Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Vo-Khac Khoan

Fonctions quasi-stationnaires et leur application aux équations différentielles opérationnelles linéaires et non linéaires

Séminaire Jean Leray, nº 2 (1964-1965), p. 77-88

<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964-1965___2_77_0>

FONCTIONS QUASI-STATIONNAIRES ET LEUR APPLICATION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES OPÉRATIONNELLES LINÉAIRES ET NON LINÉAIRES

par

M. VO-KHAC KHOAN

Introduction et résumé

Le point de départ de ce travail est la théorie des fonctions pseudo-aléatoires de J. BASS [1] dont les idées essentielles se trouvent résumées dans le fascicule 153 du Mémorial des Sciences mathématiques.

Il arrive fréquemment en physique que, en partant de données expérimentales bien simples, on obtienne des phénomènes de structure compliquée. De tels phénomènes se rencontrent par exemple en électricité (courant responsable du bruit de fond), en mécanique ondulatoire (fonctions d'onde non stationnaires) et surtout en hydrodynamique et en aérodynamique (turbulence). Le dispositif expérimental employé est construit de telle sorte que le phénomène reçoive une quantité d'énergie proportionnelle au temps et soit permanent à grande échelle. Mais, à échelle fine, il n'est pas absolument permanent, et présente dans le détail des oscillations très irrégulières qui, bien que relativement petites, jouent un rôle essentiel.

Le problème mathématique qui se pose alors est celui de l'étude de fonctions $f(t)$ du temps, permanentes en moyenne, mais compliquées dans le détail. Comment peut-on essayer de représenter de telles fonctions ?

La méthode "naturelle" à laquelle il faut penser est celle de l'analyse harmonique, dont l'objet est de représenter la fonction $f(t)$ par superposition de fonctions circulaires de périodes et d'amplitudes diverses. Cette superposition consiste mathématiquement en une intégrale de Fourier-Stieltjes relative à une mesure μ. Mais l'intégrale de Fourier-Stieltjes n'a qu'un champ d'utilisation limité. Elle est valable seulement dans deux cas :

- phénomène à autocorrélation temporelle identiquement nulle (i.e. phénomène amorti dans le temps) si μ est une mesure continue,

- phénomène à forte autocorrélation temporelle si μ est une mesure discrète (ce dernier cas est celui de la série de Fourier généralisée dont la somme est une fonction presque périodique).

L'analyse harmonique classique laisse donc échapper toute une classe importante de phénomènes naturels : les phénomènes à faible autocorrélation, ceux pour lesquels ce qui se passe dans le détail à l'instant t n'a pratiquement pas d'influence sur ce qui se passe à un instant ultérieur suffisamment éloigné.

A défaut de bonnes représentations purement analytiques, on a fait appel au calcul des probabilités et aux fonctions aléatoires. Le rôle fondamental joué par diverses moyennes est une justification *a priori* de l'intérêt de ces méthodes. On considère alors la fonction $f(t)$ comme le résultat d'une épreuve sur une fonction aléatoire stationnaire et, par le jeu d'un "principe ergodique", on interprète les moyennes temporelles comme des moyennes stochastiques. Ce mode de représentation est excellent en principe et permet un maniement commode des moyennes. Il est aussi bien adapté aux phénomènes à forte autocorrélation qu'aux phénomènes à faible autocorrélation. Mais il ne donne pas en général d'indications bien précises sur les propriétés de la fonction $f(t)$ elle-même. Or ces propriétés sont essentielles lorsque $f(t)$ est assujettie à vérifier une équation fonctionnelle, ce qui est le plus souvent le cas. En outre, surtout s'il s'agit d'une équation fonctionnelle non linéaire, la représentation de $f(t)$ par une fonction aléatoire est parfois tout à fait inefficace.

Le problème se pose donc de donner une image directe des fonctions $f(t)$ ayant les propriétés qualitatives suivantes : ce sont des fonctions du temps qui représentent un phénomène permanent à grande échelle, qui varient d'une façon irrégulière, en subissant des oscillations nombreuses, non périodiques et qui possèdent une faible autocorrélation.

L'ensemble de ces propriétés a conduit J. Bass [1] à définir un type de fonctions auxquelles il a donné le nom de fonctions pseudo-aléatoires :

Une fonction pseudo-aléatoire, au sens de J. Bass, est une fonction $f(t)$ complexe, bornée, et nulle pour $t < 0$, dont la fonction d'autocorrélation

$$\gamma(h) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t+h)\overline{f(t)}dt$$

existe, est continue, n'est pas nulle pour $h = 0$, et tend vers zéro lorsque $h \to \infty$.

Les fonctions pseudo-aléatoires ont été étudiées avec assez de détail, on en connaît de nombreuses propriétés et on en construit des classes très larges (cf. J. BASS [1], J.P. BERTRANDIAS [2], M. MENDES-FRANCE [8], VO-KHAC KHOAN [10]).

Un inconvénient des fonctions pseudo-aléatoires (ainsi définies) est qu'elles ne forment pas un espace vectoriel, et l'espace vectoriel naturel dans lequel on peut les placer (espace $\mathcal{M}^2$ de Besicovitch-Marcinkiewicz) est trop grand pour donner des résultats précis. Un des buts principaux de la thèse de J.P. Bertrandias [2] est de trouver des sous-espaces vectoriels de l'espace $\mathcal{M}^2$ mieux adaptés, permettant une étude plus facile de ces fonctions. Ces résultats précieux sont, en un certain sens, cependant insuffisants, surtout pour l'application aux équations différentielles opérationnelles et aux problèmes non linéaires.

Au lieu de plonger l'ensemble des fonctions pseudo-aléatoires dans un espace vectoriel plus grand comme l'a fait J.P. Bertrandias, <u>nous cherchons au contraire des sous-espaces vectoriels de l'espace des fonctions pseudo-aléatoires</u> -comme l'a amorcé J. Bass [1], et nous généralisons cette étude en vue des applications aux problèmes non linéaires.

Ce travail se compose de trois parties :

<u>A</u>. Dans la première partie, on étudie les propriétés d'une certaine classe de fonctions, que je nomme <u>fonctions quasi-stationnaires</u>. Ces fonctions englobent les fonctions presque périodiques et les fonctions pseudo-aléatoires, et par suite <u>peuvent représenter soit des phénomènes à forte autocorrélation, soit des phénomènes à faible autocorrélation</u>.

Le chapitre A 1 étudie <u>les espaces</u> $\mathcal{M}^p(\mathcal{G};X)$ <u>de Besicovitch-Marcinkiewicz</u> relatifs à un groupe abélien localement compact $\mathcal{G}$, et à un espace de Banach X. L'espace $\mathcal{M}^p(\mathcal{G};X)$ est, par définition l'ensemble des (classes de) fonctions $f(t)$ définies sur $\mathcal{G}$, à valeurs dans X telles que

$$\|f\|^p = \limsup_{j \to \infty} \frac{1}{\nu(\Omega_j)} \int_{\Omega_j} \|f(t)\|^p \, d\nu(t) < \infty \quad , \quad p \geq 1$$

où ν est la mesure de Haar du groupe $\mathcal{G}$,

$\{\Omega_j\}$ une suite croissante de sous-ensembles ν-mesurables de $\mathcal{G}$ (de mesures finies non nulles) et recouvrant $\mathcal{G}$.

On structure $\mathcal{M}^p(\ ;X)$ en un espace vectoriel normé en prenant $|||f|||$ comme norme de f ; le théorème de Marcinkiewicz [7] montre alors que l'espace $\mathcal{M}^p(\mathcal{G};X)$ est un espace de Banach.

Moyennant une autre hypothèse sur la famille $\{\Omega_j\}$, on montre que la norme $|||\ \ |||$ est invariante par translation.

On définit ensuite l'espace $\mathcal{M}_c^p(\mathcal{G};X)$ des $\mathcal{M}^p$-fonctions $\mathcal{M}^p$-continues, et on montre, en particulier, que $\mathcal{M}_c^p(\mathcal{G};X)$ est un sous-espace vectoriel fermé invariant par translation de l'espace $\mathcal{M}^p(\mathcal{G};X)$. On étudie enfin, dans ce chapitre A 1, les propriétés des produits de convolution d'une $\mathcal{M}^p$-fonction respectivement par une mesure de Radon, par une fonction absolument sommable et par un opérateur borné de norme absolument sommable.

Le chapitre A 2 étudie l'ergodicité et la presque-périodicité (faible et forte) dans ces espaces de Besicovitch-Marcinkiewicz, en suivant les méthodes utilisées par J. VON NEUMANN [9] et W.F. EBERLEIN [3]. On définit d'abord la $\mathcal{M}^p$-moyenne (au sens de Von Neumann) et les coefficients de Fourier-Besicovitch d'une $\mathcal{M}_c^p$-fonction. On étudie ensuite les fonctions $\mathcal{M}^p$-ergodiques (qui possèdent, par définition, une $\mathcal{M}^p$-moyenne) et les fonctions $\mathcal{M}^p$-totalement-ergodiques (qui possèdent un coefficient de Fourier-Besicovitch en tout point χ du groupe dual $\hat{\mathcal{G}}$). On montrera que les ensembles $\mathcal{E}^p(\mathcal{G};X)$ et $\mathcal{E}_t^p(\mathcal{G};X)$ des fonctions $\mathcal{M}^p$-ergodiques et $\mathcal{M}^p$-totalement-ergodiques sont des sous-espaces fermés invariants de $\mathcal{M}_c^p(\mathcal{G};X)$. On étudie enfin, dans ce chapitre, le $\mathcal{M}^p$-presque-périodicité. Une $\mathcal{M}_c^p$-fonction est <u>dite</u> <u>$\mathcal{M}^p$-(faiblement)presque-périodique</u> si l'ensemble de ses translatées est relativement (faiblement) compact dans $\mathcal{M}_c^p(\mathcal{G};X)$. Une $\mathcal{M}_c^p$-fonctions est dite <u>$\mathcal{M}^p$-pseudo-aléatoire</u> si elle est $\mathcal{M}^p$-faiblement-presque-périodique et si son spectre est vide (i.e. si tous ses coefficients de Fourier-Besicovitch sont nuls).

On montre que les ensembles $\mathcal{F}^p(\mathcal{G};X)$, $\Pi^p(\mathcal{G};X)$ et $\mathcal{A}^p(\mathcal{G};X)$ des fonctions $\mathcal{M}^p$-faiblement-presque-périodiques, $\mathcal{M}^p$-presque-périodiques et $\mathcal{M}^p$-pseudo-aléatoires sont des <u>sous-espaces vectoriels fermés invariants de l'espace</u> $\mathcal{M}_c^p(\mathcal{G};X)$. On montre aussi la $\mathcal{M}^p$-totale-ergodicité de $\mathcal{F}^p(\mathcal{G};X)$. On donne un <u>théorème d'approximation et un théorème de sommation</u> pour les fonctions $\mathcal{M}^p$-presque-périodiques analogues à ceux connus pour les fonctions uniformément-presque-périodiques (fonctions de Bohr-Bochner). On montre enfin que l'espace $\mathcal{F}^p(\mathcal{G};X)$ est la somme directe des deux sous-espaces disjoints $\Pi^p(\mathcal{G};X)$ et $\mathcal{A}^p(\mathcal{G};X)$ (<u>théorème de décomposition de Bertrandias</u>).

Le chapitre A 3 introduit la notion de <u>*-comparabilité</u>, très utile pour la suite. Deux éléments $f \in \mathcal{M}^p(\mathcal{G},X)$ et $g \in \mathcal{M}^q(\mathcal{G};X^*)$, $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$, sont dits *-comparables si :

$$\underset{(t)}{\mathcal{M}} < f(t) | g(t) > = \lim_{j \to \infty} \frac{1}{\nu(\Omega_j)} \int_{\Omega_j} < f(t) | g(t) > \, d\nu(t)$$

existe. Le cas où X est un Hilbert H et où $p = 2$ est très important, et conduit à l'espace $\mathcal{P}(\mathcal{G};H)$ de Bass et aux fonctions quasi-stationnaires. L'espace de Bass $\mathcal{P}(\mathcal{G};H)$ est, par définition, le sous-espace métrique non vectoriel de $\mathcal{M}^2(\mathcal{G};H)$ des $\mathcal{M}^2$-fonctions *-comparables à elles-mêmes.

L'espace $S(\mathcal{G};H)$ des fonctions quasi-stationnaires est étudié dans le chapitre A 4. Par définition, une $\mathcal{M}_c^2$-fonction est dite quasi-stationnaire si elle est *-comparable à toutes ses translatées ; autrement dit sa fonction d'autocorrélation

$$\gamma(h) = \underset{(t)}{\mathcal{M}} \langle f(t+h) | f(t) \rangle$$

existe et est continue. Les propriétés d'une fonction quasi-stationnaire sont les suivantes :

(i) Une fonction quasi-stationnaire f est $\mathcal{M}^2$-faiblement-presque-périodique (mais la réciproque est fausse).

(ii) La fonction d'autocorrélation $\gamma(h)$ de f est une fonction uniformément-faiblement-presque-périodique (fonction d'Eberlein). Plus précisément, $\gamma(h)$ est la transformée de Fourier d'une mesure σ positive, bornée, appelée mesure spectrale énergétique de f

$$\gamma(h) = \int_{\hat{\mathcal{G}}} e^{i\chi h} \, d\sigma(\chi)$$

où $e^{i\chi h}$ désigne (incorrectement) un élément du groupe dual $\hat{\mathcal{G}}$ (groupe des caractères).

Suivant que la mesure σ est continue ou discontinue, f sera appelée <u>fonction</u> S-<u>pseudo-aléatoire</u> ou S-<u>presque-périodique</u>.

(iii) Il existe $Y(t,\Delta)$, quasi-stationnaire (en t), complètement additive d'ensemble (en Δ), tel que :

$$f(t+h) = \int_{\hat{\mathcal{G}}} e^{i\chi h} \, Y(t, d\chi) .$$

Cette "mesure spectrale élémentaire" $Y(t,\Delta)$ permet de réaliser un <u>isomorphisme isométrique</u> entre l'espace $L^2(\sigma)$ et l'espace $\tau(f;\mathcal{M}^2,H)$, enveloppe linéaire (fermée) des translatées de f :

$$g(t) = \int_{\hat{\mathcal{G}}} c(\chi)Y(t,d\chi) \quad , \qquad g \in \tau(f;\mathcal{M}^2,H) \ ; \quad c \in L^2(\sigma) .$$

Le chapitre A 5 étudie l'espace $\overset{1}{S}(\mathcal{G};H)$ des fonctions <u>1-quasi-stationnaires</u> en vue des applications aux problèmes opérationnels linéaires. Une fonction $f(t)$ est dite 1-quasi-stationnaire si quel que soit l'opérateur linéaire borné A de l'espace H, la fonction $Af(t)$ est quasi-stationnaire. A chaque fonction 1-quasi-stationnaire, est attaché un sous-espace vectoriel complet de l'espace $\overset{1}{S}(\mathcal{G};H)$ appelé <u>enveloppe linéaire opérationnelle</u> $\overset{\#}{\tau}(f;\mathcal{M}^2,H)$. C'est le plus petit ensemble de fonctions qui :

(i) contienne f

(ii) ne puisse contenir une fonction sans contenir toutes ses translatées

(iii) ne puisse contenir une fonction sans contenir toutes ses transformées par tous les opérateurs linéaires bornés de H,

(iv) ne puisse contenir une suite de Cauchy de fonctions, sans contenir leur $\mathcal{M}^2$-limite

Le chapitre A 6 étudie l'espace $\overset{\infty}{S}(\mathcal{G};H)$ des <u>fonctions</u> ∞-<u>quasi-stationnaires</u> en vue des applications aux problèmes non linéaires. On obtient des résultats analogues à ceux du chapitre précédent en remplaçant les opérateurs linéaires par les opérateurs multilinéaires. En particulier, chaque fonction ∞-quasi-stationnaire engendre un sous-espace vectoriel complet de $\overset{\infty}{S}(\mathcal{G};H)$ appelé <u>enveloppe multilinéaire</u> $\overset{\infty}{\tau}(f;\mathcal{M}^2,H)$.

Le chapitre A 7 étudie les fonctions faiblement-quasi-stationnaires à valeurs dans un espace de Banach X. On montre en particulier que f est 1-quasi-stationnaire, alors Af est faiblement-quasi-stationnaire quel que soit l'opérateur fermé A de H.

Le chapitre A 8 donne quelques méthodes de construction des fonctions pseudo-aléatoires et ∞-pseudo-aléatoires à l'aide de la théorie des suites équiréparties modulo 1.

B. Dans la deuxième partie, on se propose d'étudier les solutions quasi-stationnaires des équations différentielles opérationnelles (cf. J.L. Lions [6]) linéaires et non linéaires.

Le chapitre B 1 étudie en détail l'opérateur ∇ de $\mathcal{M}^2$-dérivation des fonctions $\mathcal{M}^2$-continues. Par définition, ∇ est le générateur infinitésimal du groupe fortement continu des opérateurs de translations de l'espace $\mathcal{M}_c^2(-\infty, +\infty; H)$. Il en résulte (cf. E. HILLE et R.S. PHILLIPS [4]) que est fermé, de domaine dense et conservatif. On introduit ensuite l'espace de Wiener $\mathcal{W}(-\infty, \infty; H)$ des fonctions indéfiniment $\mathcal{M}^2$-dérivables et son dual topologique $\mathcal{W}'(-\infty, \infty; H)$ (espace des $\mathcal{M}^2$-distributions).

Le chapitre B 2 étudie les solutions quasi-stationnaires d'un système différentiel linéaire ou non linéaire. On utilise ici l'analyse spectrale énergétique et l'analyse spectrale élémentaire des fonctions quasi-stationnaires.

Les chapitres B 3 et B 4 définissent et étudient les solutions faibles et quasi-stationnaires de certaines classes d'équations différentielles opérationnelles linéaires et non linéaires. On voit ici l'intérêt et l'utilisation des espaces

M. Vo-Khac Khoan, Fonctions quasi-stationnaires, B.

$$\overset{\#}{\tau}(f;\mathcal{M}^2,H) \quad \text{et} \quad \overset{\infty}{\tau}(f;\mathcal{M}^2,H)$$

introduits précédemment. Diverses méthodes ont été utilisées pour montrer l'existence, l'approximation et la régularisation de ces solutions. Certaines de ces méthodes peuvent être utilisées pour la construction numérique.

Les chapitres B.5 et B 6 définissent et étudient les <u>solutions fortes et quasi-stationnaires d'équations différentielles opérationnelles linéaires et non linéaires</u>. On utilise ici la théorie des semi-groupes et celle des puissances fractionnaires d'un opérateur.

<u>C</u>. Dans la troisième partie, on étudie plus spécialement <u>les solutions pseudo-aléatoires des équations de Navier-Stokes</u> (problème de la turbulence en hydrodynamique, cf. J. Bass [1], cf. aussi le travail fondamental de J. Leray [5]) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + \sum\limits_k u_k \dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} - \nu \Delta u_i + \dfrac{\partial p}{\partial x_i} = f_i \,, & i = 1,2,3 \\[2ex] \sum\limits_k \dfrac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 & k = 1,2,3 \,. \end{cases}$$

Des théorèmes d'existence et d'unicité sont donnés en s'appuyant sur les résultats de la deuxième partie. Dans cette troisième partie, nous avons fait un essai pour "expliquer" la turbulence, en excluant toute hypothèse statistique. En général, la force massique extérieure dérive d'un potentiel, et par suite sera considérée comme nulle, car seule la composante non-irrationnelle intervient dans l'étude de la vitesse. <u>Cependant, il ne serait pas absurde</u>

de supposer que cette composante non-irrationnelle, nulle en moyenne, possède des agitations irrégulières dans le temps, agitations qui seraient la cause de la turbulence. D'autre part, si les parois réelles sont fixes, les parois fictives, celles qui interviennent effectivement (je veux dire : mathématiquement) dans les conditions aux limites, sont très probablement variables (couches limites turbulentes). Elles varient très irrégulièrement dans le temps et rendent irrégulières les variations de la vitesse. Bref, la turbulence du mouvement d'un fluide serait ainsi due soit à l'irrégularité de la force massique extérieure, soit à l'irrégularité des conditions aux limites. Enfin, nous avons fait une brève discussion sur l'intérêt et l'utilisation des solutions fortes et faibles pour voir dans quelles mesures ces solutions peuvent être considérées comme les solutions turbulentes des équations de Navier-Stokes.

N.B.- Le contenu de ce travail sera développé dans la thèse de Vo-Khac Khoan, prochainement présentée à l'Université de Paris.

Bibliographie sommaire

[1] J. BASS. Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires. Bull. Soc. Math. Fr. 87 (1959).

[2] J.P. BERTRANDIAS. Espaces des fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique. Thèse Paris (1964). Bull. Soc. Math. Fr. (à paraître).

[3] W.F. EBERLEIN. Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions. Trans. Amer. Math. Soc. 67 (1949).

[4] E. HILLE et R.S. PHILLIPS. Functional analysis and semi-groups. Amer. Math. Soc. (1957).

[5] J. LERAY. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. Acta Math. 63(1934).

[6] J.L. LIONS. Equations différentielles opérationnelles. Springer-Verlag (1961)

[7] J. MARCINKIEWICZ. Une remarque sur les espaces de M. Besicovitch. C.R. Acad. Sc. 108(1939), p.157.

[8] M. MENDES-FRANCE. Nombres normaux et fonctions pseudo-aléatoires. Ann. Inst. Fourier, 23(1963).

[9] J. VON NEUMANN. Almost periodic functions in a group I. Trans. Amer. Math. Soc. 36(1934).

[10] VO-KHAC KHOAN. Fonstions de fonctions pseudo-aléatoires. C.R. Acad. Sc. 256(1963), p. 4580.