal{G}(E)$ est la projection sur le premier facteur.

b) Soit $f_o \in \mathcal{S}(0,E,E')$, posons $T' = \operatorname{Im} f_o$ et soit S' un supplémentaire de T' dans E' . Si $f = \binom{a}{b} : E \to T' \oplus S'$, on a $\psi_{T',S'}(\operatorname{Im} f) = b \circ a^{-1}$; or $f = \binom{a}{b} \to (a, b \circ a^{-1})$ est une carte de $\mathcal{L}(E,E')$ au voisinage de f_o .

c) Soit $(f_o,g_o) \in \mathcal{S}(E,E',E'')$, posons $(T,T',T'') = (f_o,g_o)$, et soient S, S' , S'' des supplémentaires de T , T' , T'' . Notons $j : S \to E$ l'injection canonique et $p : E \to T$ la projection parallèlement à S ; définissons de même j' , j'' , p' , p'' . Soient

$$f = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} : T \oplus S \to T' \oplus S'$$

et

$$g = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} : T' \oplus S' \to T'' \oplus S''$$

des applications linéaires continues suffisamment voisines de f , g pour que c et c' soient inversibles. Posons $\alpha = -c^{-1} \circ a = \psi_{T,S}(\operatorname{Ker} p' \circ f)$, $\delta = d \circ c^{-1} = \psi_{T',S'}(\operatorname{Im} f \circ j)$ et $\beta = b - d \circ c^{-1} \circ a$; les conditions suivantes sur f sont équivalentes : (i) $\beta = 0$; (ii) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f \circ j$; (iii) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} p' \circ f$. On définit de même α', δ' et β' .

La relation $g \circ f = 0$ entraîne $\operatorname{Im} f \circ j \subset \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} p'' \circ g$, mais si c et c' sont inversibles, $\operatorname{Im} f \circ j$ et $\operatorname{Ker} p'' \circ g$ appartiennent tous deux à $U_{S'}$ et l'inclusion entraîne l'égalité. Ceci montre que $\mathcal{S}(E,E',E'')$ est ouvert dans $\mathcal{D}(E,E',E'')$, et est défini au voisinage de (f_o,g_o) par $\operatorname{Im} f \circ j = \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} p'' \circ g$, soit $\beta = 0$, $\delta = \alpha'$,

$\beta' = 0$. Dans la carte $(f,g) \to (\alpha, \beta, c, \delta, \alpha', \beta', c', \delta')$, l'ensemble $\mathcal{S}(E,E',E'')$ est représenté sur un sous-espace direct ; et l'expression de χ dans cette carte et dans la carte $\psi_{T,S} \times \psi_{T',S'} \times \psi_{T'',S''}$ est l'épimorphisme direct

$$(\alpha, c, \delta, c', \delta') \to (\alpha, \delta, \delta') .$$

La proposition est démontrée.