Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Jean Leray
Yujiro Ohya

Équations et systèmes non-linéaires, hyperboliques non-stricts

Séminaire Jean Leray, n° 2 (1964-1965), p. 16-76
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964-1965___2_16_0>

ÉQUATIONS ET SYSTÈMES NON-LINÉAIRES, HYPERBOLIQUES NON-STRICTS,

par

Jean LERAY et Yujiro OHYA

Introduction

0. HISTORIQUE.- Le problème de Cauchy fut étudié d'abord quand les données et les inconnues sont holomorphes (Cauchy-Kowalewski ; N.A. Lednev [8] supprime l'hypothèse d'holomorphie par rapport au "temps", tout en conservant l'hypothèse d'holomorphie par rapport aux coordonnées "d'espace"). Puis ce problème le fut, sous l'hypothèse d'hyperbolicité stricte, quand les données et les inconnues sont des fonctions dérivables jusqu'à un ordre donné ou même des distributions (Hadamard, Petrowsky, J. Leray [9], L. Gårding [4], P. Dionne [3]); alors la solution ne dépend que localement des données ; plus précisément, il existe des "domaines d'influence".

Récemment divers auteurs ont étudié des cas intermédiaires : de Giorgi [6] discute l'unicité, C. Pucci [14] et G. Talenti [15] prouvent l'existence quand le cône caractéristique se réduit à des droites parallèles ; L. Hörmander [7] (théorème 5.7.3) traite l'équation linéaire à coefficients constants, hyperbolique non stricte(1); Y. Ohya [13] étudie,en coefficients variables, l'opérateur de Calderon-Zygmund et, en particulier, l'opérateur linéaire hyperbolique, dont le polynome caractéristique est un produit d'opérateurs strictement hyperboliques ; nous avons étendu ses conclusions aux systèmes linéaires [10] en formalisant son procédé et en employant une suggestion de L. Waelbroeck, dont l'article [11] va maintenant nous permettre de traiter le cas non linéaire.

(1) Hörmander réserve le terme "hyperbolique" au strictement hyperbolique. Pour nous, il y a hyperbolicité quand il y a domaine d'influence.

Tous ces travaux ont des conclusions du type que le n°1 va énoncer.

1. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS.- Nous résolvons le problème de Cauchy pour un système non linéaire, non strict.

Nos hypothèses ont pour cas extrêmes les deux cas suivants :

1°) hyperbolicité stricte ; données et inconnues indéfiniment dérivables ; (il y a alors des domaines d'influence) ;

2°) aucune hypothèse d'hyperbolicité ; données et inconnues holomorphes par rapport aux coordonnées d'espaces ; (il n'y a pas de domaine d'influence).

Hors de ces cas extrêmes, nos hypothèses sont les suivantes :

3°) le polynôme caractéristique est un produit de polynômes strictement hyperboliques ; les données et les inconnues sont indéfiniment différentiables par rapport aux coordonnées d'espace ; plus précisément, elles sont dans une classe de Gevrey, non quasi-analytique ; il existe des domaines d'influence.

On trouvera les énoncés précis aux n° 21, 27 et 29.

APPLICATIONS.- S.S. Chern et Hans Lewy [1] ont rencontré en géométrie différentielle le problème non linéaire que nous résolvons.

Mme Y. Choquet-Bruhat [2] et A. Lichnerowicz [12] ont ramené à ce problème la résolution des équations de la magnéto-hydrodynamique relativiste.

2. SOMMAIRE.- Nous adaptons au cas non-linéaire le procédé qu'emploie l'article [10], dont la connaissance n'est pas indispensable ; ce procédé se simplifie, car l'étude non linéaire est purement locale ; cependant il doit employer pour les coefficients des normes un peu moins simples : les normes de Schauder.

Le problème est résolu par approximations successives, que définissent des problèmes de Cauchy linéaires, strictement hyperboliques. L'étude de ces approximations successives emploie leurs normes formelles, c'est-à-dire des séries formelles ayant pour coefficients les normes de toutes leurs dérivées. La majoration des approximations successives résulte de la résolution d'un problème de Cauchy non linéaire formel, c'est-à-dire ayant pour données et inconnue des séries formelles, appartenant à une classe de Gevrey formelle. La convergence des approximations successives résulte de la résolution d'un second problème de Cauchy formel, qui est linéaire.

L'existence des domaines d'influence résulte du théorème d'unicité que nous avons obtenu dans le cas linéaire [10] ; la précision de ce théorème d'unicité provient de ce que, dans ce cas linéaire, un théorème d'existence non local peut être obtenu, par ces raisonnements mêmes dont la suppression allège le présent article.

§ 1. Normes formelles.

3. NORMES.- Notons les coordonnées de $\mathbb{R}^{\ell+1}$

$$(x_0, x_1, \ldots, x_\ell)$$

et

$$D_x^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_0^{\beta_0} \ldots \partial x_\ell^{\beta_\ell}} .$$

Soit X la bande de $\mathbb{R}^{\ell+1}$ d'équation

$$X : 0 \leqslant x_0 \leqslant |X| \quad ;$$

soit S_t l'hyperplan de X d'équation

$$S_t : x_0 = t .$$

Notons : K_t les cubes, de côté 1, appartenant à S_t ;

$$\left|f, S_t\right|_2 = \left[\int_{S_t} |f|^2 \, dx_1 \ldots dx_\ell\right]^{1/2};$$

$$\left|f, K_t\right|_2 = \left[\int_{K_t} |f|^2 \, dx_1 \ldots dx_\ell\right]^{1/2} .$$

Etant donné un entier $n \geqslant 0$, nous nommons <u>quasi-normes</u> d'une fonction

$$f : X \to \mathbb{C}$$

les deux fonctions de t :

$$\left|D^n f, S_t\right| = c \sup_\beta \left|D_x^\beta f, S_t\right|_2 \qquad (|\beta| \leqslant n)$$

$$\left\|D^n f, S_t\right\| = c \sup_{\beta, K_t} \left|D_x^\beta f, K_t\right|_2 \quad ;$$

ce sont des normes de f mod $(x_o-t)^n$; $c = c(\ell, n)$ est une fonction de (ℓ, n), croissante en n et assez grande pour que la propriété (3.1) et la formule (3.2) soient exactes.

Dionne [3], ch.1, (6.3.9), déduit des théorèmes de Sobolev ceci, sous l'hypothèse :

$$n > \ell/2 \ :$$

(3.1) ces deux normes sont des <u>normes d'algèbres</u> ;

leur finitude entraîne la continuité de f ;

on a <u>la formule du produit</u> :

(3.2) $$|D^n(f.g),\, S_t| \leqslant \|D^n f,\, S_t\| \,.\, |D^n g,\, S_t| \,.$$

Soit un domaine $Y \subset \underline{\underline{C}}^m$. Nous nommons <u>quasi-normes</u> d'une fonction

$$F : X \times Y \to \underline{\underline{C}}$$

les deux fonctions de t, dépendant d'un vecteur $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$, à composantes $\nu_j \geqslant 0$:

$$|D^n F,\, S_t \times Y, \nu| = c \sup_\beta \Big| \sup_{y \in Y} \big| D^\beta_{x,y} F(x,y) \big|,\, S_t \Big|_2 \,(1 + c'|\nu|)^n$$

$$\|D^n F,\, S_t \times Y, \nu\| = c \sup_{\beta, K_t} \Big| \sup_{y \in Y} \big| D^\beta_{x,y} F(x,y) \big|,\, K_t \Big|_2 \,(1 + c'|\nu|)^n ,$$

où

$$D^\beta_{x,y} = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_o^{\beta_o} \dots \partial y_m^{\beta_{m+\ell}}} , \quad |\beta| \leqslant n, \quad |\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_m ,$$

$c' = c'(m)$ suffisamment grand pour avoir (3.3).

Soit une application

$$v = (v_1, \dots, v_m) : X \to Y ;$$

notons $F \circ v$ la fonction composée

$$(F \circ v)(x) = F(x, v(x)) \; ;$$

notons $|D^n v, S_t|$ le vecteur de composantes $|D^n v_j, S_t|$ $(j = 1, \dots, m)$.

Dionne [3], théorème 6.4, explicite comme suit le <u>théorème de composition</u> de Sobolev : si on a $n > \ell/2 + 1$,

$$(3.3) \qquad \left\| D^n (F \circ v), S_t \right\| \leqslant \left\| D^n F, S_t \times Y, \left| D^n v, S_t \right| \right\| \; ;$$

on peut remplacer $\|\dots\|$ par $|\dots|$.

4. NORMES FORMELLES.- On nomme <u>quasi-normes formelles</u> de $f : X \to \underline{\underline{C}}$ les deux séries formelles de ρ, à coefficients fonctions de t :

$$\left| D^{n,\infty} f, S_t, \rho \right| = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s!} \sup_{\sigma} \left| D^n D_x^{\sigma} f, S_t \right|$$

$$= c \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s!} \sup_{\beta, \sigma} \left| D_x^{\beta + \sigma} f, S_t \right|_2 \; ,$$

$$\left\| D^{n,\infty} f, S_t, \rho \right\| = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s!} \sup_{\sigma} \left\| D^n D_x^{\sigma} f, S_t \right\|$$

$$= c \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s!} \sup_{\beta, \sigma, K_t} \left| D_x^{\beta + \sigma} f, K_t \right|_2$$

où $|\beta| \leqslant n$, $\sigma = (0, \sigma_1, \dots, \sigma_\ell)$, $|\sigma| = \sigma_1 + \dots + \sigma_\ell = s$.

Introduisons des variables commutatives $(\rho, \eta_1, \dots, \eta_m, \nu)$; notons $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$, $\eta^{\tau} = \eta_1^{\tau_1}, \dots, \eta_m^{\tau_m}$, nous définissons de même les <u>quasi-normes formelles</u> de $F : X \times Y \to \underline{\underline{C}}$:

$$\|D^{n,\infty} F, S_t \times Y, \rho, \eta, \nu\| = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s!} \frac{\eta^\tau}{\tau!} \sup_\sigma \|D^n D_x^\sigma D_y^\tau F, S_t \times Y, \nu\|$$

$$|D^{n,\infty} F, S_t \times Y, \rho, \eta, \nu| = \sum_s \frac{\rho^s}{s!} \frac{\eta^\tau}{\tau!} \sup_\sigma |D^n D_x^\sigma D_y^\tau F, S_t \times Y, \nu| ,$$

où $\sigma = (0, \sigma_1, \ldots, \sigma_\ell)$, $|\sigma| = \sigma_1 + \ldots + \sigma_\ell = s$.

Une série formelle $\gg 0$ est une série à coefficients $\geqslant 0$.

Enonçons les propriétés des quasi-normes formelles ; le n° 5 les prouvera.

Formule du produit.- Si $n > \ell/2$, on a :

$$(4.1) \quad |D^{n,\infty}(fg), S_t, \rho| \ll \|D^{n,\infty} f, S_t, \rho\| . |D^{n,\infty} g, S_t, \rho| ;$$

on peut remplacer $|\ldots|$ par $\|\ldots\|$.

Formule de la dérivée.- Notons $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$; si $j > 0$, on a

$$(4.2) \quad |D^{n,\infty} D_j f, S_t, \rho| \ll \frac{\partial}{\partial \rho} |D^{n,\infty} f, S_t, \rho| \ll |D^{n+1,\infty} f, S_t, \rho| \ll$$

$$\ll c'' |D^{o,\infty} D_o^{n+1} f, S_t, \rho| + c''(1 + \frac{\partial}{\partial \rho}) |D^{n,\infty} f, S_t, \rho|$$

où $c'' = c''(\ell, n)$; on peut remplacer $|\ldots|$ par $\|\ldots\|$.

Formule du commutateur.- Soit $a(x,D)$ un opérateur différentiel linéaire normal(1) d'ordre $m \geqslant 1$; sa quasi-norme formelle $\|D^{n,\infty} a, S_t, \rho\|$ sera la somme de celles de ses coefficients ; nous définissons

---

(1) Son premier coefficient, c'est-à-dire celui de D_o^m , vaut 1 ; il suffit de diviser un opérateur par son premier coefficient pour le rendre normal.

J. Leray et Y. Ohya, Équations et systèmes non-linéaires, § 1.

$$\left| D^n[D^\infty,a]\, f,S_t,\rho \right| = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s!} \sup_\sigma \left| D^n[D^\sigma,a]f,S_t \right|$$

$$= c \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s!} \sup_{\beta,\sigma} \left| D^\beta [D^\sigma,a]f,S_t \right|_2$$

où

$$[D^\sigma,a]f = D^\sigma(af) - a(D^\sigma f), \quad |\beta| \leqslant n,\ \sigma = (0,\sigma_1,\dots,\sigma_\ell),\ |\sigma| = s.$$

Nous avons, si $n > \ell/2$:

(4.3) $\left| D^n[D^\infty,a]f,S_t,\rho \right| \ll$

$$[\, \| D^{n,\infty} a,S_t,\rho \| - \| D^n a,S_t \| \,]\ (1+\frac{\partial}{\partial\rho}) \left| D^{m+n-1,\infty} f,S_t,\rho \right| \ .$$

<u>Formule de composition</u>. - Si $v : X \to Y$, $(F \circ v)(x) = F(x,v(x))$,
et $n > \frac{\ell}{2} + 1$, nous avons :

(4.4) $\| D^{n,\infty}(F \circ v),S_t,\rho \| \ll$

$$\left\| D^{n,\infty} F,S_t \times Y,\rho,\ |D^{n,\infty} v,S_t,\rho| - |D^n v,S_t|,\ |D^n v,S_t| \right\| ;$$

on peut remplacer $\|\dots\|$ par $|\dots|$.

5. PREUVES DES FORMULES PRÉCÉDENTES.- [10] montre comment (3.3) implique <u>la formule de composition</u> (4.4) ; (il faut remplacer dans [6] $|\dots|$ par $|D^n\dots|$, $\|\dots\|$ par $\|D^n\dots\|$).

<u>La formule de la dérivée</u> (4.2) est facile à prouver.

Prouvons <u>celle du commutateur</u>, en prouvant d'abord la suivante (dont il suffit de modifier légèrement la preuve pour établir celle du produit (4.1)) :

Une formule préliminaire.- Définissons la série formelle en $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_\ell)$:

$$\|D^{n,\infty} f, S_t ; \xi\| = \sum_\sigma \frac{\xi^\sigma}{\sigma!} \|D^n D^\sigma f, S_t\|$$

et de même avec $|\ldots|$ au lieu de $\|\ldots\|$; rappelons que

$$\sigma! = \sigma_1! \ldots \sigma_\ell! \quad , \quad \xi^\sigma = \xi_1^{\sigma_1} \ldots \xi_\ell^{\sigma_\ell} \quad .$$

Notons

$$[D^\sigma, f]g = D^\sigma(fg) - f\, D^\sigma g ,$$

(5.1) $$|D^n[D^\infty, f]g, S_t ; \xi| = \sum_\sigma \frac{\xi^\sigma}{\sigma!} |D^n[D^\sigma, f]g, S_t| , \quad \text{où } \sigma_0 = 0 ;$$

(5.2) $$|D^n[D^\infty, f]g, S_t, \rho| = \sum_s \frac{\rho^s}{s!} \sup_\sigma |D^n[D^\sigma, f]g, S_t| \quad \text{où } \sigma_0 = 0 , \; |\sigma| = s \quad .$$

D'après la formule de Leibniz de la dérivée d'un produit :

$$|D^n[D^\infty, f]g, S_t ; \xi| = \sum_\sigma \frac{\xi^\sigma}{\sigma!} |D^n(D^\sigma(f.g) - f.D^\sigma g), S_t|$$

$$\ll \sum_{\sigma,\tau} \frac{\xi^\sigma}{\sigma!} \frac{\xi^\tau}{\tau!} |D^n(D^\sigma f).(D^\tau g), S_t| \; ; \text{ où } |\sigma| > 0 \; ; \; \sigma_0 = \tau_0 =$$

donc, d'après la formule du produit (3.2);

$$|D^n[D^\infty, f]g, S_t ; \xi| \ll [\|D^{n,\infty} f, S_t ; \xi\| - \|D^n f, S_t\|] \; |D^{n,\infty} g, S_t ; \xi| \; ;$$

d'où, en posant

$$\rho = \xi_1 + \ldots + \xi_\ell ,$$

ce qui implique

(5.3) $$\frac{\rho^s}{s!} = \sum_\sigma \frac{\xi^\sigma}{\sigma!} \qquad (|\sigma| = s),$$

$$\left|D^n[D^\infty,f]g,S_t\,;\zeta\,\right| \ll [\,\|D^{n,\infty}f,S_t,\rho\| - \|D^n f,S_t\|\,]\left|D^{n,\infty}g,S_t,\rho\right| \;.$$

Or, (L. Gårding), vu (5.3), (5.2) est la plus petite série en ρ qui majore (5.1) ; l'inégalité précédente signifie donc que

$$(5.4)\quad \left|D^n[D^\infty,f]g,S_t,\rho\right| \ll [\,\|D^{n,\infty}f,S_t,\rho\| - \|D^n f,S_t\|\,].\left|D^{n,\infty}g,S_t,\rho\right| \;.$$

<u>Preuve de la formule du commutateur</u> (4.3).- Il suffit de prouver cette formule quand $a(x,D)$ est un monome:

$$a(x,D) = a_\alpha(x)\, D^\alpha \quad , \qquad \text{où} \quad |\alpha| \leqslant m \;.$$

Si $|\alpha| \leqslant m-1$, (5.4) donne

$$\left|D^n[D^\infty,a]f,S_t,\rho\right| \ll [\,\|D^{n,\infty}a,S_t,\rho\| - \|D^n a,S_t\|\,].\left|D^{m+n-1,\infty}f,S_t,\rho\right| \;.$$

Si $\alpha = (m,0,\dots,0)$, alors $a_\alpha = 1$, puisque a est normal ; donc

$$\left|D^n[D^\infty,a]f,S_t,\rho\right| = 0 \;.$$

Enfin si $|\alpha| = m$ et $\alpha_0 < m$, alors $D^\alpha = D^\beta D_j$ où $|\beta| = m-1$, $1 \leqslant j$ et (5.4) donne :

$$\left|D^n[D^\infty,a]f,S_t,\rho\right| \ll [\,\|D^{n,\infty}a,S_t,\rho\| - \|D^n a,S_t\|\,]\left|D^{m+n-1,\infty}D_j\, f,S_t,\rho\right| \ll$$

$$[\,\|D^{n,\infty}a,S_t,\rho\| - \|D^n a,S_t\|\,]\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left|D^{m+n-1,\infty}f,S_t,\rho\right| \;,$$

vu la formule de la dérivée (4.2).

§ 2. Opérateurs linéaires hyperboliques non-stricts.

6. L'OPÉRATEUR STRICTEMENT HYPERBOLIQUE a les propriétés que voici (Dionne [3]).

Sur la bande X soit un opérateur hyperbolique d'ordre m

$$a(x,D) = \sum_{|\beta| \leqslant m} a_\beta(x) D^\beta$$

et une fonction $b(x)$; posons le problème de Cauchy d'inconnue $u(x)$

$$(6.1) \quad a(x,D)u(x) = b(x) \quad , \qquad D^{m-1} u|S_0 = 0$$

Nous supposons $a(x,D)$ normal et régulièrement hyperbolique pour les hyperplans S_t ; nous notons $\chi(a)$ son caractère de régularité : rappelons qu'il dépend de l'image de X par l'application $\{a_\beta(x)\}$ $(|\beta| = m)$, sans dépendre des valeurs des dérivées des $a_\beta(x)$. Nous supposons

$$\| D^{n,\infty} a, S_t, \rho \| \ll C(t, \rho), \quad |D^{n,\infty} b, S_t, \rho| \ll B(t, \rho)$$

B [et C] étant une série formelle en ρ , ayant pour coefficients des fonctions bornées [et croissantes] de t. Nous supposons enfin :

$$(6.2) \qquad D_0^j b|S_0 = 0 \quad \text{pour} \quad j < n$$

ce qui impliquera

$$D_0^j u|S_0 = 0 \quad \text{pour} \quad j < m+n ;$$

$$(6.3) \qquad n > \frac{\ell}{2} + 1 .$$

On sait [4], [9] que le problème de Cauchy (6.1) possède une et une seule solution telle que $|D^m u, S_t|$ soit borné ; on sait que cette solution vérifie l'inégalité

(6.4) $$\left|D^{m+n-1}\, u, S_t\right| \leqslant A_0(t) \int_0^t B(t',0)\, dt' \quad ,$$

où

$$A_0(t) = c(\ell, m, \chi, C(t,0)) \quad ;$$

$c(\ell, m, \chi, C)$ est une fonction connue, dont toutes les dérivées en C sont $\geqslant 0$.

Précisons comme suit ces résultats :

Lemme 6.1.- On a

$$\left|D^{m+n-1,\infty} u, S_t, \rho\right| \ll A_0(t)\, \Phi(t,\rho) \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant |X| \quad ;$$

$A_0(t)$ vient d'être défini ; $\Phi(t,\rho)$ est la série formelle que définit le problème de Cauchy formel

(6.5) $$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial t} - A(t,\rho)\left(1 + \dfrac{\partial}{\partial \rho}\right)\right] \Phi(t,\rho) = B(t,\rho) \\ \\ \Phi(0,\rho) = 0 \, , \end{cases}$$

où $A(t,\rho)$ est la série formelle $\gg 0$, s'annulant avec ρ :

$$A(t,\rho) = A_0(t)[C(t,\rho) - C(t,0)] \, .$$

Notes.- La résolution du problème de Cauchy (6.5) est élémentaire : le coefficient $\Phi_s(t)$ de

$$\Phi(t,\rho) = \sum_s \frac{\rho^s}{s!}\, \Phi_s(t)$$

s'obtient successivement pour $s = 0, 1, \ldots$ en résolvant (par quadratures : voir lemme 8) le problème de Cauchy

(6.6) $$\left[\frac{\partial}{\partial t} - s\, a_0(t)\right] \Phi_s(t) = \psi_{s-1}(t) \quad , \qquad \Phi_s(0) = 0 \, ,$$

où $\psi_{s-1}(t) - B_s(t)$ est une combinaison linéaire de $\Phi_0, \ldots, \Phi_{s-1}(t)$;

les coefficients sont ceux de A ; ils sont $\geqslant 0$;

$$a_o(t) = \frac{\partial A}{\partial \rho}(t,0) .$$

Preuve.- On peut prouver l'existence de toutes les dérivées $D^\sigma u$, où $\sigma_o = 0$, en les construisant successivement pour $|\sigma| = m+n, m+n+1, \ldots$ par les problèmes de Cauchy

$$(6.7) \qquad aD^\sigma u = -[D^\sigma, a]\, u + D^\sigma b \quad , \quad D^{m-1} D^\sigma u|_{S_o} = 0 \quad ;$$

elles sont donc telles que $|D^{m+n-1} D^\sigma u, S_t|$ soit une fonction bornée de t. D'après (6.7) et (6.4), on a pour tout σ tel que $\sigma_o = 0$:

$$\left|D^{m+n-1} D^\sigma u, S_t\right| \leqslant A_o(t) \int_0^t \left|D^n[D^\sigma, a]u, S_{t'}\right| dt' + A_o(t) \int_0^t \left|D^n D^\sigma b, S_{t'}\right| dt' \;;$$

d'où, en appliquant $\sum_s \frac{\rho^s}{s!} \sup_\sigma$, où $|\sigma| = s$:

$$\left|D^{m+n-1,\infty} u, S_t, \rho\right| \ll$$

$$A_o(t) \int_0^t \left|D^n[D^\infty, a]\, u, S_{t'}, \rho\right| dt' + A_o(t) \int_0^t \left|D^{n,\infty} b, S_{t'}, \rho\right| dt' \quad ;$$

d'où, en appliquant la formule du commutateur (4.3) et en notant $\left|D^{n,\infty} u, S_t, \rho\right| = A_o(t)\, \varphi(t, \rho)$:

$$\varphi(t, \rho) \ll \int_0^t A(t', \rho)\left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho}\right)\varphi(t', \rho)\, dt' + \int_0^t B(t', \rho)\, dt' \;.$$

Explicitons cette inégalité, en posant

$$\varphi(t, \rho) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s!} \varphi_s(t) \;;$$

puisque $A(t,0) = 0$, il vient, en posant $a_o(t) = \frac{\partial A}{\partial \rho}(t,0)$:

$$\varphi_s(t) \leqslant \int_0^t s\, a_o(t')\varphi_s(t')dt' + \psi_{s-1}(t) \;,$$

où ψ_{s-1} ne dépend que de $\varphi_0,\dots,\varphi_{s-1}$ et des données A, B; d'où, par une intégration d'inégalité classique :

$$\varphi(t,\rho) \ll \Phi(t,\rho) ,$$

si Φ est défini par l'équation intégrale

$$\Phi(t,\rho) = \int_0^t A(t',\rho)(1+\frac{\partial}{\partial\rho})\Phi(t',\rho)dt' + \int_0^t B(t',\rho)\,dt' ,$$

c'est-à-dire par le problème de Cauchy (6.5). C.Q.F.D.

L'emploi du lemme 6.1 que nous allons faire sera facilité par le lemme suivant :

Lemme 6.2.- Soit Φ^* la solution du problème (6.5), quand on y remplace par B^* la donnée B. Supposons

$$0 \ll B(t,\rho) \ll A_0(t)B^*(t,\rho) ,\quad \text{où}\quad A_0(t)\ \text{est croissant.}$$

Alors

$$\Phi(t,\rho) \ll A_0(t)\Phi^*(t,\rho) .$$

Preuve.- Vu la note 6, il suffit de prouver que les solutions $\Phi(t)$ et $\Phi^*(t)$ des problèmes de Cauchy (6.6)

$$[\frac{\partial}{\partial t} - s\, c_0(t)]\Phi(t) = B(t), \quad \Phi(0) = 0$$

$$[\frac{\partial}{\partial t} - s\, c_0(t)]\Phi^*(t) = B^*(t), \quad \Phi^*(0) = 0$$

vérifient $\Phi(t) \leqslant A_0(t)\,\Phi^*(t)$, si $0 \leqslant B \leqslant A_0B^*$ (A_0 croissant). Or cela résulte immédiatement des solutions explicites (8.3) de ces problèmes.

7. PRODUIT D'OPÉRATEURS STRICTEMENT HYPERBOLIQUES.- Sur la bande X, nous nous donnons à nouveau un opérateur $a(x,D)$ hyperbolique et une fonction $b(x)$; notons

$$m = \text{ordre } (a) ;$$

nous nous posons le problème de Cauchy

$$(7.1) \qquad a(x,D)\, u(x) = b(x) \;, \quad D_o^j\, u|S_o = 0 \quad \text{pour} \quad j < m .$$

Nous supposons que

$$a(x,D) = a_1(x,D) \ldots a_p(x,D)$$

est le produit de p opérateurs $a_j(x,D)$ normaux et régulièrement hyperboliques pour les hyperplans S_t ; notons $m_j = \text{ordre } (a_1) + \ldots + \text{ordre } (a_j)$; donc $m_p = m$; notons $\chi(a)$ l'ensemble des caractères de régularité des a_j ; nous supposons :

$$(7.2)\begin{cases} \left\| D^{m_j+n-j,\infty} a_{j+1}, S_t, \rho \right\| \ll C(t,\rho) & \forall j ; \\ \left\| D^{n-p+k,\infty} a, S_t, \rho \right\| \ll C_k(t,\rho) \;, & (k : \text{entier donné tel que } 0 \leqslant k \leqslant p); \\ \left| D^{n,\infty} b, S_t, \rho \right| \ll B(t,\rho) \;; & \end{cases}$$

$C(t,\rho)$, $C_k(t,\rho)$ et $B(t,\rho)$ sont des séries formelles, dont chaque coefficient est une fonction bornée de t ; nous supposons

$$\frac{\partial^j C(t,\rho)}{\partial t^j} \gg 0 \quad \text{pour} \quad j = 0,\ldots, p .$$

Nous définissons, comme au n° 6 :

$$(7.3) \qquad A_o(t) = c(\ell, m, \chi, C(t,0)) .$$

Nous définissons la série formelle, <u>s'annulant avec</u> ρ :

$$A(t, \rho) = A_o(t)[C(t, \rho) - C(t,0)] ;$$

puis, c''_k ne dépendant que de ℓ,m,n,p,k :

$$A_k(t, \rho) = c''_k A_o(t)[1 + C_k(t, \rho)]^k .$$

Bien entendu :

$$A_o(t, \rho) = A_o(t) , \quad c''_o = 1 .$$

Nous supposons

(7.4) $$n > \frac{\ell}{2} + p , \quad D^j b|S_o = 0 \quad \text{pour} \quad j < n .$$

<u>Lemme</u> 7.- Le problème de Cauchy (7.1) possède une et une seule solution $u(x)$ tellé que $|D^m u, S_t|$ soit borné ; on a pour $0 \leq t \leq |X|$, $0 \leq k \leq p$:

$(7.5)_k$ $$|D^{m+n-p+k,\infty}u, S_t, \rho| \ll A_k(t, \rho)(1 + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho})^k \Phi(t, \rho) ;$$

$\Phi(t, \rho)$ est la série formelle que définit le problème de Cauchy formel

(7.6) $$\begin{cases} [\frac{\partial}{\partial t} - A(t, \rho)(1 + \frac{\partial}{\partial \rho})]^p \, \Phi(t, \rho) = B(t, \rho) \\ \\ \frac{\partial^j \Phi}{\partial t^j}(0, \rho) = 0 \quad \text{pour} \quad j = 0, \ldots, p-1 . \end{cases}$$

<u>Note</u>.- Ce problème (7.6) se résout en calculant successivement les coefficients $\Phi_s(t)$ $(s = 0,1,\ldots)$ de $\Phi(t, \rho)$; ce calcul se fait par quadratures.

<u>Preuve de</u> $(7.5)_o$.- Le problème (7.1) équivaut à la suite de problèmes de Cauchy :

$$a_j(x,D)\, u_j(x) = u_{j-1}(x), \quad D^{m_{j-1}} u_j|S_o = 0 ,$$

où $j = 1,\ldots, p$, $u_o = b$, $u_p = u$.

D'où, par application du n° 6, l'existence de u , son unicité et les majorations :

$$\left|D^{m_1+\ldots+m_j+n-j,\infty} u_j, S_t, \rho\right| \ll c_1(t)\ \Phi_j(t,\rho),$$

les $\Phi_j(t,\rho)$ étant les séries formelles définies par les problèmes de Cauchy formels :

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial t} - A(t,\rho)\left(1+\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\right]\Phi_j(t,\rho) = \Phi_{j-1}(t,\rho) \\ \Phi_j(0,\rho) = 0 \end{cases}$$

où $\Phi_0 = B$. D'où (7.4) en prenant $\Phi = \Phi_p$, ce qui revient à définir Φ par (7.6).

<u>Preuve de</u> $(7.5)_k$ <u>pour</u> $1 \leqslant k \leqslant p$.- La formule de la dérivée (4.2) donne

$$\left|D^{m+n-p+k,\infty} u, S_t, \rho\right| \ll$$

$$c''\left|D^{0,\infty} D_0^{m+n-p+k} u, S_t, \rho\right| + c''\left(1+\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\left|D^{m+n-p+k-1,\infty} u, S_t, \rho\right| ;$$

or, puisque $a(x,D)u = b$, on a, vu la formule de la dérivée $\left|D^{0,\infty}D_0^j\ldots\right| \ll \left|D^{j,\infty}\ldots\right|$

$$\left|D^{0,\infty} D_0^{m+n-p+k} u, S_t, \rho\right| \ll \left|D^{n-p+k,\infty}\left[a(x,D) - D_0^m\right] u, S_t, \rho\right| + \left|D^{n-p+k,\infty} b, S_t, \rho\right|$$

où $a(x,D) - D_0^m$ a un premier coefficient nul, car a est normal ; donc, vu la formule du produit (4.1), qui s'applique car $n-p+k > \ell/2$, et la formule de la dérivée (4.2) :

$$\left|D^{n-p+k,\infty}\left[a(x,D) - D_0^m\right] u, S_t, \rho\right| \ll$$

$$\left\|D^{n-p+k,\infty} u, S_t, \rho\right\| \left(1+\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\left|D^{m+n-p+k-1,\infty} u, S_t, \rho\right| .$$

Les trois inégalités précédentes donnent

$$|D^{m+n-p+k,\infty} u,S_t,\rho| \ll$$

$$c''[1+\|D^{n-p+k,\infty} a,S_t,\rho\|](1+\frac{\partial}{\partial\rho})|D^{m+n-p+k-1,\infty} u,S_t,\rho|$$

$$+ c''|D^{n-p+k,\infty} b,S_t,\rho| \quad .$$

D'où, par récurrence sur $k > 0$, la formule, évidente pour $k = 0$:

$$|D^{m+n-p+k,\infty} u,S_t,\rho| \ll [1+\|D^{n-p+k,\infty} a,S_t,\rho\|]^k(1+\frac{\partial}{\partial\rho})^k|D^{m+n-p,\infty} u,S_t,\rho|$$

$$+ c''\sum_{j=1}^{k}[1+\|D^{n-p+k,\infty} a,S_t,\rho\|]^{k-j}(1+\frac{\partial}{\partial\rho})^{k-j}|D^{n-p+j,\infty} b,S_t,\rho| \quad ;$$

la valeur de c'' a été modifiée ; la formule de la dérivée (4.3) a été appliquée à $\|\ldots\|$.

Pour tirer $(7.5)_k$ de l'inégalité précédente, il suffit évidemment, vu $(7.5)_0$, de prouver ceci :

$$(7.7) \quad |D^{n-p+j,\infty} b,S_t,\rho| \ll (\frac{\partial}{\partial t})^j\,\Phi(t,\rho) \qquad \text{pour} \quad j = 1,\ldots,p\,.$$

Preuve de (7.7).- Puisque $D^{n-1}\, b|S_o = 0$, nous avons

$$D^{\beta+\sigma}\, b(x) = \int_0^{x_o}\frac{(x_o - x'_o)^{j-1}}{(j-1)!}\, D_o^j\, D^{\beta+\sigma}\, b(x')\, dx'_o$$

pour $x = (x_o, x_1,\ldots, x_\ell)$, $x' = (x'_o, x_1,\ldots, x_\ell)$,

$\sigma_o = 0$, $0 < j$, $j + \beta_o \leqslant n$;

d'où

$$\left|D^{\beta+\sigma} b, S_t\right|_2 \leqslant \int_0^t \frac{(t-t')^{j-1}}{(j-1)!} \left| D_o^j D^{\beta+\sigma} b, S_{t'}\right|_2 dt'$$

et, en appliquant $\sum_s \frac{\rho^s}{s!} \sup_{\beta,\sigma} \ldots$, où $|\beta| \leqslant n-j$ et $\sigma_o = 0$:

$$\left|D^{n-j,\infty} b, S_t, \rho\right| \ll \int_0^t \frac{(t-t')^{j-1}}{(j-1)!} \left|D^{n,\infty} b, S_{t'}, \rho\right| dt'$$

(7.8)
$$\ll \int_0^t \frac{(t-t')^{j-1}}{(j-1)!} B(t', \rho) dt' , \quad \text{pour} \quad 0 < j \leqslant n ,$$

car

(7.9)
$$\left|D^{n,\infty} b, S_t, \rho\right| \ll B(t, \rho) .$$

Or le lemme 9.2 va déduire de l'hypothèse

$$\frac{\partial^j A(t, \rho)}{\partial t^j} \gg 0 \quad \text{pour} \quad j = 0, \ldots, p-1$$

que

(7.10)
$$B(t, \rho) \ll \frac{\partial^p \Phi(t, \rho)}{\partial t^p} , \quad \int_0^t \frac{(t-t')^{j-1}}{(j-1)!} B(t', \rho) dt' \ll \frac{\partial^{p-j} \Phi(t, \rho)}{\partial t^{p-j}}$$

pour $0 < j \leqslant p$.

Les majorations (7.8) et (7.9) de b donnent donc :

$$\left|D^{n-j,\infty} b, S_t, \rho\right| \ll \frac{\partial^{p-j} \Phi(t, \rho)}{\partial t^{p-j}} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant j \leqslant p .$$

Voici prouvé (7.7), donc le lemme 7.

§ 3. Problèmes de Cauchy formels.

L'emploi du lemme 7 va introduire des problèmes de Cauchy formels. Etudions leurs propriétés, dont l'une (7.10) vient d'être appliquée.

8. L'INÉGALITÉ CLASSIQUE POUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE.-

Lemme 8.- Soit $\Phi(t)$ la solution du problème de Cauchy

(8.1) $$\left[\frac{d}{dt} - a(t)\right]\Phi(t) = b(t)\ , \qquad \Phi(0) = 0\ ,$$

où a et b sont des fonctions sommables

$$a(t) \geqslant 0 \quad ; \qquad t \geqslant 0\ .$$

Alors l'application

$$(a,b) \to \Phi$$

est croissante en b et, si $b \geqslant 0$, en a, pour les relations d'ordre suivantes :

(8.2) $$\begin{cases} a < a^* & \text{signifie : } a(t) \leqslant a^*(t)\ ; \\ b < b^* & \text{signifie : } b(t) \leqslant b^*(t)\ ; \\ \Phi < \Phi^* & \text{signifie : } \Phi(t) \leqslant \Phi^*(t) \text{ et } \dfrac{d\Phi}{dt} \leqslant \dfrac{d\Phi^*}{dt}\ , \quad \forall t \geqslant 0\ . \end{cases}$$

Preuve.- C'est évident, car

(8.3) $$\Phi(t) = \int_0^t b(t')\exp\left[\int_{t'}^t a(t'')dt''\right]dt' \quad \text{et} \quad \frac{d\Phi}{dt} = a\Phi + b.$$

9. EXTENSION DE CETTE INÉGALITÉ A UN PROBLÈME DE CAUCHY FORMEL.-

Donnons-nous une série formelle en ρ, fonction de $t \geqslant 0$, $A(t,\rho)$ telle que

$$A(t,0) = 0\ ;$$

notons[1] L l'opérateur

$$L(t, \rho, \frac{\partial}{\partial \rho}) = A(t, \rho)(1 + \frac{\partial}{\partial \rho}) ;$$

soit un entier $p > 0$. Etant donnée $B(t, \rho)$, série formelle en ρ, fonction de $t \geq 0$, nous en cherchons une autre, $\Phi(t, \rho)$, qui soit solution du problème de Cauchy formel

$$(9.1) \qquad [\frac{\partial}{\partial t} - L]^p \, \Phi(t, \rho) = B(t, \rho) , \quad \frac{\partial^j \Phi}{\partial t^j}(0, \rho) = 0 \quad \text{pour} \quad j = 0, \ldots, p-1.$$

<u>Lemme</u> 9.1.- Ce problème (9.1) possède une solution unique ; elle s'obtient par quadratures.

<u>Lemme</u> 9.2.- Supposons

$$(9.2) \qquad \frac{\partial^j A(t, \rho)}{\partial t^j} \gg 0 \qquad \text{pour} \quad j = 0, \ldots, p-1 .$$

Alors l'application $(A,B) \to \Phi$ est croissante en B et, si $B \gg 0$, en A, pour les relations d'ordre suivantes :

$A(t, \rho) \prec A^*(t, \rho)$ signifie : $(\frac{\partial}{\partial t})^j A \ll (\frac{\partial}{\partial t})^j A^*$ pour $j = 0, \ldots, p-1$;

$B(t, \rho) \prec B^*(t, \rho)$ signifie : $B \ll B^*$;

$\Phi(t, \rho) \prec \Phi^*(t, \rho)$ signifie : $(\frac{\partial}{\partial t})^j \Phi \ll (\frac{\partial}{\partial t})^j \Phi^*$ pour $j = 0, \ldots, p$.

---

(1) Ce qui suit est plus généralement vrai pour

$$L(t, \rho, \frac{\partial}{\partial \rho}) = A'(t, \rho) + A(t, \rho) \frac{\partial}{\partial \rho}$$

$A'(t, \rho)$, $A(t, \rho)$ étant des séries formelles en ρ, fonctions de t, vérifiant : $A(t,0) = 0$; on complète (9.2) par

$$\frac{\partial^j A'(t, \rho)}{\partial t^j} \gg 0 .$$

D'où, en particulier, puisque $0 \prec A$, les inégalités (7.10) :

Si $B(t, \rho) \gg 0$, alors

$$(9.3)\begin{cases} 0 \ll B(t, \rho) \ll \dfrac{\partial^p \Phi}{\partial t^p}(t, \rho) , \\ 0 \ll \displaystyle\int_0^t \frac{(t-t')^{j-1}}{(j-1)!} B(t', \rho) dt' \ll \frac{\partial^{p-j} \Phi(t, \rho)}{\partial t^{p-j}} . \end{cases}$$

<u>Preuve du lemme</u> 9.1.- Notons

$$\Phi_j = [\frac{\partial}{\partial t} - L]^{p-j} \Phi \quad ;$$

le problème (9.1) se décompose en les p problèmes d'ordre 1 :

$$(9.4)_j \qquad [\frac{\partial}{\partial t} - L] \Phi_j(t, \rho) = \Phi_{j-1}(t, \rho) , \qquad \Phi_j(0, \rho) = 0$$

où $j = 1, \dots, p$, $\Phi_o = B$ et $\Phi_p = \Phi$.

Supposons $\Phi_{j-1}(t, \rho)$ calculé ; il s'agit de résoudre (9.4) ; les coefficients $\varphi_s(t)$ de

$$\Phi_j(t, \rho) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s!} \varphi_s(t)$$

se calculent successivement pour $s = 0,1,2,\dots$ en résolvant des problèmes de Cauchy du type (8.1) :

$$(9.5) \qquad [\frac{\partial}{\partial t} - s\, a_o(t)] \ \varphi_s(t) = \text{donnée}, \quad \varphi_s(0) = 0$$

où

$$a_o(t) = \frac{\partial A}{\partial \rho}(t, 0) .$$

Preuve du lemme 9.2 pour $p=1$.- Les coefficients $\varphi_s(t)$ de $\Phi(t, \rho)$ se calculent par (9.5), où le second membre donné est une combinaison linéaire, à coefficients positifs, des coefficients de B et des coefficients $\varphi_0, \ldots, \varphi_{s-1}$ de Φ . Il suffit donc d'appliquer le lemme 8.

Preuve du lemme 9.2 pour $p > 1$.- Puisque le lemme vaut pour $p = 1$, $(9.4)_1$ prouve que Φ_1 et $\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}$ sont croissants(1) et, si $B \gg 0$, qu'ils sont $\gg 0$. Puisque le lemme vaut pour $p = 1$, $(9.4)_2$ prouve donc que Φ_2 et $\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}$ sont croissants(1) et, si $B \gg 0$, qu'ils sont $\gg 0$, d'où, en appliquant $\frac{\partial}{\partial t}$ à $(9.4)_2$ et en employant l'hypothèse $\frac{\partial A}{\partial t} \gg 0$:

$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2}$ est croissant(1) et, si $B \gg 0$, est $\gg 0$.

Le raisonnement se poursuit de façon évidente.

Voici un lemme analogue au précédent :

Lemme 9.3.- Soit $\Phi(t, \rho)$ la série formelle que définit le problème de Cauchy (9.1). Supposons

$$\frac{\partial^j A}{\partial t^j}(0, \rho) \gg 0 \qquad \text{pour} \qquad j = 0, \ldots, p+k-1$$

$$\frac{\partial^j B}{\partial t^j}(0, \rho) \gg 0 \qquad \text{pour} \qquad j = 0, \ldots, k$$

Alors

$$\frac{\partial^j \Phi}{\partial t^j}(0, \rho) \gg 0 \qquad \text{pour} \qquad j = 0, \ldots, p+k .$$

---

(1) La croissance de $(\frac{\partial}{\partial t})^i \Phi_j$ signifie la croissance de l'application

$$(A,B) \to (\frac{\partial}{\partial t})^i \Phi_j$$

pour la relation d'ordre suivante :

$$(\frac{\partial}{\partial t})^i \Phi_j \prec (\frac{\partial}{\partial t})^i \Psi_j \quad \text{signifie} \quad (\frac{\partial}{\partial t})^i \Phi_j(t, \rho) \ll (\frac{\partial}{\partial t})^i \Psi_j(t, \rho).$$

Preuve pour $p = 1$.- On applique $(\frac{\partial}{\partial t})^j$ $(j = 0,\dots, k)$ à l'équation $(\frac{\partial \Phi}{\partial t}) = L\,\Phi + B$, puis l'on fait $t = 0$.

Preuve pour $p > 1$.- Puisque le lemme vaut pour $p = 1$,

$(9.4)_1$ donne $\dfrac{\partial^j \Phi_1}{\partial t^j}(0, \rho) \gg 0$ pour $j = 0,\dots, k+1$;

$(9.4)_2$ donne $\dfrac{\partial^j \Phi_2}{\partial t^j}(0, \rho) \gg 0$ pour $j = 0,\dots, k+2$;

le raisonnement se poursuit de façon évidente.

10. ÉNONCÉ D'UN PROBLÈME DE CAUCHY FORMEL NON-LINÉAIRE.-

Notations.- Etant donnée $\Phi(t, \rho)$, série formelle en ρ, fonction de $t \geq 0$, nous notons $D^q\Phi(t, \rho)$ l'ensemble de ses dérivées $\dfrac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial \rho^j}\Phi(t, \rho)$ d'ordre $i+j \leq q$; leur nombre est $\dfrac{(q+1)(q+2)}{2}$.

Notons : τ un vecteur variable ayant pour composantes $\dfrac{(q+1)(q+2)}{2}$ variables numériques ≥ 0 ; Θ un vecteur ayant pour composantes $\dfrac{(q+1)(q+2)}{2}$ variables formelles commutant entre elles et avec ρ ; $F_q[\tau, \rho, \Theta]$ une série formelle en (ρ, Θ), à coefficients fonctions de τ ; $F_q \gg 0$ signifie que ces coefficients sont ≥ 0. Notons

$$F_q(D^q\,\Theta) = F_q[D^q\,\Phi(t,0), \rho, D^q\,\Phi(t, \rho) - D^q\,\Phi(t,0)] ;$$

c'est une série formelle en ρ , s'annulant avec ρ si $F_q[\tau,0,0] = 0$.

Etant donné deux entiers $p \geq q$ et deux séries formelles, F_o et F_q, nous considérons le problème de Cauchy formel suivant, (il servira à majorer le problème qu'énonce le n°1) : trouver pour $0 \leq t \leq T$ (T petit) une série formelle $\Phi(t, \rho)$ vérifiant

$$(10.1)\quad [\frac{\partial}{\partial t} - F_o(\Phi)(1 + \frac{\partial}{\partial \rho})]^p\,\Phi = F_q(D^q\,\Phi), \quad \frac{\partial^j \Phi}{\partial t^j}(0, \rho) = 0$$

pour $j = 0,\dots, p-1$

et telle que

$$\frac{\partial^j \Phi(t,\rho)}{\partial t^j} \gg 0 \quad \text{pour } |j| = 0,\dots, p\ ; \tag{10.2}$$

nous supposons ceci :

$$\begin{cases} F_q(\tau,\rho,\theta] \gg 0 \\ F_o[\tau,0,0] = 0\ ;\ \dfrac{\partial^j}{\partial \tau^j} F_o[\tau,\rho,\theta] \gg 0 \quad \text{pour } j = 0,\dots, p\ ; \end{cases} \tag{10.3}$$

si $p = q$, alors $\dfrac{\partial^p \Phi}{\partial t^p}$ ne figure pas dans $F_p(D^p \Phi)$.

11. LE THÉORÈME DE CAUCHY-KOWALESKI permet de résoudre le problème (10.1) sous les hypothèses suivantes: $F_o[\tau,\rho,\theta]$ et $F_p[\tau,\rho,\theta]$ sont des <u>fonctions holomorphes au point</u> $(0,0,0)$; $p = q$.

En effet (10.1) est du type Cauchy-Kowalewski à un détail près : dans l'équation figure non seulement

$$\frac{\partial^{i+j}\Phi}{\partial t^i\ \partial\rho^j}(t,\rho)\ ,$$

mais aussi

$$\frac{\partial^{i+j}\Phi}{\partial t^i\ \partial\rho^j}(t,0)\ ;$$

mais ce détail n'altère ni l'énoncé ni la preuve du théorème de Cauchy-Kowalewski

Le problème (10.1) possède donc une solution $\Phi(t,\rho)$ qui est une série de Taylor en ρ ; ses coefficients sont des fonctions de t holomorphes pour $0 \leqslant |t| \leqslant T$; T est un nombre > 0, dépendant des données.

Prouvons que Φ vérifie (10.2) si <u>tous les coefficients de Taylor des fonctions holomorphes</u> $F_o(\tau,\rho,\theta)$ <u>et</u> $F_p(\tau,\rho,\theta)$ <u>sont</u> $\geqslant 0$. Notons

$$A(t,\rho) = F_o(\Phi)\ ,\quad B(t,\rho) = F_p(D^p\Phi)\ ;$$

vu $(10.3)_2$, nous avons :

$$A(t,0) = 0 .$$

Supposons prouvé que :

$$(11.1)_{k-1} \qquad \frac{\partial^j \Phi}{\partial t^j}(0,\rho) \gg 0 \quad \text{pour} \quad j = 0,\dots, p+k-1 \quad (k \geqslant 0),$$

ce qui a lieu, d'après (10.1), pour $k = 0$. Vu (10.3), nous avons alors :

$$\frac{\partial^j A}{\partial t^j}(0,\rho) \gg 0 \quad \text{pour} \quad j = 0,\dots, p+k-1 ,$$

$$\frac{\partial^j B}{\partial t^j}(0,\rho) \gg 0 \quad \text{pour} \quad j = 0,\dots, k ;$$

d'où $(11.1)_k$, vu le lemme 9.3.

Donc $(11.1)_k$ a lieu pour tout k ; les coefficients de $\Phi(t,\rho)$, développée en série de puissances de ρ , sont donc des fonctions de t, holomorphes à l'origine, dont tous les coefficients de Taylor sont $\geqslant 0$; ces fonctions et toutes leurs dérivées sont donc $\geqslant 0$ pour $0 \leqslant t \leqslant T$; d'où, en particulier (10.2).

En résumé :

<u>Lemme</u> 11.- Adjoignons aux hypothèses (10.3) les suivantes :

$p = q$;

$F_o[\tau, \rho, \theta]$ et $F_p[\tau, \rho, \theta]$ sont des fonctions holomorphes au point $(0,0,0)$; leurs coefficients de Taylor en ce point sont tous $\geqslant 0$.

Alors le problème de Cauchy formel (10.1) possède pour

$$0 \leqslant t \leqslant T \qquad (T \text{ petit}, \quad T > 0)$$

au moins une solution vérifiant (10.2).

12. OPÉRATEURS SUR LES SÉRIES FORMELLES.- Etant donné un nombre $\alpha \geqslant 1$, nommons λ l'opérateur qui transforme comme suit les séries formelles :

$$\text{si} \quad \Phi(t,\rho) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s!}\Phi_s(t) \;, \quad \text{alors} \quad \lambda\Phi(t,\rho) = \sum_s \frac{\rho^s}{(s!)^{\alpha}}\Phi_s(t) \;;$$

$$\text{si} \quad F(\tau,\rho,\theta) = \sum_{s,\gamma} \frac{\rho^s}{s!}\frac{\Theta}{\gamma!} F_{s\gamma}(\tau) \;,$$

$$\text{où} \quad \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots), \quad \Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \ldots), \quad \Theta^{\gamma} = \Theta_1^{\gamma_1}\Theta_2^{\gamma_2}\ldots, \; \gamma! = \gamma_1!\gamma_2!\ldots$$

alors

$$\lambda F(\tau,\rho,\theta) = \sum_{s,\gamma} \frac{1}{[(s+|\gamma|)!]^{\alpha-1}} \frac{\rho^s}{s!}\frac{\Theta^{\gamma}}{\gamma!} F_{s\gamma}(\tau) \;, \text{ où } \; |\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots \,.$$

L'opérateur λ a les propriétés suivantes, faciles à vérifier (voir [10], n°19 et [11], n°6 et 9) :

Formule du produit.-

$$(12.1) \qquad \lambda(\Phi \,.\, \Psi) \ll (\lambda\,\Phi).(\lambda\,\Psi) \,.$$

Formules de la dérivée.-

$$(12.2)\begin{cases} \lambda(\Phi \,.\, \dfrac{\partial\Psi}{\partial\rho}) \ll (\lambda\,\Phi) \,.\, \dfrac{\partial}{\partial\rho}(\lambda\,\Psi), \quad \text{si } \; \Phi(t,0) = 0. \\[2ex] \lambda(\dfrac{\partial}{\partial\rho})^j\,\Phi \ll (\dfrac{\partial}{\partial\rho})^j\,(1 + \rho\dfrac{\partial}{\partial\rho})^r\lambda\,\Phi, \quad \text{si } \; j \leqslant q \;, \quad \alpha \leqslant \dfrac{q+r}{q} \,. \end{cases}$$

Formule de composition.- (que [6] note : $\lambda(F \circ \Phi) \ll (\lambda\,F) \circ (\lambda\,\Phi)$) :

$$(12.3) \qquad \lambda F(\Phi) \ll f(\lambda\,\Phi) \;, \qquad \text{si } \; \lambda\,F = f.$$

Appliquons ces formules au problème de Cauchy linéaire, formel (9.1).

Lemme 12.- Considérons le problème (9.1) et le problème du même type

$$[\frac{\partial}{\partial t} - a(t, \rho)(1 + \frac{\partial}{\partial \rho})]^p \ \varphi(t, \rho) = b(t, \rho), \ \frac{\partial^j \varphi}{\partial t^j}(0, \rho) = 0$$

pour $j = 0, \ldots, p-1$,

où

$$a(t,0) = 0 \ .$$

Supposons :

$$0 \ll (\frac{\partial}{\partial t})^j \ \lambda A(t, \rho) \ll (\frac{\partial}{\partial t})^j \ a(t, \rho) \quad \text{pour} \quad j = 0, \ldots, p-1 \ ;$$

$$0 \ll \lambda B(t, \rho) \ll b(t, \rho) \ .$$

Alors

$$(\frac{\partial}{\partial t})^j \lambda \ \Phi(t, \rho) \ll (\frac{\partial}{\partial t})^j \ \varphi(t, \rho) \quad \text{pour} \quad j = 0, \ldots, p \ .$$

<u>Preuve pour</u> $p = 1$.- Les formules du produit et de la dérivée donnent

$$(12.4) \quad \lambda[A(t, \rho)(1 + \frac{\partial}{\partial \rho}) \Phi(t, \rho)] \ll a(t, \rho)(1 + \frac{\partial}{\partial \rho}) \lambda \ \Phi(t, \rho) \ .$$

Donc

$$[\frac{\partial}{\partial t} - a(t, \rho)(1 + \frac{\partial}{\partial \rho})] \lambda \Phi(t, \rho) \ll \lambda B(t, \rho) \ll b(t, \rho) \ ;$$

donc, vu le lemme 9.2 (croissance) :

$$\lambda \Phi(t, \rho) \ll \ \varphi(t, \rho), \ \ \frac{\partial}{\partial t} \lambda \Phi \ll \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad .$$

<u>Preuve pour</u> $p > 1$.- Notons

$$\varphi_j = [\frac{\partial}{\partial t} - a(t, \rho)(1 + \frac{\partial}{\partial \rho})]^{p-j} \varphi, \quad \varphi_0 = b \ , \ \ \varphi_p = \varphi \ ;$$

nous avons les formules analogues à $(9.4)_j$:

$$(12.5)_j \ [\frac{\partial}{\partial t} - a(t, \rho)(1 + \frac{\partial}{\partial \rho})] \ \varphi_j(t, \rho) = \varphi_{j-1}(t, \rho) \ , \ \ \varphi_j(0, \rho) = 0 \ .$$

Puisque le lemme vaut pour $p = 1$, $(9.4)_1$ et $(12.5)_1$ donnent

$$\lambda \Phi_1 \ll \varphi_1 \ , \quad \frac{\partial}{\partial t} \lambda \Phi_1 \ll \frac{\partial}{\partial t} \ \varphi_1 \ ;$$

$(9.4)_2$ et $(12.5)_2$ donnent alors :

$$\lambda \Phi_2 \ll \varphi_2 \,, \quad \frac{\partial}{\partial t}\lambda \Phi_2 \ll \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 \;;$$

d'où, en appliquant $\frac{\partial}{\partial t}\lambda$, puis (12.4), à $(9.4)_2$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\lambda \Phi_2 \ll \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi_2 \,.$$

Le raisonnement se poursuit de façon évidente et donne

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \lambda \Phi_i \ll \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \varphi_i \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant j \leqslant i \leqslant p \;;$$

en particulier, puisque $\Phi_p = \Phi$ et $\varphi_p = \varphi$, on a les inégalités énoncées.

13. CLASSES DE GEVREY FORMELLES.- Définition.- Etant donné un entier $p \geqslant 0$ et un nombre $\alpha \geqslant 1$, nous nommons classe de Gevrey formelle $\Gamma^{p,(\alpha)}$ l'ensemble des séries formelles

$$\Phi(t, \rho) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s!}\Phi_s(t) \,, \qquad F[\tau, \rho, \theta] = \sum_{s,\gamma} \frac{\rho^s}{s!}\frac{\theta^\gamma}{\gamma!} F_{s\gamma}(\tau)$$

vérifiant la condition suivante pour t ou τ petits :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \lambda \Phi(t, \rho) = \sum_s \frac{\rho^s}{(s!)^\alpha}\frac{\partial^j \Phi_s}{\partial t^j} \,,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^j \lambda F[\tau, \rho, \theta] = \sum_{s,\gamma} \frac{1}{[(s+|\gamma|)!]^{\alpha-1}} \frac{\rho^s}{s!}\frac{\theta^\gamma}{\gamma!} F_{s\gamma}(\tau)$$

$$(|j| \leqslant p)$$

sont des fonctions de ρ ou de (ρ, θ) holomorphes à l'origine, uniformément par rapport à t ou τ ; c'est-à-dire:il existe un voisinage de l'origine, indépendant de t ou τ , où elles ont une borne, indépendante de t ou τ .

Cette condition peut s'énoncer :

$$\sup_{s,t} \frac{1}{[1+s]^{\alpha}} \left| \frac{d^j \Phi_s}{dt^j} \right|^{\frac{1}{1+s}} < \infty$$

ou

$$\sup_{s,\gamma,\tau} \frac{1}{[1+s+|\gamma|]^{\alpha}} \left| \frac{\partial^j F_{s\gamma}(\tau)}{\partial \tau^j} \right|^{\frac{1}{1+s+|\gamma|}} < \infty$$

<u>Propriétés</u>.- Les propriétés de λ montrent que l'addition, le produit, la dérivation en ρ et la composition transforment des éléments de $\Gamma^{p,(\alpha)}$ en éléments de $\Gamma^{p,(\alpha)}$.

<u>Note</u>.- Si $\Phi(t, \rho)$ et $\Psi(t, \rho)$ sont des séries formelles en ρ, alors la série formelle composée $\Psi(t,\Phi(t, \rho))$ <u>est définie quand</u> $\Phi(t,0) = 0$ et seulement dans ce cas (à moins que $\Phi(t, \rho)$ ne soit fonction holomorphe de ρ

14. RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE CAUCHY (10.1).- L'opérateur λ permet de déduire du lemme 11 la propriété suivante, qu'emploiera le § 4.

THÉORÈME D'EXISTENCE, POUR LE PROBLÈME DE CAUCHY FORMEL, NON LINÉAIRE.- <u>Complétons les hypothèses (10.3) par les suivantes</u> :

(14.1) $\quad F_0 \in \Gamma^{p,(\alpha)}, \quad F_q \in \Gamma^{0,(\alpha)}, \quad$ où $1 \leqslant \alpha \leqslant \frac{p}{q}$.

<u>Alors le problème de Cauchy formel (10.1) possède, pour</u>

$$0 \leqslant t \leqslant T \qquad (T \text{ petit}, \ T > 0)$$

<u>au moins une solution</u> $\Phi(t, \rho)$ <u>vérifiant (10.2) et</u>

(14.2) $$\Phi \in \Gamma^{p,(\alpha)} .$$

Cette solution Φ va être construite par approximations successives.

Définition d'approximations successives $\Phi_K(t, \rho)$ $(K = 0,1,\ldots)$.-

$$\Phi_o(t, \rho) = 0 \;;$$

quand la série formelle en ρ, fonction de $t \geq 0$, $\Phi_K(t, \rho)$ a été définie, $\Phi_{K+1}(t, \rho)$ l'est par le problème de Cauchy suivant :

$$(14.3)_K \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} - F_o(\Phi_K)\left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho}\right)\right]^p \Phi_{K+1} = F_q(D^q \Phi_K) \;, \quad \frac{\partial^j \Phi_{K+1}}{\partial t^j}(0, \rho) = 0$$

$$(j = 0,\ldots, p-1).$$

Rappelons que ce problème $(14.3)_K$ s'intègre par quadratures (lemme 9.1).

Positivité des approximations successives.- Prouvons l'inégalité, évidente pour $K = 0$:

$$(14.4)_K \qquad 0 \ll \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \Phi_K(t, \rho) \qquad \text{pour} \quad j = 0,\ldots, p.$$

Puisque F_o et $F_q \gg 0$, $(14.4)_K$, $(14.3)_K$ et (9.3) impliquent $(14.4)_{K+1}$.

Croissance des approximations successives.- Prouvons l'inégalité, évidente d'après la précédente quand $K = 0$:

$$(14.5)_K \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \Phi_K(t, \rho) \ll \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \Phi_{K+1}(t, \rho) \qquad \text{pour} \quad j = 0,\ldots,p \,.$$

En appliquant le lemme de croissance 9.2 aux problèmes de Cauchy $(14.3)_K$ et $(14.3)_{K+1}$, on voit que $(14.5)_K$ implique $(14.5)_{K+1}$.

Définition d'une série formelle $\varphi(t, \rho)$, qui servira à majorer les approximations successives.- Les hypothèses (14.1) signifient ceci : il existe des fonctions $f_o(\tau, \rho, \theta)$ et $f_q(\tau, \rho, \theta)$, holomorphes au point $(0,0,0)$ et à coefficients de Taylor ≥ 0, telles que :

$$(\frac{\partial}{\partial \tau})^j \lambda F_o \ll (\frac{\partial}{\partial \tau})^j f_o \qquad \text{pour} \quad j = 0, \dots, p, \qquad |\tau| \leqslant T_o$$

$$\lambda F_q \ll f_q \qquad \text{pour} \quad |\tau| \leqslant T_q ,$$

quand τ est à composantes $\geqslant 0$. Comme (10.3) le permet, nous choisissons

$$f_o(\tau, 0, 0) = 0 \quad .$$

Considérons le problème de Cauchy

$$(14.6) \qquad \begin{cases} [\frac{\partial}{\partial t} - f_o(\varphi)(1 + \frac{\partial}{\partial \rho})]^p \varphi = f_q(D^q(1 + \rho \frac{\partial}{\partial \rho})^{p-q} \varphi) \\ \frac{\partial^j \varphi}{\partial t^j}(0, \rho) = 0 \qquad \text{pour} \quad j = 0, \dots, p-1 \; . \end{cases}$$

D'après le lemme 11, ce problème (14.6) possède une solution $\varphi(t, \rho)$, définie pour

$$0 \leqslant t \leqslant T \quad \text{pour} \quad (T \text{ petit} , \quad T > 0)$$

telle que

$$(\frac{\partial}{\partial t})^j \varphi (t, \rho) \gg 0 \qquad \text{pour} \quad j = 0, \dots, p-1.$$

Nous choisissons T assez petit pour que

$$\varphi(t,0) \leqslant T_o \quad ; \quad |D^q(1 + \rho \frac{\partial}{\partial \rho})^{p-q} \varphi| \leqslant T_q \; .$$

<u>Majoration des approximations successives</u>.- Prouvons l'inégalité, évidente pour $K = 0$:

$$(14.7)_K \qquad (\frac{\partial}{\partial t})^j \lambda \Phi_K \ll (\frac{\partial}{\partial t})^j \varphi \qquad \text{pour} \quad j = 0, \dots, p, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \; .$$

Vu les propriétés de λ (n°12), $(14.7)_K$ implique

$$(\frac{\partial}{\partial t})^j \lambda F_o(\Phi_K) \ll (\frac{\partial}{\partial t})^j f_o(\lambda \Phi_K) \ll (\frac{\partial}{\partial t})^j f_o(\varphi)$$

$$\lambda F_q(D^q \Phi_K) \ll f_q(\lambda D^q \Phi_K) \ll f_q(D^q(1 + \rho \frac{\partial}{\partial \rho})^{p-q} \lambda \Phi_K) \ll f_q(D^q(1 + \rho \frac{\partial}{\partial \rho})^{p-q} \varphi)$$

car $\alpha \leqslant \frac{p}{q}$. D'où $(14.5)_{K+1}$, en appliquant le lemme 12 aux problèmes de Cauchy $(14.3)_{K+1}$ et (14.6).

<u>Fin de la preuve du théorème</u>.- Pour $0 \leqslant t \leqslant T$, la suite

$$\frac{\partial^j \Phi_o}{\partial t^j}, \dots, \frac{\partial^j \Phi_K}{\partial t^j}, \dots \qquad (0 \leqslant j \leqslant p)$$

est croissante d'après (14.5) et bornée d'après (14.7) ; elle possède donc une limite $\Phi(t, \rho)$, qui vérifie (10.1) d'après (14.3), (10.2) d'après (14.4) et appartient à $\Gamma^{p,(\alpha)}$ d'après (14.7).

C.Q.F.D.

Nous aurons besoin du résultat suivant, que fournit la démonstration précédente :

THÉORÈME DE CONVERGENCE.- <u>Donnons-nous deux séries formelles en</u> ρ, <u>fonctions de</u> t $(0 \leqslant t \leqslant T)$: $A(t, \rho)$ <u>et</u> $B(t, \rho)$ <u>telles que</u>

$$A(t,0) = 0, \quad (\frac{\partial}{\partial t})^j A(t, \rho) \gg 0 \quad (j = 0,\dots, p), \quad A \in \Gamma^{p,(\alpha)}$$
$$B(t, \rho) \gg 0, \quad B \in \Gamma^{0,(\alpha)}.$$

<u>Donnons-nous un opérateur différentiel, d'ordre</u> $q \leqslant p$, <u>ne contenant pas</u> $(\frac{\partial}{\partial t})^p$ <u>si</u> $q = p$:

$$L_q(\rho, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \rho}),$$

<u>ayant pour coefficients des séries formelles en</u> ρ, <u>fonction de</u> t, <u>appartenant à</u> $\Gamma^{0,(\alpha)}$ <u>et</u> $\gg 0$.

Supposons

$$1 \leqslant \alpha \leqslant p/q.$$

Définissons, pour $0 \leqslant t \leqslant T$, des séries formelles en ρ, fonctions de t, $\varphi_K(t, \rho)$, $(K = 1,2,\ldots)$ par les problèmes de Cauchy suivants :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - A(t, \rho)\left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho}\right)\right]^p \varphi_1(t, \rho) = B(t, \rho)\ , \quad \frac{\partial^j \varphi_1}{\partial t^j}(0, \rho) = 0 \quad (j = 0,\ldots, p-1)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - A(t, \rho)\left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho}\right)\right]^p \varphi_{K+1}(t, \rho) = L_q\left(\rho, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \rho}\right) \varphi_K(t, \rho)\ ,$$

$$\frac{\partial^j \varphi_{K+1}}{\partial t^j}(0, \rho) = 0\ , \quad (j = 0,\ldots, p-1)$$

(Rappelons que ces problèmes s'intègrent par quadratures). Alors

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \varphi_K(t, \rho) \gg 0, \quad \varphi_K \in \Gamma^{p,(\alpha)}, \quad \sum_K \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \varphi_K(t, \rho) \ \text{converge} \quad (j = 0,\ldots, p),$$

$$\sum_K \varphi_K \in \Gamma^{p,(\alpha)}\ , \ \text{pour} \ 0 \leqslant t \leqslant T' \ (\text{où} \ 0 < T' \leqslant T)\ .$$

Preuve.- Les approximations successives Φ_K qu'emploie la preuve du théorème précédent ont pour expression :

$$\Phi_0 = 0\ , \qquad \Phi_K = \varphi_1 + \ldots + \varphi_K \quad \text{si} \quad K > 0\ .$$

Or nous avons vu que $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \Phi_K$ $(j = 0,\ldots, p)$ est $\gg 0$, croît avec K et tend vers une série formelle dont chaque coefficient est une fonction bornée de t.

Note.- [10] prouve (§ 4) et emploie (§ 5 et § 6) un résultat plus précis : on peut prendre $T' = T$ si $\alpha < \frac{p}{q}$.

§ 4. Etude d'une application non-linéaire : v → u.

Cette étude permettra au § 5 de résoudre l'équation non linéaire par approximations successives.

15. CLASSES DE GEVREY.- Définitions.- Soit une fonction $f : X \to \underline{\underline{C}}$; nous disons que

$$f \in \gamma_2^{n,(\alpha)}(X) \quad \text{si} \quad \left| D^{n,\infty} f, S_t, \rho \right| \in \Gamma^{0,(\alpha)} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant |X| \;;$$

c'est-à-dire si

$$\sup_{\beta,\sigma,t} \frac{1}{[1+|\sigma|]^{\alpha}} \left[|D_x^{\beta+\sigma} f, S_t| \right]^{\frac{1}{1+|\sigma|}} < \infty \quad , \text{ pour } |\beta| \leqslant n \;, \sigma_0 = 0, \; 0 \leqslant t \leqslant |X|$$

De même, soit une fonction $F : X \times Y \to \underline{\underline{C}}$; nous disons que

$$F \in \gamma_2^{n,(\alpha)} (X \times Y) \quad \text{si} \; \left| D^{n,\infty} F, \; S_t \times Y, \rho, \eta, \nu \right| \in \Gamma^{0,(\alpha)} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant |X|$$

c'est-à-dire si

$$\sup_{\beta,\sigma,\tau,t} \frac{1}{[1+|\sigma|+|\tau|]^{\alpha}} \left[|D_x^{\beta+\sigma} D_y^{\tau} F, S_t \times Y, \nu| \right]^{\frac{1}{1+|\sigma|+|\tau|}} < \infty$$

$$\text{pour} \quad |\beta| \leqslant n, \quad \sigma_0 = 0 \;, \quad 0 \leqslant t \leqslant |X| \;;$$

ν est fixe et son choix n'altère pas la condition ci-dessus.

En remplaçant $|\ldots|$ par $\|\ldots\|$ dans les définitions précédentes, on obtient celles de $\gamma_{[2]}^{n,\alpha}$.

Propriétés.- Les propriétés des quasi-normes formelles (n°4) et de $\Gamma^{o,(\alpha)}$ (n°13) ont pour conséquence évidente ceci :

$$D_x^{\beta} : \gamma_{[2]}^{n,(\alpha)} (X) \to \gamma_{[2]}^{n-\beta_o,(\alpha)} (X), \quad \text{si} \quad \beta_o \leqslant n \;;$$

si $n > \frac{\ell}{2}$,

alors $\gamma_{[2]}^{n,(\alpha)} (X)$ est une algèbre ;

si $n > \frac{\ell}{2}+1$, $f = (f_1, f_2, \ldots) : X \to Y$, $f_j \in \gamma_2^{n,(\alpha)}$ et $F \in \gamma_{[2]}^{n,(\alpha)}(X \times Y)$, alors $F(x,f(x)) \in \gamma_{[2]}^{n,(\alpha)}(X)$.

Dans toutes ces propriétés, $[2]$ peut être remplacé par 2.

<u>Note</u>.- En particulier, si $n > \frac{\ell}{2} + 1$, si $f \in \gamma_{[2]}^{n,(\alpha)}(X)$ et si $1/f$ est borné, alors

$$1/f \in \gamma_{[2]}^{n,(\alpha)}(X) .$$

Cette propriété permet, si $n > \frac{\ell}{2}+1$, de diviser chaque opérateur différentiel $\in \gamma_{[2]}^{n,(\alpha)}(X)$ par son premier terme, sans qu'il cesse d'être dans $\gamma_{[2]}^{n,(\alpha)}(X)$; autrement dit : l'hypothèse, faite ci-dessus, que ces opérateurs sont <u>normaux</u> devient superflue.

16. DÉFINITION D'UNE APPLICATION $v \to u$.- Etant donnée une fonction

$$v : X \to \underline{\underline{C}} \quad \text{telle que} \quad D_0^j\, v|S_0 = 0 \quad \text{pour} \quad j < m,$$

nous définirons une fonction

$$u : X' \to \underline{\underline{C}}\,, \qquad \text{où} \qquad X' : 0 \leqslant x_0 < |X'|\ (X' \subset X),$$

par le problème de Cauchy :

$$(16.1) \quad \begin{cases} a(x, D^{m-1}\, v,\, D)u = b(x,\, D^m\, v), \\ \\ D_0^j\, u|S_0 = 0 \quad \text{pour} \quad j < m\,. \end{cases}$$

Nous supposons que $a(x,y,D)$ et $b(x,y)$ ont les propriétés qu'énonce le n°20 : (20.2)...(20.7) ; les dérivées de v qu'on substitue aux composantes de y s'annulent donc sur S_0 ; Y est donc un voisinage de l'origine.

Nous supposons en outre

$$(16.2) \qquad v \in \gamma_2^{m+n,(\alpha)}(X)\,, \quad D_0^j\, v|S_0 = 0 \quad \text{pour} \quad j < m+n\,,$$

(16.3) $$D_0^j\, b(x,0)|S_0 = 0 \quad \text{pour} \quad j < n.$$

Enfin, χ sera le caractère de régularité de l'ensemble des a_j.

Nous allons voir que, sous ces hypothèses, (16.1) définit une application $v \to u$; nous allons la majorer et majorer son module de continuité ; il suffira d'appliquer la formule de composition (4.4.) et le lemme 7.

17. EXISTENCE ET MAJORATION DE L'APPLICATION $v \to u$.- D'après l'hypothèse (16.2), il existe des séries formelles en ρ, fonctions de t $(0 \leqslant t \leqslant |X|)$, $\psi_k(t, \rho)$ telles que :

$$|D^{m+n-p+k,\infty} v, S_t, \rho| \ll \psi_k(t, \rho) \qquad (k = 0,\dots, p) ;$$

(17.1) $$\psi_k \in \Gamma^{0,(\alpha)};\ \psi_0 \in \Gamma^{p,(\alpha)};\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \psi_0(t, \rho) \gg 0 \quad \text{pour} \quad j \leqslant p,$$
$$0 \leqslant t \leqslant |X| ;$$
$$\psi_0\,(0,0) = 0 .$$

Notons

(17.2) $$\psi(t) = \psi_0(t,0), \quad \text{ce qui implique} \quad \psi(0) = 0.$$

La formule de composition (4.4) et les hypothèses (20.2)...(20.7) permettent de construire, à partir de

$$\|D^{m_j+n-j,\infty} a_{j+1}(x,y,D),\ S_t \times Y, \rho, \eta, \nu\|$$

$$\|D^{n,\infty} a(x,y,D), S_t \times Y, \rho, \eta, \nu\|$$

$$|D^{n,\infty} b(x,y), S_t \times Y, \rho, \eta, \nu|$$

des séries formelles en deux variables (ρ, θ), à coefficients fonctions de τ :

$$C[\tau, \rho, \theta] \in \Gamma^{p,(\alpha)},\ C_j[\tau, \rho, \theta] \in \Gamma^{0,(\alpha)},\ B[\tau, \rho, \theta] \in \Gamma^{0,(\alpha)}$$

telles que[1] :

$$\|D^{m_j+n-j,\infty} a_{j+1}(x,D^{m-m_j-p+j} v,D),S_t,\rho\| \ll C(\Psi_o),$$

$$\|D^{n-p+k,\infty} a(x,D^{m-1} v,D),S_t,\rho\| \ll C_k(\Psi_{k-1}) \quad (k = 1,\ldots, p),$$

$$|D^{n,\infty} b(x,D^m v),S_t,\rho| \ll B(\Psi_q) ,$$

$$\ll B(\Psi_{p-1} + \frac{\partial}{\partial \rho} \Psi_{p-1}) \quad \text{si} \quad q = p ;$$

$C(\Psi_o)$, $C_k(\Psi_{k-1})$, $B(\Psi_q)$ sont des séries formelles en ρ , fonctions de t ; ces séries $\in \Gamma^{0,(\alpha)}$. Leur définition exige $D^m v \in Y$; pour réaliser cette condition, il suffit (Sobolev) de prendre $\psi(t)$ suffisamment petit ; donc de prendre :

$$0 \leqslant t \leqslant T(\psi)$$

où $T(\psi)$ est une fonctionnelle de ψ , dont la définition est évidente et qui vérifie :

$$0 < T(\psi) \leqslant |X| .$$

Nous choisissons $C[\tau , \rho,\theta]$ tel que

$$\frac{\partial^j}{\partial \tau^j} C[\tau , \rho , \theta] \gg 0 \quad \text{pour} \quad j \leqslant p.$$

Comme au n°7, nous considérons la fonction de t

(17.3) $$A_o(\psi) = c(\ell ,m, X ,C[\psi(t),0,0]),$$

la série formelle en ρ , fonction de t, définie pour $0 \leqslant t \leqslant T(\psi)$:

(17.4) $$A(\psi , \Psi_o) = A_o(\psi) \left\{C[\psi(t), \rho , \Psi_o(t, \rho) - \psi(t)] - C[\psi(t),0,0]\right\}$$

---

(1) Rappelons que $C(\Psi)$ désigne la série formelle en ρ , fonction de t :

$$C[\Psi(t,0), \rho,\Psi(t,\rho) - \Psi(t,0)] .$$

enfin la série formelle en ρ , fonction de t, $\phi(t,\rho)$ que définit le problème de Cauchy formel

$$(17.5)\quad \begin{cases} [\frac{\partial}{\partial t} - A(\psi,\Psi_o)(1+\frac{\partial}{\partial\rho})]^p\,\phi(t,\rho) = B(\Psi_q) & \text{si } q<p\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = B((1+\frac{\partial}{\partial\rho})\Psi_{p-1}) & \text{si } q=p\,; \\ \frac{\partial^j\phi}{\partial t^j}(0,\rho) = 0 \quad \text{pour } j<p. \end{cases}$$

$A,B\in\Gamma^{0,(\alpha)}$; vu le théorème du n°14 et l'unicité de la solution du problème (17.5),

$$\phi\in\Gamma^{p,(\alpha)}\,;$$

ϕ est défini pour $0\leqslant t\leqslant T(\psi)$.

Le lemme 7 montre ceci :

<u>La solution</u> $u(x)$ <u>du problème de Cauchy</u> (16.1) <u>existe et est unique sur la bande</u>

$$X_\psi : 0\leqslant x_o\leqslant T(\psi)\,;$$

$$u\in\gamma_2^{m+n,(\alpha)}(X_\psi)\,;$$

<u>plus précisément on a</u>

$$(17.6)\quad |D^{m+n-p+k,\infty}u,S_t,\rho| \ll \phi_k(t,\rho) \qquad (k=0,\dots,p)$$

où

$$(17.7)\quad \begin{cases} \phi_o = A_o(\psi)\,\phi \\ \phi_k = c''_k\,A_o(\psi)[1+C_k(\Psi_{k-1})]^k(1+\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\rho})^k\phi \qquad (k=1,\dots,p). \end{cases}$$

<u>Notons que</u>

$$D_o^j\,u|S_o = 0 \quad \text{pour} \quad j<m+n\,;$$

en effet

$$D^j\,b(x,D^{m-p+q}\,v(x))|S_o = 0 \qquad \text{pour} \quad j<n.$$

Ces résultats vont servir à prouver le lemme que voici :

18. UN SOUS-ENSEMBLE DE $\gamma_2^{m+n,(\alpha)}(X')$ QUE L'APPLICATION $v \to u$ APPLIQUE EN LUI-MÊME.-

Lemme 18.- Il existe une bande

$$X' : 0 \leqslant x_0 \leqslant |X'|$$

et des séries formelles en ρ , fonctions de t $(0 \leqslant t \leqslant |X'|)$

$$\phi_k(t, \rho) \in \Gamma^{0,\alpha} \qquad (k = 0, \dots, p)$$

telles que si

$$|D^{m+n-p+k,\infty} v, S_t, \rho| \ll \phi_k(t, \rho), \quad D_0^j v|S_0 = 0$$

sous les hypothèses

$$0 \leqslant t \leqslant |X'|, \quad k \leqslant p, \quad j < m+n ,$$

alors on a, sous ces mêmes hypothèses :

$$|D^{m+n-p+k,\infty} u, S_t, \rho| \ll \phi_k(t, \rho) , \quad D_0^j u|S_0 = 0 .$$

Preuve.- Il suffit de choisir au n°18 les Ψ_k $(k = 0,\dots,p)$ tels que

$$\Psi_k(t, \rho) = \phi_k(t, \rho),$$

c'est-à-dire, vu (18.7), tels que

$$(18.1) \quad \begin{cases} \Psi_0 = A_0(\psi)\phi \\ \\ \Psi_k = c''_j A_0(\psi)[1 + C_k(\Psi_{k-1})]^k (1 + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho})^k \phi \quad (k = 1,\dots,p). \end{cases}$$

Notons

$$\varphi(t) = \phi(t,0) ;$$

la définition (17.2) de $\psi(t)$ s'écrit donc :

$$(18.2)\quad \begin{cases} \psi = A_o(\psi)\varphi \quad , \\ \text{où } A_o(\psi) \text{ est une fonction de } \psi \text{ que définit (17.3) ; elle vérifie} \\ A_o(0) > 0 \ , \ \dfrac{d^j A_o(\psi)}{d\psi^j} \geqslant 0 \text{ pour } \psi \geqslant 0,\ j = 0,\dots, p. \end{cases}$$

Nous en déduirons (fin de ce n°18) que, pour ψ petit, (18.2) équivaut à une relation

$$(18.3)\quad \begin{cases} \psi = f(\varphi) \qquad (\varphi \text{ petit}) \\ \text{où } f \text{ est une fonction vérifiant} \\ f(0) = 0 \ , \ \dfrac{d^j f}{d\varphi^j} \geqslant 0 \text{ pour } \varphi \text{ petit} \geqslant 0,\ j = 0,\dots,p. \end{cases}$$

Les relations (18.3) et (18.1) permettent d'exprimer ψ et Ψ_k $(k = 0,\dots,p)$ en fonction des dérivées de ϕ d'ordres $\leqslant k$; on peut donc éliminer ψ , Ψ_o et Ψ_q (ou Ψ_{p-1}) de (17.5), qui s'écrit avec les notations du n° 10 :

$$(18.4)\quad \begin{cases} [\dfrac{\partial}{\partial t} - F_o(\phi)(1 + \dfrac{\partial}{\partial\rho})]^p \phi = F_q(D^q\phi) \\ \dfrac{\partial^j\phi}{\partial t^j}(0,\rho) = 0 \quad \text{pour} \quad j < p \ ; \end{cases}$$

(18.4) est un problème de Cauchy formel d'inconnue ϕ ; $F_o[\tau,\rho,\theta]$ et $F_q[\tau,\rho,\theta]$ sont des séries formelles en (ρ,θ), fonctions de τ , vérifiant:

$$F_o \in \Gamma^{p,(\alpha)} \quad , \quad F_q \in \Gamma^{0,(\alpha)} \ ,$$

$$F_o[\tau,0,0] = 0 \ , \quad \frac{\partial^j F_o[\tau,\rho,\theta]}{\partial\tau^j} \gg 0 \text{ pour } j \leqslant p, \quad F_q[\tau,\rho,\theta] \gg 0 \ ;$$

si $q = p$, alors $\dfrac{\partial^p\phi}{\partial t^p}$ ne figure pas dans $F_q(D^p\phi)$.

Pour satisfaire (17.1), il suffit qu'on ait

$$(18.5) \qquad \phi \in \Gamma^{p,(\alpha)} , \; \frac{\partial^j \phi(t,\rho)}{\partial t^j} \gg 0 \quad \text{pour} \quad j \leqslant p .$$

D'après le théorème d'existence du n°14, le problème de Cauchy formel (18.4) possède une solution ϕ vérifiant (18.5). La preuve du lemme est achevée.

<u>Preuve de</u> (18.3).- Faisons croître ψ de 0 à un nombre $\widetilde{\psi}$ suffisamment petit pour que $\psi/A_0(\psi)$ soit croissant, c'est-à-dire pour que

$$(18.6) \qquad \frac{\psi}{A_0}\frac{dA_0}{d\psi} < 1 .$$

Alors φ croît de 0 à $\widetilde{\varphi}$ et la relation $\psi = A_0(\psi)\varphi$ équivaut à une relation

$$\psi = f(\varphi) \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant \widetilde{\varphi}) ,$$

où f est une fonction croissante telle que $f(0) = 0$, $f(\varphi) \geqslant 0$. Supposons prouvé que

$$f, \ldots, \frac{d^{j-1}f}{d\varphi^{j-1}} \geqslant 0 \qquad (j \leqslant p).$$

Alors l'application de $\frac{d^j}{d\varphi^j}$ à la relation $f(\varphi) = A_0(f(\varphi))\varphi$ donne

$$[1 - \varphi \frac{dA_0}{d\psi}] \frac{d^jf}{d\varphi^j} \geqslant 0 ,$$

c'est-à-dire

$$[1 - \frac{\psi}{A_0}\frac{dA_0}{d\psi}] \frac{d^jf}{d\varphi^j} \geqslant 0$$

et, vu (18.6) :

$$\frac{d^jf}{d\varphi^j} \geqslant 0 .$$

Voici prouvé (18.3).

19. MODULE DE CONTINUITÉ DE L'APPLICATION $v \to u$.- Notons $\Gamma^{(\alpha)}$ l'ensemble des séries formelles en ρ, indépendantes de t, appartenant à $\Gamma^{0,(\alpha)}$.

Lemme 19.- Supposons qu'on ait sur X, pour $h = 0,1$:

$$(19.1) \quad \begin{cases} a(x,D^{m-1} v_h,D)u_h = b(x,D^m v_h) \\ D_o^j u_h|S_o = 0 \quad \text{pour} \quad j < m \end{cases}$$

$$|D^{m+n,\infty} v_h,S_t,\rho| \ll \Theta(\rho), \; |D^{m+n,\infty} u_h,S_t,\rho| \ll \Theta(\rho), \; \Theta \in \Gamma^{(\alpha)},$$

$$D^j v_h|S_o = 0 \quad \text{pour} \quad j < m+n, \quad \text{donc} \quad D^j u_h|S_o = 0 \quad \text{pour} \quad j < m+n .$$

Il existe alors des séries formelles en ρ, appartenant à $\Gamma^{(\alpha)}$, dépendant de a,b,Θ, mais indépendantes de u_h et v_h;

$$A(\rho), \quad B(\rho)$$

vérifiant :

$$A(\rho) \gg 0, \quad A(0) = 0, \quad B(\rho) \gg 0,$$

telles qu'on ait, pour $k = 0,\dots, p$:

$$|D^{m+n-p+k,\infty}(u_1 - u_o),S_t, \rho| \ll C(\rho)\Big(1 + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho}\Big)^k \varphi(t, \rho) ,$$

si l'on a, pour $k = 0,\dots, p$:

$$|D^{m+n-k,\infty}(v_1 - v_o),S_t, \rho| \ll C(\rho)\Big(1 + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho}\Big)^k \varphi(t,\rho)$$

si $C(\rho) \gg 0, \quad C \in \Gamma^{(\alpha)}$

et si $\varphi(t,\rho)$ est la solution du problème de Cauchy formel

$$\begin{cases} [\frac{\partial}{\partial t} - A(\rho)(1+\frac{\partial}{\partial\rho})]^p \varphi(t,\rho) = B(\rho)C(\rho)(1+\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\rho})^q \psi(t,\rho) \\ \qquad\qquad\qquad \text{quand} \quad q < p\,, \\ \qquad\qquad = B(\rho)C(\rho)(1+\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\rho})^{p-1}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} \\ \qquad\qquad\qquad \text{quand} \quad q = p, \\ \frac{\partial^j\varphi}{\partial t^j}(0,\rho) = 0 \quad \text{pour} \quad j < p. \end{cases}$$

Preuve.- Nous avons

$$a(x,D^{m-1}v_0,D)(u_0-u_1) = b(x,D^m v_0) - b(x,D^m v_1) - [a(x,D^{m-1}v_0,D) - a(x,D^{m-1}v_1,D)]u$$

autrement dit, en notant

$$v_h = (1-h)v_0 + h\,v_1\,, \quad h \text{ variant maintenant de } 0 \text{ à } 1,$$

nous avons

$$\begin{aligned} a(x,D^{m-1}v_0,D)(u_0-u_1) = {} & \sum_\beta D^\beta(v_0-v_1).\int_0^1 b_\beta(x,D^m v_h)dh \\ & - \sum_\beta D^\beta(v_0-v_1).\int_0^1 a_\beta(x,D^{m-1}v_h,D)u_1 dh \end{aligned} \tag{19.2}$$

où

$$|\beta| \leq m-p+q, \qquad D^\beta \neq D_0^m \quad \text{si} \quad p=q,$$

$$b_\beta(x,y) = \frac{\partial b(x,y)}{\partial y_\beta} \quad \text{et} \quad a_\beta(x,y,\xi) = \frac{\partial a(x,y,\xi)}{\partial y_\beta}\,.$$

Or, par hypothèse :

$$|D^{m+n,\infty}v_h, S_t, \rho| \ll \Theta(\rho) \qquad \text{pour} \quad 0 \leq h \leq 1\,.$$

Donc, vu la formule de composition (4.4) on peut construire, en fonction de Θ et des normes formelles de a et b, une série formelle $B(\rho)$, indépendante de v_h et u_h, telle que

$$|D^{n,\infty} b_\beta(x, D^m v_h), S_t, \rho| + \|D^{n,\infty} a_\beta(x, D^{m-1} v_h, D) u_1, S_t, \rho\| \ll B(\rho) ;$$

vu les propriétés des classes de Gevrey formelles, on peut choisir

$$B \in \Gamma^{(\alpha)}.$$

Donc (19.2) donne, vu la formule du produit (4.1) et la formule de la dérivée (4.2)

$$|D^{n,\infty} a(x, D^{m-p+q} v_o, D)(u_o - u_1), S_t, \rho| \ll B(\rho)\, |D^{m+n-p+q}(v_o - v_1), S_t, \rho| \quad \text{quand } q < p$$

$$\ll B(\rho)\left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho}\right) |D^{m+n-1}(v_o - v_1), S_t, \rho| \quad \text{quand } q = p.$$

Il suffit d'appliquer le lemme 7 à cette inégalité pour obtenir le lemme 19.

§ 5. L'équation quasi-linéaire.

20. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS.- Donnons-nous sur une bande de $\underline{\underline{R}}^{\ell+1}$

$$X : 0 \leqslant x_o < |X|, \text{ de bord } S_o : x_o = 0,$$

le problème de Cauchy

$$(20.1) \quad \begin{cases} a(x, D^{m-1} u, D) u = b(x, D^m u) \\ D_o^j u | S_o \quad \text{donné} \in \gamma^{(\alpha)}(S_o) \quad (j < m) ; \end{cases}$$

son inconnue est la fonction numérique complexe $u(x)$.

Nous faisons les hypothèses suivantes :

$$(20.2) \quad a(x,y,D) \in \gamma_{[2]}^{n,(\alpha)}(X \times Y) \quad \text{et} \quad b(x,y) \in \gamma_2^{n,(\alpha)}(X \times Y)$$

sont respectivement un opérateur différentiel d'ordre m et une fonction, donnés sur X, dépendant d'un paramètre $y \in Y$; Y est un ouvert de l'espace vectoriel complexe de dimension égale au nombre des dérivées de u d'ordres $\leqslant m$

Y contient l'adhérence des valeurs prises par les données de Cauchy $D_0^j u|S_0$; quand on substitue à y, dans $a(x,y,D)$ et $b(x,y)$, les dérivées d'une fonction $v(x)$, on obtient $a(x,D^{m-1} v,D)$ qui ne dépend que des dérivées de v d'ordres $\leqslant m-1$, et $b(x,D^m v)$, que nous supposons indépendant de $D_0^m v$; nous supposons

(20.3) $a(x,D^{m-1} v,D) = a_1,\dots,a_{j+1}(x,D^{m-m_j-p+j} v,D)\dots a_p$,

où

(20.4) $a_{j+1}(x,y,D) \in \gamma_{[2]}^{m_j+n-j,(\alpha)}(X \times Y)$

est un opérateur régulièrement hyperbolique sur $X \times Y$, $\forall_j$; on a noté :

(20.5) $m_j = \text{ordre }(a_1)+\dots+\text{ ordre }(a_j),\quad m_p = m,\quad m_0 = 0.$

Soit q le plus petit entier tel que

$$(20.6)\quad \begin{cases} 0 \leqslant q \leqslant p \\ a(x,D^{m-1}v,D) = a(x,D^{m-p+q} v,D) \\ b(x,D^m v) = b(x,D^{m-p+q}) \ ; \end{cases}$$

le sens de cette dernière relation est, bien entendu, le suivant : $b(x,D^m v)$ ne dépend que des dérivées de v d'ordres $\leqslant m-p+q$.

Nous supposons enfin

$$(20.7)\qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant \frac{p}{q} \quad , \quad \frac{\ell}{2} + p < n.$$

Voici les théorèmes que nous allons prouver :

THÉORÈMES D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ.- Il existe une bande

$$X' : 0 \leqslant x_0 < |X'| \qquad (X' \subset X)$$

sur laquelle le problème de Cauchy (21.1) possède une solution

$$u \in \gamma_2^{m+n,(\alpha)}(X').$$

Sur aucune bande plus petite

$$X'' : 0 \leqslant x_0 < |X''| \qquad (X'' \subset X)$$

il ne possède de solution $\in \gamma_2^{m+n,(\alpha)}(X'')$ autre que u.

Note.- Si $q = 0$, on peut prendre $\alpha = \infty$, c'est-à-dire employer comme dans [3] des espaces de Sobolev au lieu de classes de Gevrey : on est dans le cas strictement hyperbolique : voir P. Dionne [3].

Note.- Un exemple de Giorgi [6] montre que ces théorèmes d'existence et d'unicité sont faux si $\frac{p}{q} < \alpha$.

THÉORÈME LOCAL D'UNICITÉ (domaine d'influence).- Supposons

$$1 \leqslant \alpha < p/q .$$

Soient deux fonctions $u_h \in \gamma_2^{m+n,(\alpha)}(X')$ $(h = 0,1)$ qui, sur un domaine D' de X', soient solution du problème de Cauchy (20.1). Supposons que D' possède la propriété suivante, relativement au cône caractéristique de l'opérateur

$$a(x,D^{m-1} u_0,D) :$$

l'émission rétrograde(1) dans X' de tout point de D' appartient à $D' \cup S_0$.

Alors

$$u_0 = u_1 \quad \text{sur } D' .$$

(1) L'émission rétrograde d'un point x de X' est la réunion des arcs de X' d'extrémité x, à tangente dans le cône caractéristique (cône convexe) de l'opérateur linéaire $a(x,D^{m-p+q}u_0,D)$; ces arcs sont orientés dans le sens où x_0 croît.

<u>Note</u>.- Il suffirait de supposer $u_h \in \gamma_2^{m+n,(\alpha)}(D')$, moyennant diverses complications, dont la première serait de définir $\gamma_2^{m+n,(\alpha)}(D')$.

Prouvons d'abord le théorème d'existence.

21. RÉDUCTION A DES DONNÉES DE CAUCHY NULLES.- Il est aisé de déduire de (20.1) les valeurs que doit avoir $D_0^j\, u|S_0$ pour $j = m,\dots, m+n-1$; ces valeurs $\in \gamma_2^{(\alpha)}(S_0)$. Construisons sur X une fonction $w \in \gamma_2^{m+n,(\alpha)}(X)$ telle que $D_0^j\, w|S_0$ $(j \leqslant m+n-1)$ ait ces valeurs ; prenons pour nouvelle inconnue $u-w$.

Nous voici ramenés au cas suivant : les données de Cauchy sont nulles, c'est-à-dire :

$$D^{m-1}\, u|S_0 = 0 \; ; \tag{21.1}$$

de plus le problème (20.1) implique

$$D^{m+n-1}\, u|S_0 = 0 \; .$$

D'où, en appliquant D^{n-1} à $a\, u = b$:

$$D^{n-1}\, b(x, D^m u)\,|S_0 = 0 \; ;$$

c'est-à-dire :

$$D_0^j\, b(x,0)\,|S_0 = 0 \qquad \text{pour } j < n \tag{21.2}$$

Voici donc réalisées les hypothèses (16.3) qu'emploient les lemmes 18 et 19.

22. DÉFINITION D'APPROXIMATIONS SUCCESSIVES.- Notons u_K $(K = 0,1,\dots)$ ces approximations successives de u. Nous choisissons

$$u_0 = 0 \; ;$$

nous définissons u_{K+1} à partir de u_K par le problème de Cauchy

$$(22.1)\quad \begin{cases} a(x,D^{m-p+q}\,u_K,D)u_{K+1} = b(x,D^{m-p+q}\,u_K), \\ D_0^j\,u_{K+1}|S_0 = 0 \quad \text{pour} \quad j < m\,. \end{cases}$$

23. MAJORATION DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES.- Le lemme 18, où l'on remplace les $\Phi_k(t,\rho)$ par une série formelle, $\Theta(\rho)$, qui les majore et est indépendante de t, a pour conséquence immédiate ceci : il existe une série formelle en ρ, indépendante de K, $\Theta \in \Gamma^{(\alpha)}$, et une bande indépendante de K :

$$X' : \quad 0 \leqslant x_0 \leqslant |X'|$$

sur laquelle tous les $u_K(x)$ sont définis et vérifient

$$(23.1)\qquad |D^{m+n,\infty}u_K,S_t,\rho| \ll \Theta(\rho)\,.$$

24. CONVERGENCE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES.- Le lemme 19 a pour conséquence évidente ceci : il existe des séries formelles en ρ, indépendantes de K $A(\rho)$, $B(\rho)$ appartenant à $\Gamma^{(\alpha)}$ et vérifiant

$$A(\rho) \gg 0,\quad A(0) = 0,\quad B(\rho) \gg 0$$

telles qu'on ait pour $0 \leqslant t \leqslant |X'|$ et pour $k = 0,\ldots, p$:

$$(24.1)\qquad |D^{m+n-p+k,\infty}(u_{K+1} - u_K),S_t,\rho| \ll C(\rho)\Big(1 + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\rho}\Big)^k \varphi_{K+1}(t,\rho)\,,$$

quand on choisit $C \in \Gamma^{(\alpha)}$ tel qu'on ait (24.1) pour $K = 0$ et quand φ_{K+1} est défini, pour $K > 0$, par le problème de Cauchy formel

$$
(24.2)\quad \begin{cases}
[\frac{\partial}{\partial t} - A(\rho)(1+\frac{\partial}{\partial \rho})]^p \varphi_{K+1}(t,\rho) = B(\rho)C(\rho)(1+\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \rho})^q \varphi_K(t,\rho) & \text{quand } q < p, \\
\qquad = B(\rho)C(\rho)(1+\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \rho})^{p-1} \frac{\partial \varphi_K}{\partial \rho} & \text{quand } q = p, \\
\frac{\partial^j \varphi}{\partial t^j}(0,\rho) = 0 \quad \text{pour } j < p.
\end{cases}
$$

D'après le théorème de convergence du n° 14, la série

$$\sum_K (\frac{\partial}{\partial t})^j \varphi_K(t,\rho) \qquad (j < p)$$

converge pour $0 \leqslant t < |X''|$; donc

$$\lim_{K\to\infty} (\frac{\partial}{\partial t})^j \varphi_K(t,\rho) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < |X''| .$$

Par suite u_K converge vers une limite u sur la bande

$$X'' : 0 \leqslant x_0 < |X''| .$$

Plus précisément, vu (24.1), $D^{m+n} u_K$ converge vers $D^{m+n} u$ sur X'' ;

$$u \in \gamma_2^{m+n,(\alpha)}(X'') .$$

Les théorèmes de Sobolev permettent de préciser que $D^m u_K$ converge uniformément; vu (22.1), u est donc solution du problème (20.1).

Voici prouvé le théorème d'existence qu'énonce le n° 20.

25. PREUVE DU PREMIER THÉORÈME D'UNICITÉ, (énoncé n°20).- Supposons que

$$(25.1) \qquad u_h \in \gamma_2^{m+n,(\alpha)}(X) \qquad (h = 0,1)$$

soient deux solutions distinctes du même problème de Cauchy (20.1). Notons

$$X^* : 0 \leqslant x_0 < |X^*|$$

la plus grande bande semi-ouverte où elles sont identiques. En remplaçant X par $X - X^*$, nous obtenons deux solutions u_1, u_2 d'un même problème de Cauchy (20.1), qui sont distinctes sur toute bande

$$X' : 0 \leqslant x_0 < |X'| .$$

Montrons que c'est incompatible avec l'hypothèse (25.1).

Réalisons les conditions (21.1) et (21.2) ; appliquons le lemme 19, en y faisant $u_h = v_h$; nous obtenons ceci : l'inégalité

$$(25.2)_K \quad |D^{m+n-p+k,\infty}(u_1-u_0),S_t,\rho| \ll C(\rho)(1+\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \rho})^k \varphi_K(t,\rho) \quad (k=0,\dots,p)$$

implique l'inégalité $(25.2)_{K+1}$, si φ_{K+1} est défini par le problème de Cauchy formel :

$$\begin{cases} [\frac{\partial}{\partial t} - A(\rho)(1+\frac{\partial}{\partial \rho})]^p \varphi_{K+1}(t,\rho) = B(\rho)C(\rho)(1+\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \rho})^q \varphi_K(t,\rho) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{quand} \quad q < p, \\ \qquad\qquad\qquad = B(\rho)C(\rho)(1+\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \rho})^{q-1} \frac{\partial \varphi_K}{\partial \rho} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{quand} \quad q = p, \\ \frac{\partial^j \varphi_{K+1}}{\partial t^j}(0,\rho) = 0 \quad \text{pour} \quad j < p ; \end{cases}$$

ce problème est indépendant de K ; $A(0) = 0$.

Choisissons, ce qui est possible par hypothèse, φ_1 tel que $(25.2)_1$ soit vrai et que

$$\varphi_1 \in \Gamma^{p,(\alpha)} , \quad \frac{\partial^j \varphi_1}{\partial t^j}(t,\rho) \gg 0 \quad \text{pour} \quad j \leqslant p.$$

D'après le théorème de convergence du n°14,

$$\sum_K (\frac{\partial}{\partial t})^j \varphi_K(t,\rho) \quad (j \leqslant p)$$

converge sur un intervalle $0 \leqslant t < |X'|$; donc

$$\lim_{K\to\infty} (\frac{\partial}{\partial t})^j \varphi_K(t,\rho) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < |X'|, \ j \leqslant p ;$$

donc

$$u_0 = u_1 \quad \text{sur la bande} \quad X' : 0 \leqslant x_0 < |X'| ;$$

cette conclusion contredit les hypothèses.

Voici prouvé le premier théorème d'unicité. Son seul intérêt est de ne pas exiger $\alpha < \frac{p}{q}$, ce que va supposer le théorème d'unicité locale, dont les conclusions sont plus fortes.

26. PREUVE DU THÉORÈME D'UNICITÉ LOCALE(énoncé n°20).- Soient deux fonctions

$$u_h \in \gamma_2^{m+n,(\alpha)}(X') \qquad (h = 0,1) ,$$

solutions sur D' du problème de Cauchy (20.1). Sur D', nous avons donc (19.1), avec $v_h = u_h$. Donc $u_0 - u_1$ vérifie une équations hyperbolique non stricte, linéaire et homogène ; ses coefficients vérifient les hypothèses qu'énonce le n°23 de [10] ; $D^{m-1}(u_0 - u_1)|S_0 = 0$. D'après le théorème d'unicité qu'énonce le n°24 de [10] et la note qui suit ce théorème, nous avons donc

$$u_0 = u_1 \quad \text{sur} \quad D' ;$$

le théorème est prouvé.

§ 6. Systèmes quasi-linéaires diagonaux.

L'extension des théorèmes du n°20 aux systèmes quasi-linéaires diagonaux est aisée ; nous ne donnerons pas le détail des preuves ; mais nous expliciterons les résultats, que A. Lichnerowicz [12] et Mme Y. Choquet-Bruhat [2] appliquent à la magnéto-hydrodynamique relativiste.

27. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS.- Donnons-nous sur une bande de $\underline{\underline{R}}^{\ell+1}$

$$X : 0 \leqslant x_0 < |X| , \quad \text{de bord} \quad S_0 : x_0 = 0$$

le problème de Cauchy[1]:

---

(1) Bien entendu, si $m^\mu < n^\nu$, alors ni u^μ ni aucune de ses dérivées ne figure dans $b^\nu(x, D^{m^\mu - n^\nu} u^\mu)$.

$$(27.1)\quad \begin{cases} a^{\nu}(x, D^{m^{\mu}-n^{\nu}-1}u^{\mu}, D)u^{\nu} = b^{\nu}(x, D^{m^{\mu}-n^{\nu}}u^{\mu}), \\ D_0^j u^{\nu}|S_0 \quad \text{donné} \in \gamma^{(\alpha)}(S_0) \quad (j < m^{\nu} - n^{\nu}), \end{cases}$$

où μ, ν valent $1,\dots,N$; les inconnues sont les N fonctions numériques complexes $u^{\nu}(x)$.

Nous faisons les hypothèses suivantes :

$$(27.2)\quad a^{\nu}(x,y,D) \in \gamma_{[2]}^{n^{\nu},(\alpha)}(X \times Y) \quad \text{et} \quad b^{\nu}(x,y) \in \gamma_{2}^{n^{\nu},(\alpha)}(X \times Y)$$

sont respectivement N operateurs différentiels d'ordres $m^{\mu}-n^{\nu}$ et N fonctions, donnés sur X, dépendant d'un paramètre $y \in Y$; Y est un ouvert de l'espace vectoriel complexe de dimension égal au nombre des dérivées des u^{ν} $(\nu=1,\dots,N)$ d'ordres $\leq \sup\limits_{\mu} m^{\mu}-n^{\nu}$; Y contient l'adhérence des valeurs prises par les données de Cauchy $D_0^j u^{\nu}|S_0$; quand on substitue dans $a^{\nu}(x,y,D)$ et $b^{\nu}(x,y)$ à y les dérivées de fonctions $v^{\mu}(x)$, on obtient

$$a^{\nu}(x, D^{m^{\mu}-n^{\nu}-1}v^{\mu}, D) \quad \text{et} \quad b^{\nu}(x, D^{m^{\mu}-n^{\nu}}v^{\mu}),$$

que nous supposons indépendant des $D_0^{m^{\mu}-n^{\nu}}v^{\mu}$; nous supposons

$$(27.3)\quad a^{\nu}(x, D^{m^{\mu}-n^{\nu}-1}v^{\mu}, D) = a_1^{\nu}\dots a_{j+1}^{\nu}(x, D^{m^{\mu}-m_j^{\nu}-p^{\mu}+j}v^{\mu}, D)\dots a_{p^{\nu}}^{\nu}$$

où

$$(27.4)\qquad a_{j+1}^{\nu}(x,y,D) \in \gamma_{[2]}^{m_j^{\nu}-j,(\alpha)}(X \times Y)$$

est un opérateur <u>régulièrement hyperbolique</u> sur $X \times Y$; on a noté

$$(27.5)\quad m_j^{\nu} = n^{\nu} + \text{ordre}(a_1^{\nu}) + \dots + \text{ordre}(a_j^{\nu}), \quad m_{p^{\nu}}^{\nu} = m^{\nu}, \quad m_0^{\nu} = n^{\nu}.$$

Soient q^{μ} <u>les plus petits entiers</u> tels que

$$0 \leqslant q^{\mu} \leqslant p^{\mu}$$

$$(27.6) \quad \begin{cases} a^{\nu}(x, D^{m^{\mu}-n^{\nu}-1} v^{\mu}, D) = a^{\nu}(x, D^{m^{\mu}-n^{\nu}-p^{\mu}+q^{\mu}} v^{\mu}, D) \\ b^{\nu}(x, D^{m^{\mu}-n^{\nu}} v^{\mu}) = b^{\nu}(x, D^{m^{\mu}-n^{\nu}-p^{\mu}+q^{\mu}} v^{\mu}) \quad . \end{cases}$$

Nous supposons enfin

$$(27.7) \qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant \frac{p^{\nu}}{q^{\nu}} \quad ; \quad \frac{\ell}{2} + p^{\nu} < n^{\nu} \qquad , \quad \forall \nu \quad .$$

THÉORÈMES D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ.- <u>Il existe une bande</u>

$$X' : 0 \leqslant x_0 < |X'| \qquad\qquad (X' \subset X)$$

<u>sur laquelle le problème de Cauchy</u> (27.1) <u>possède une solution</u>

$$u^{\nu} \in \gamma_2^{m^{\nu},(\alpha)}(X') \ .$$

<u>Sur aucune bande plus petite</u> X'' <u>il ne possède de solution</u> $\in \gamma_2^{m^{\nu},(\alpha)}(X'')$, <u>autre que</u> u^{ν} .

<u>Note</u>.- Si $q^{\nu} = 0$, $\forall \nu$, on peut prendre $\alpha = \infty$, c'est-à-dire employer des espaces de Sobolev au lieu de classes de Gevrey ; on est dans le cas strictement hyperbolique.

THÉORÈME LOCAL D'UNICITÉ (<u>domaine d'influence</u>).- <u>Supposons</u>

$$1 \leqslant \alpha < p_{\nu}/q_{\nu} \quad , \quad \forall \nu \quad .$$

<u>Soient, sur un domaine</u> D' <u>de</u> X', <u>deux solutions</u>

$$u_h^{\nu} \in \gamma_2^{m^{\nu},(\alpha)}(X') \qquad (h = 0,1)$$

<u>du problème de Cauchy</u> (27.1). <u>Supposons que</u> D' <u>possède la propriété suivante</u>,

<u>relativement au cône caractéristique de l'opérateur</u> $\prod_\nu a^\nu(x, D^{m^\mu - n^\nu - 1} u_0^\mu, D)$: <u>l'émission rétrograde dans</u> X' <u>de tout point de</u> D' <u>appartient à</u> $D' \cup S_0$. <u>Alors</u>

$$u_0^\nu = u_1^\nu \quad \text{sur} \quad D'.$$

28. PREUVE SOMMAIRE.- On opère, comme au § 5, par approximations successives, après s'être ramené au cas :

$$D_0^j u^\nu | S_0 = 0 \quad \text{pour} \quad j < m^\nu - n^\nu \; ; \qquad D_0^j b^\nu(x,0) | S_0 = 0 \quad \text{pour} \quad j < n^\nu .$$

Il faut d'abord avoir étudié, comme au § 4, l'application $v \to u$ que définit le problème de Cauchy

$$(28.1) \begin{cases} a^\nu(x, D^{m^\mu - n^\nu - 1} v^\mu, D) u^\nu = b(x, D^{m^\mu - n^\nu} v^\mu) \\ D_0^j u^\nu | S_0 = 0 \quad \text{pour} \quad j < m^\nu - n^\nu . \end{cases}$$

<u>Majoration de l'application</u> $v \to u$.- Supposons, comme au n° 17,

$$|D^{m^\mu - p^\mu + k, \infty} v^\mu, S_t, \rho| \ll \Psi_k^\mu(t, \rho) \; , \qquad (k = 0, \ldots, p^\mu)$$

les Ψ vérifiant (17.1) ; on pose

$$(28.2) \qquad \psi(t) = \sum_\mu \Psi_0^\mu(t, 0) \; ;$$

on obtient, sur une bande X_ψ :

$$|D^{m^\nu - p^\nu + k, \infty} u^\nu, S_t, \rho| \ll \Phi_k^\nu(t, \rho) \qquad (k = 0, \ldots, p^\nu) \; ,$$

en posant

$$(28.3) \begin{cases} \Phi_0^\nu = A_0(\psi) \Phi^\nu \\ \Phi_{p^\nu - j}^\nu = c'' A_0(\psi) [1 + C(\Psi_{r^\mu_j}^\mu)]^{p^\nu - j} \left(1 + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho}\right)^{p^\nu - j} \Phi^\nu \; , \end{cases}$$

où

$$0 \leqslant j \leqslant p^\nu , \quad r_j^\mu = \inf(p^\mu - j - 1,\ q^\mu - j),\ \psi_r^\mu = \psi_o^\mu \quad \text{pour} \quad r \leqslant 0 ,$$

et en définissant les Φ^ν par le système de Cauchy formel :

$$(28.4) \quad \begin{cases} [\frac{\partial}{\partial t} - A(\psi, \sum_\mu \psi_o^\mu)(1 + \frac{\partial}{\partial \rho})]^{p^\nu} \quad \Phi^\nu(t, \rho) = B^\nu(\psi_{q^\mu}^\mu) \\ \frac{\partial^j \Phi^\nu}{\partial t^j}(0, \rho) = 0 \quad \text{pour} \quad j < p^\nu \ ; \end{cases}$$

dans B^ν, on remplace $\psi_{q^\mu}^\mu$ par $(1 + \frac{\partial}{\partial \rho})\psi_{p^\mu - 1}^\mu$, quand $q^\mu = p^\mu$.

<u>Un sous-ensemble de</u> $\sum_\nu \gamma_2^{m^\nu,(\alpha)}(X')$ <u>que</u> $\{v^\nu\} \to \{u^\nu\}$ <u>applique en lui-même</u> s'obtient alors, comme au n° 18, en montrant qu'on peut choisir

$$(28.5) \qquad \psi_k^\nu = \Phi_k^\nu \ .$$

On note

$$\varphi(t) = \sum_\nu \Phi^\nu(t,0) \ ;$$

la définition (28.2) de ψ s'écrit donc

$$\psi = A_o(\psi)\varphi \quad ;$$

on met, comme au n°18, cette relation sous la forme

$$(28.6) \qquad \varphi = f(\psi).$$

En éliminant les Φ_k^ν entre (28.5) et (28.3), on obtient

$$(28.7) \quad \begin{cases} \psi_o^\nu = A_o(\psi)\,\Phi^\nu \\ \psi_{p^\nu - j}^\nu = c''\ A_o(\psi)[1 + C(\psi_{r_j^\mu}^\mu)]^{p^\nu - j}(1 + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho})^{p^\nu - j}\Phi^\nu \end{cases}$$

Puisque $r_j^\mu = p^\mu - i$, où $i > j$, les équations (28.7) se résolvent par un nombre fini d'itérations ; on obtient, en employant une généralisation évidente de la notation du n°10 :

$$\psi^\nu_{p^\nu - j} = G^\nu_j(\psi, D^{p^\nu - j}\Phi^\nu, D^{r_i^\mu}\Phi^\mu), \quad \text{où} \quad i \geq j .$$

Prenons $j > 0$, ce qui implique $i > 0$, donc $r_i^\mu < q^\mu$; il vient :

$$\psi^\nu_{p^\nu - j} = G^\nu_j(\psi, D^{p^\nu - j}\Phi^\nu, D^{q^\mu - 1}\Phi^\mu) \quad \text{pour} \quad j > 0 ;$$

d'où, en faisant $j = p^\nu - q^\nu$ quand $q^\nu < p^\nu$, puis $j = 1$ quand $q^\nu = p^\nu$:

$$(28.8) \quad \begin{cases} \psi^\nu_{q^\nu} = G^\nu(\psi, D^{q^\nu}\Phi^\nu, D^{q^\mu - 1}\Phi^\mu) & \text{pour} \quad q^\nu \neq p^\nu , \\ \psi^\nu_{p^\nu - 1} = G^\nu(\psi, D^{q^\mu - 1}\Phi^\mu) & \text{pour} \quad q^\nu = p^\nu . \end{cases}$$

En portant (28.8) dans (28.4), nous voyons que $\{\Phi^\nu\}$ doit être une solution du problème de Cauchy formel

$$(28.9) \quad \begin{cases} [\frac{\partial}{\partial t} - F_o^\nu(\Phi^\mu)(1 + \frac{\partial}{\partial \rho})]^{p^\nu}\Phi^\nu = F^\nu(D^{q^\mu}\Phi^\mu) \\ \frac{\partial^j \Phi^\nu}{\partial t^j}(0, \rho) = 0 \quad \text{pour} \quad j < p^\nu ; \end{cases}$$

ce problème a des propriétés analogues à celles du problème (18.4) ; par exemple :

$$\frac{\partial^{p^\nu}\Phi^\nu}{\partial t^{p^\nu}} \text{ ne figure pas dans } F^\nu(D^{q^\mu}\Phi^\mu) .$$

Il s'agit de trouver une solution du problème (28.9) telle que

$$(28.10) \qquad \Phi^\nu \in \Gamma^{p^\nu,(\alpha)}, \quad \frac{\partial^j \Phi^\nu}{\partial t^j}(t,\rho) \gg 0 \quad \text{pour} \quad j \leqslant p^\nu .$$

Une telle solution existe, car le théorème d'existence du n° 14 s'étend aisément à des systèmes formels du type (28.9).

Voici achevée la construction de l'ensemble que l'application $v \to u$ applique en lui-même.

<u>La majoration des approximations successives</u> en résulte, comme au n°23.

<u>Le module de continuité de l'application</u> $v \to u$ est donné par un lemme analogue au lemme 19 : on suppose

$$|D^{m^\mu,\infty} v_h^\mu, S_t, \rho| \ll \Theta(\rho), \quad |D^{m^\mu,\infty} u_h^\mu, S_t, \rho| \ll \Theta(\rho), \quad \text{où } \Theta \in \Gamma^{(\alpha)}, \ h = 0,1 ;$$

on a

$$(28.11) \quad |D^{m^\mu - p^\mu + k,\infty}(u_1^\mu - u_0^\mu), S_t, \rho| \ll c(\rho)\left(1 + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho}\right)^k \varphi^\mu(t,\rho) \quad (k = 0,\dots,p^\mu)$$

si l'on a

$$(28.12) \quad |D^{m^\mu - p^\mu + k,\infty}(v_1^\mu - v_0^\mu), S_t, \rho| \ll c(\rho)\left(1 + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho}\right)^k \psi^\mu(t,\rho) \quad (k = 0,\dots,p^\mu)$$

et si les φ^μ sont la solution du problème de Cauchy formel :

$$(28.13) \quad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial t} - A(\rho)\left(1 + \dfrac{\partial}{\partial \rho}\right)\right]^{p^\nu} \varphi^\nu = \displaystyle\sum_\mu B_\mu^\nu(\rho) c(\rho)\left(1 + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho}\right)^{q^\mu} \psi^\mu \\[2ex] \dfrac{\partial^j \varphi_\nu}{\partial t^j}(0,\rho) = 0 \quad \text{pour} \quad j < p^\nu ; \end{cases}$$

dans (28.13), $\left(1 + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho}\right)^{q^\mu} \psi^\mu$ est remplacé par $\left(1 + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho}\right)^{p^\mu - 1} \frac{\partial \psi^\mu}{\partial \rho}$ quand $q^\mu = p^\mu$; A, B_μ^ν dépendant de a^ν, b^ν, Θ, sans dépendre de u_h^μ ni de v_h^μ ; $A(0) = 0$; A, B_μ^ν sont $\gg 0$ et $\in \Gamma^{(\alpha)}$.

<u>La convergence des approximations successives</u> en résulte, comme au n°24, en employant une extension facile, aux systèmes formels, du théorème de convergence du n° 14.

Les théorèmes d'unicité se prouvent, comme aux n° 25 et 26.

§ 7. Systèmes quasi-linéaires ou non-linéaires.

29. Un tel système se transforme aisément en un système à partie principale diagonale, c'est-à-dire du type qui vient d'être étudié au § 6 : il suffit d'appliquer à chacune de ses équations le mineur qui lui correspond dans la matrice constituée par les opérateurs différentiels linéaires tangents aux premiers membres de ces équations. Dans le cas d'une seule équation non-linéaire, voir P. Dionne [3].

On transforme ainsi un problème de Cauchy en un problème de Cauchy équivalent, auquel on appliquera les théorèmes du n° 27.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S.S. CHERN et Hans LEWY, Plongement d'une multiplicité riemannienne dans un espace euclidien, (en préparation).

[2] Y. CHOQUET-BRUHAT, Fluides relativistes de conductivité finie (en préparation).

[3] P. DIONNE, Sur les problèmes de Cauchy hyperboliques bien posés. Jour. d'Analyse Math., t.10 (1962) pp. 1-90.

[4] L. GÅRDING, Cauchy's problem for hyperbolic equations, Lecture Notes, University of Chicago, 1957 ;
-- Energy inequalities for hyperbolic systems, Colloque international de Bombay, 1964.

[5] M. GEVREY, Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles, Annales Ecole Norm. Sup., t.35 (1917), pp.129-189.

[6] E. DE GIORGI, Un teorema di unicità per il problema di Cauchy relativo ad equazioni differenziali lineari a derivate parziali di tipo parabolico, Annali di Mat., t.40, (1955) p.371-377.
-- Un esempio di non-unicita della soluzione del problema di Cauchy ; Università di Roma, Rendiconti di Matematica, t.14, 1955, pp. 382-387.
J. LERAY, Equations hyperboliques non strictes : contre-exemples du type de Giorgi, aux théorèmes d'existence et d'unicité, (Séminaire du Collège de France, 1965).

[7] L. HÖRMANDER, Linear partial differential operators, Springer (1963).

[8] N.A. LEDNEV, Nouvelle méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles, Mat. Sb. t. 22 (1948) (en russe).

[9] J. LERAY, Hyperbolic differential equations, Institute for adv. study, Princeton, 1953.
-- La théorie de Gårding des équations hyperboliques linéaires, CIME, Varenna, 1956.

[10] J. LERAY et Y. OHYA, Systèmes linéaires, hyperboliques non stricts, Colloque de Liège, 1964, C.N.R.B.

[11] J. LERAY et L. WAELBROECK, Normes des fonctions composées, Colloque de Liège, 1964, C.N.R.B.

[12] A. LICHNEROWICZ, Etude mathématique des équations de la magnétohydrodynamique relativiste, C.R. Acad. Sciences, t.260 (1965) pp. 4.449-4.453.

[13] Y. OHYA, Le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques à caractéristiques multiples, Jour. Math. Soc. Japan, t.16 (1964) pp. 268-286.

[14] C. PUCCI, Nuove ricerche sul problema di Cauchy, Mem. Acc. Sci. Torino, 1955.

[15] G. TALENTI, Sur le problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles, C.R. Acad. Sc., t.259 (1964) pp. 1932-1933.