Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux
dérivées partielles

M. Zerner

Quelques propriétés des espaces nucléaires (d'après un article de Mitiagin)

Séminaire Jean Leray, n° 2 (1963-1964), p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1963-1964___2_1_0>

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ESPACES NUCLÉAIRES

(d'après un article de MITIAGIN)

par

M. ZERNER

I

Nucléarité et suite des $n^{\text{èmes}}$ diamètres

$n^{\text{ème}}$ DIAMÈTRE D'UN ENSEMBLE DANS UN ESPACE NORMÉ

E étant un espace vectoriel, $\mathcal{G}_n$ désignera l'ensemble de ses sous-espaces vectoriels de dimension n.

Jusqu'à nouvel avis, E sera supposé normé.

A étant un sous-ensemble de E on appellera $n^{\text{ème}}$ diamètre de A et on notera $d_n(A)$ (ou d_n) le nombre

$$\inf_{L \in \mathcal{G}_n} \ \sup_{x \in A} \ \inf_{y \in L} \|x - y\| \ .$$

C'est donc la borne inférieure des nombres ε tels qu'il existe un sous-espace de dimension n approchant tout élément de A à ε près. Cette notion a été introduite par Kolmogorov [9].

Exemple. Si A est un ellipsoïde de $\underline{\underline{R}}^m$ centré à l'origine $d_n(A)$ est le $(n+1)^{\text{ème}}$ demi-axe par ordre décroissant pour $n < m$ et $d_n = 0$ pour $n \geqslant m$. Nous allons généraliser cet exemple à un espace hilbertien séparable, ce qui sera utile pour la suite.

LEMME 1. S'il existe $L \in \mathcal{G}_{n+1}$ tel que l'intersection de L avec la boule de rayon δ soit contenue dans A, on a

$$d_n(A) \geqslant \delta \ .$$

(Krasnoselski, Krein et Milman [7]).

<u>Démonstration dans le cas où</u> E <u>est préhilbertien</u>. Soit $L_n \in \mathcal{G}_n$. Le complémentaire orthogonal de L_n coupe L et contient donc un vecteur $x \in A$ avec $\|x\| = \delta$. On a $\forall y \in L_n$

$$\|x - y\| \geqslant \delta$$

PROPOSITION 1. Supposons E hilbertien séparable. Soient $\{e_k\}$ une base hilbertienne de E et (a_k) une suite croissante de nombres > 0. Posons

$$A = \left\{x \ ; \ \sum a_k^2 |(x_k|x)|^2 \leqslant 1\right\}$$

on a

$$d_n(A) = \frac{1}{a_{n+1}} \ .$$

PROPRIÉTÉS DU $n^{\text{ème}}$ DIAMÈTRE

La démonstration des propriétés que voici ne présente aucune difficulté sérieuse.

a) $d_n(A) = \inf \left\{r \ ; \ \exists L \in \mathcal{G}_n \ , \ A \subset L + rU\right\}$ U désignant la boule unité (ici indifféremment ouverte ou fermée).

b) $d_n(\alpha A) = \alpha \, d_n(A) \qquad (\alpha \geqslant 0)$

c) si $A \subset B$ $d_n(A) \leqslant d_n(B)$

d) $d_n(A) = d_n(\bar{A}) = d_n(\Gamma(A))$ (1)

e) $d_n(A) = 0$ si et seulement si A est contenu dans un sous-espace vectoriel de dimension n .

f) La suite (d_n) est décroissante.

---

(1) $\Gamma(A)$ désigne l'enveloppe disquée de A .

LEMME FONDAMENTAL. On pose pour tout entier positif j :

$$\nu(j) = \sup\{n \ ; \ n^2 \leqslant j\}$$

Soit A tel que $\sum n^2 d_n(A) < \infty$. Il existe alors une suite (x_k) d'éléments de E de norme $\leqslant 1$, une suite (u_k) d'éléments de A° et une suite de nombres λ_k vérifiant $|\lambda_k| \leqslant 2[2\nu(j) + 3]d_{\nu(k)}$ tels que tout $x \in \Gamma(A)$ s'écrive

$$x = \sum_0^\infty \lambda_k < u_k , x > x_k \ .$$

<u>Remarque</u>. La suite (λ_k) du lemme est sommable.

<u>Démonstration</u>. Nous nous appuierons sur un résultat classique nommé parfois lemme d'Auerbach (BANACH [1] cite le résultat sans démonstration) : dans un espace de Banach de dimension finie et son dual existent deux bases normées en dualité. (Démonstrations dans DAY [4] et TAYLOR [16]).

Soient $L_n \in \mathcal{G}_n$ et $(g_{k,n})$, $(g'_{k,n})$ deux bases normées en dualité dans L_n.

$$\| g_{k,n} \| = \| g'_{k,n} \|_{L'_n} = 1$$

$$< g_{j,n} , g_{k,n} > = \delta_{j,k} \ .$$

D'après la forme analytique du théorème de Hahn-Banach, il existe des formes $\hat{g}_{k,n}$ sur E de norme 1 qui prolongent les $g'_{k,n}$. L'opérateur P_n :

$$x \to \sum_{k=1}^{n} < \hat{g}_{k,n} , x > g_{k,n}$$

est un projecteur de E sur L_n dont la norme est au plus égale à n.

S'il existe n_0 tel que $d_{n_0}(A) = 0$ la conclusion du lemme est sûrement vérifiée (propriété e). Sinon, appelant U la boule unité ouverte on peut trouver pour tout n $L_n \in \mathcal{G}_n$ tel que

$$A \subset L_n + 2d_n U \quad .$$

et construire P_n à partir de ce sous-espace. Soit alors $x \in A$. On peut trouver $y \in L_n$ tel que

$$\| x - y \| < 2d_n$$

d'où

$$\| x - P_n x \| = \| x - y - P_n x + P_n y \| \leq 2d_n(1 + n) \quad .$$

Comme le second membre tend vers 0 on peut écrire :

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} (P_{n+1} - P_n)x$$

(série absolument convergente au demeurant). Notons que

$$\| (P_{n+1} - P_n)x \| \leqslant 2d_n(2n + 3) \quad .$$

Posons maintenant :

$$M_n = L_n + L_{n+1} \quad .$$

C'est un sous-espace à $2n + 1$ dimensions au plus. Construisons $h_{k,n}$, $\hat{h}_{k,n}$, Q_n à partir de M_n comme $g_{k,n}$, $\hat{g}_{k,n}$, P_n à partir de L_n. Nous aurons $\forall x \in A$:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(P_{n+1} - P_n)x$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{2n+1} < \hat{h}_{k,n}, (P_{n+1} - P_n)x > h_{k,n} \right]$$

(certains des $h_{k,n}$ peuvent être nuls). On a

$$|<\hat{h}_{k,n}\,(P_{n+1} - P_n)x>| \leqslant 2d_n(2n+3)$$

de sorte que

$$\frac{{}^t(P_{n+1} - P_n)h_{k,n}}{2d_n(2n+3)} = u_{k,n} \in A^\circ$$

et on peut écrire :

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < u_j,\ x > x_j$$

en posant :

$$\lambda_j = 2d_{\nu(j)}[2\,\nu(j) + 3]$$

$$u_j = u_{1+j-[\nu(j)]^2,\ \nu(j)}$$

$$x_j = h_{1+j-[\nu(j)]^2,\ \nu(j)} \ .$$

Le lemme est établi.

<u>Magnitude et ordre d'un ensemble dans un espace de Banach</u> (GROTHENDIECK [6], ch.II § 1). Un sous-ensemble A d'un espace de Banach E est dit de <u>magnitude</u> p $(p \leqslant 1)$ s'il existe une suite (λ_j) de puissance p-ème sommable, une suite $(u_j) \subset A^\circ$ et une suite (x_j) contenue dans la boule unité de E telles que tout $x \in A$ puisse s'écrire :

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < u_j\ ,\ x > x_j \quad .$$

L'<u>ordre</u> de A est la borne inférieure des nombres p tels que A soit de magnitude p .

PROPOSITION 2. Si la suite $d_n(A)$ est de puissance p-ème sommable avec $p < 1/3$, alors A est d'ordre au plus $2\frac{p}{1-p}$ dans $\hat{E}$. Inversement si A est d'ordre p dans $\hat{E}$, alors l'exposant de convergence de la suite $d_n(A)$ est au plus égal à $\frac{p}{1-p}$. En particulier A est d'ordre 0 dans $\hat{E}$ si et seulement si $d_n(A)$ est à décroissance rapide.

L'exposant de convergence de la suite (d_n) est la borne inférieure des nombres p tels que $\sum d_n^p < \infty$. Nous utiliserons le résultat plus ou moins classique que voici, basé sur le fait que si (a_n) est décroissante et sommable, $n\, a_n \to 0$.

LEMME 2. Si (a_n) est une suite positive décroissante, son exposant de convergence est égal à

$$\inf \left\{ p \; ; \; \exists A \; \forall n \quad a_n \leqslant A\, n^{-\frac{1}{p}} \right\}$$

Si la suite (d_n) est de puissance p-ème sommable on a

$$d_n \leqslant A\, n^{-\frac{1}{p}}$$

d'où, dans le lemme fondamental

$$\lambda_j \leqslant A \nu(j) [\nu(j)]^{-\frac{1}{p}}$$

$$\sum_{\nu(j)=k} \lambda_j^q \leqslant B k^{1+q-q/p}$$

d'où

$$\sum \lambda_j^q < \infty$$

pourvu que

$$1 + q - \frac{q}{p} < -1$$

qui donne

$$q > \frac{2p}{1-p} \quad .$$

Pour la deuxième affirmation de la proposition, nous pouvons supposer E complet. Supposons A de magnitude p :

$$\forall x \in A \qquad x = \sum \lambda_j < u_j \, , x > x_j$$

avec $\sum \lambda_j^p < \infty$, $u_j \in A^\circ$, $\|x_j\| \leq 1$

Nous pouvons supposer de plus les λ_j décroissants, d'où

$$\lambda_j \leq A\, j^{-1/p}$$

En considérant le sous-espace engendré par $x_1, \ldots, x_n$, on trouve

$$d_n(A) \leq \sum_{n+1}^{\infty} \lambda_j \leq Bn^{1-1/p}$$

d'où le résultat d'après le lemme 2.

<u>L'espace normé associé à un ensemble disqué</u>. Nous abandonnons maintenant l'hypothèse que E est normé. Si alors U est un ensemble disqué de E nous noterons :

$$N_U = \left\{ x \; ; \quad \forall \lambda \quad \lambda x \in U \right\}$$

E_U le quotient de l'espace vectoriel engendré par U par N_U et ϖ_U la projection correspondante

$$\|x\|_U = \inf \left\{ \lambda \; ; \; \lambda > 0 \quad x \in \lambda U \right\}$$

E_U est muni de la norme obtenue à partir de $\|\cdot\|_U$ par passage au quotient.

Si A est un sous-ensemble de E absorbé par U nous appellerons $n^{\text{ème}}$ <u>diamètre de</u> A <u>par rapport à</u> U et noterons $d_n(A,U)$ le nombre $d_n[\varpi_U(A)]$.

On a donc :

$$d_n(A,U) = \inf \left\{ r \; ; \; \exists L \in \mathcal{G}_n \quad A \subset L + rU \right\}$$

et sous cette forme, on peut supprimer la restriction " A absorbé par U " à condition d'admettre la valeur $+\infty$.

Nous aurons à utiliser la relation suivante, de démonstration facile :

$$\text{(g)} \qquad d_{m+n}(W,U) \leqslant d_m(V,U)\, d_n(W,V) \quad .$$

Applications et espaces nucléaires

Soient E, F deux espaces de Banach et u une application linéaire de E dans F. On dit que u est <u>nucléaire</u> s'il existe une suite bornée (e'_j) du dual de E, une suite bornée (f_j) de F et une suite sommable (λ_j) de nombres telles que pour tout $x \in E$;

$$u(x) = \sum_j \lambda_j < e'_j , x > f_j \quad .$$

Dans un espace vectoriel localement convexe séparé (E.L.C) E si U et V sont deux voisinages disqués de 0, $V \subset U$, il existe une <u>application canonique</u> $\overline{\omega}_{V,U}$ obtenue en factorisant la projection $\overline{\omega}_U$ à travers E_V et prolongeant l'application $E_V \to E_U$ aux complétés respectifs.

Nous dirons que E est un <u>espace nucléaire</u> si pour tout voisinage disqué U de 0, il existe un voisinage disqué $V \subset U$ tel que l'application canonique $\overline{\omega}_{V,U}$ soit nucléaire.

Le lemme fondamental admet alors le corollaire que voici :

LEMME 3. Pour que E soit nucléaire il suffit que pour tout voisinage U disqué de 0 on puisse trouver un voisinage V de 0 tel que :

$$\sum n^2 d_n(V,U) < \infty \quad .$$

Nous finirons par trouver des conditions nécessaires plus fortes et des conditions suffisantes plus faibles. Mais commençons par énoncer les résultats dont nous aurons besoin sur les espaces nucléaires.

Structure des espaces nucléaires

Soit E un e.l.c. Pour que E soit nucléaire il faut et il suffit qu'il existe un ensemble $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ d'espaces hilbertiens séparables et pour chaque $\alpha \in I$ une application linéaire u_α de E dans E_α les propriétés suivantes étant vérifiées.

(i) La topologie de E est la moins fine de toutes celles qui rendent continues les applications u_α .

(ii) $\forall \alpha \in I$, $\exists \beta \in I$ tel que $E_\beta \subset E_\alpha$, u_α étant la composée de u_β. et de ce plongement. De plus on peut trouver une base hilbertienne (e_j) de E_α et une suite sommable (λ_j) telle que $(\lambda_j e_j)$ soit une base hilbertienne de E_β .

THÉORÈME. Pour qu'un E.L.C. E soit nucléaire il est :

<u>nécessaire</u> que pour tout $p > 0$ et tout voisinage de 0 disqué U on puisse trouver un voisinage V tel que la suite $d_n(V,U)$ soit de puissance $p^{\text{ème}}$ sommable ;

<u>suffisant</u> qu'il existe $p_0 > 0$ tel que pour tout voisinage U disqué de 0 on puisse trouver un soisinage V tel que la suite $d_n(V,U)$ soit de puissance $p_0^{\text{ème}}$ sommable.

(Nous abrégerons en $\forall p > 0$, (C_p) et $\exists p_0 > 0$, (C_{p_0}) ces conditions).

<u>1ère étape</u>. La condition suffisante entraîne la condition nécessaire a prior: plus forte.

Pour le démontrer, il suffit d'établir que $\forall p > 0$ $q > p/2$ $(C_p) \Rightarrow (C_q)$.

Or si $p < r < 2q$, d'après (C_p) et le lemme 2 pour tout U il existe V,W tels que

$$d_m(V,U) \leq A\, m^{-1/r}$$

$$d_n(W,V) \leq B\, n^{-1/r}$$

d'où en appliquant (g) avec $m = n$:

$$d_n(W,U) \leq C\, n^{-2/r} .$$

Le lemme 2 montre que (C_q) est impliquée par cette inégalité.

<u>2ème étape</u>. D'après les lemmes 2 et 3 la condition (C_{p_o}) est suffisante si $p_o < 1/3$. Mais alors elle est suffisante pour tout $p_o > 0$ d'après la première étape.

<u>3ème et dernière étape</u>. Il nous reste à démontrer pour une valeur quelconque de p_o , par exemple 1, que (C_{p_o}) est une condition nécessaire de nucléarité.

Soit E nucléaire et U l'image réciproque par u_α de la boule unité de E_α (notations du paragraphe "structure des espaces nucléaires"). β étant donné par la condition (ii) appelons V l'image réciproque par u de la boule unité de E_β . Alors nous aurons :

$$\sum d_n(V,U) < \infty$$

d'après la proposition 1.

(La bibliographie sera donnée à la fin du troisième exposé).

II

Comparaison avec l'ε-entropie

A un espace localement convexe, on associe diverses classes de suites et de fonctions à valeurs positives. Ces classes sont invariantes par les isomorphismes vectoriels topologiques.

La classe $\Gamma(E)$ est l'ensemble des suites (γ_n) possédant la propriété suivante :

pour tout voisinage disqué U de 0, il existe un voisinage V de 0 tel que :

$$\lim_{n \to \infty} \gamma_n \, d_n(V,U) = 0$$

Exemple. Soit pour tout entier $n > 0$ une suite $a^{(n)}$ et ce de façon que $\forall k$

$$0 < a_k^{(n)} \leq a_k^{(n+1)} .$$

Soit l'espace de Köthe

$$E = L_2(a^{(n)}) = \left\{ (x_k) \; ; \; \forall_n \, , \quad \sum_k \left| a_k^{(n)} x_k \right|^2 < \infty \right\}$$

muni de la topologie définie par la famille de normes dont cette définition affirme l'existence.

D'après la proposition 1 et la propriété $d($ de l'exposé I, $\Gamma(E)$ se caractérise de la façon que voici :

$$(\gamma_k) \in \Gamma(E) \iff \forall m, \exists n \quad \frac{\gamma_k \, a_k^{(m)}}{a_k^{(n)}} \underset{k \to \infty}{\to} 0 .$$

(On peut alors vérifier directement le critère de nucléarité de l'exposé précédent).

CAS PARTICULIER. Si :

$$a_k^{(n)} = (1 - \frac{1}{n})^{k^{1/\ell}}$$

E est isomorphe (par le développement de Taylor) à l'espace des fonctions analytiques sur un polydisque ouvert de $\underline{\underline{C}}^\ell$. A deux valeurs différentes de ℓ on voit qu'il correspond deux classes Γ différentes d'où :

PROPOSITION 1 (KOLMOGOROV [10]). Il n'existe pas d'isomorphisme vectoriel topologique entre les espaces de fonctions analytiques sur deux polydisques ouverts de dimensions différentes.

Remarque 1. En sens inverse EISENBERG et MITIAGIN [5] démontrent que les espaces de fonctions holomorphes sur deux domaines de Reinhardt bornés contenant l'origine sont isomorphes.

Remarque 2. La démonstration originale de Kolmogorov (cf. KOLMOGOROV et TIKHOMIROV [12], § 7) repose sur la comparaison des dimensions approchées (vide infra). Elle me semble plus compliquée.

Exemple 2. Soit s l'espace des suites à décroissance rapide. D'après l'exemple précédent $\Gamma(s)$ est l'espace des suites à croissance lente. On peut alors vérifier que :

$$(s \times \underline{\underline{R}}^N) = \Gamma(s)$$

d'où deux espaces nucléaires non isomorphes possédant même classe Γ .

Exemple 3. Si E est un espace normé de dimension infinie $\Gamma(E)$ est l'ensemble des suites tendant vers 0.

LES CONDITIONS DE NUCLÉARITÉ démontrées dans l'exposé I deviennent maintenant: condition suffisante : $\exists p_0 > 0$ tel que $(n^{p_0}) \in \Gamma(E)$;

condition nécessaire : $\forall p \qquad (n^p) \in \Gamma(E)$.

Remarque 3. A ma connaissance il n'est pas certain que Γ soit une fonction dimensionnelle au sens de KOLMOGOROV [11]. MITIAGIN [13] (proposition 7) démontre la condition α) de Kolmogorov pour les limites projectives d'espaces préhilbertiens et la condition β) pour les espaces tonnelés (ces conditions expriment respectivement que la classe croît par passage à un sous-espace et à l'image par une application linéaire continue).

Remarque 4. Dans un espace normé il est facile de voir qu'un ensemble borné est précompact si et seulement si la suite de ses $n^{\text{èmes}}$ diamètres tend vers 0. Il résulte de là que pour que $\Gamma(E)$ contienne des suites ne tendant pas vers 0, il est nécessaire que E soit un espace de Schwartz. Lorsque E est métrisable, on vérifie par diagonalisation que cette condition est aussi suffisante. Lorsque E est le dual d'un espace de Fréchet F, on montre

qu'il est nécessaire et suffisant que F soit de Schwartz.

DÉFINITION DE L'ε-ENTROPIE. A étant un sous-ensemble de l'espace normé E nous noterons $N(\varepsilon ; A)$ le plus petit nombre de boules de rayon ε permettant de recouvrir A :

$$N(\varepsilon ; A) = \inf \{n ; \exists x_1, \dots, x_n \ \forall x \in A, \ \exists j \ \|x - x_j\| \leq \varepsilon$$

On appelle ε-entropie de A le nombre :

$$H(\varepsilon ; A) = \operatorname{Log} N(\varepsilon ; A).$$

(Nous noterons $H(\varepsilon)$, $N(\varepsilon)$ quand il n'y aura pas de confusion à craindre).

L'ε-entropie de A exprime la quantité d'information nécessaire pour déterminer un élément de E à ε près, sachant a priori qu'il appartient à A (pour cet aspect de la question on pourra consulter, outre le petit ouvrage classique de SHANNON [15], KOLMOGOROV [8]).

Si maintenant E est un espace vectoriel, A et U deux sous-ensembles de E, U disqué et absorbant A, on appelle ε-entropie de A par rapport à U et on note :

$$H(\varepsilon ; A, U) = \mathrm{Log}\ (\varepsilon ; A, U)$$

l' ε-entropie de l'image de A dans E_U (notation rappelée dans l'exposé I, paragraphe : l'espace normé associé à un ensemble disqué).

Pour obtenir des évaluations d' ε-entropie il est commode d'introduire en plus de N et H le nombre :

$$M(\varepsilon) = M(\varepsilon ; A) = \sup \left\{ m ; \exists x_1, \dots, x_m \ \forall \ x_j \in A \ \forall j,k \right.$$
$$\left. \text{avec } j \neq k \ \| x_j - x_k \| > \varepsilon \right\}$$

(le nombre $\mathrm{Log}\ M(\varepsilon)$ est appelé ε-capacité).

On dispose alors des inégalités :

$$M(2\varepsilon) \leqslant N(\varepsilon) \leqslant M(\varepsilon).$$

<u>Exemple 4</u>. A est la boule unité d'un espace de Banach de dimension n, on a alors :

$$\varepsilon^{-n} \leqslant N(\varepsilon) \leqslant 2^n\ \varepsilon^{-n}$$

(considérer les volumes des boules de rayon ε recouvrant A et ceux des boules de rayon $\varepsilon/2$ centrés en des points écartés de ε).

<u>Exemple 5</u>. Dans $\underline{\underline{R}}^n$ soit

$$A = \left\{ (\xi_1, \dots, \xi_n) ; \sum_j \frac{|\xi_j|}{a_j} \leqslant 1 \right\}$$

A contient au moins $\varepsilon^{-n} \prod_1^n \frac{a_k}{k}$ points de la forme $\varepsilon(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ (ν_j entier) (considérer les volumes des cubes de côté 2ε centrés aux points en question). D'où :

$$M(\varepsilon ; A) \geqslant \varepsilon^{-n} \prod_1^n \frac{a_k}{k} .$$

Exemple 6. Dans un espace de Banach quelconque soient $x_1, \ldots, x_n$ des points tels que la distance de x_k au sous-espace engendré par $\{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ soit au moins a_k ; soit A l'enveloppe disquée de $\{x_1, \ldots, x_n\}$. En utilisant l'exemple précédent on retrouve la même inégalité.

INÉGALITÉS LIANT LE $n^{\text{ème}}$ DIAMÈTRE ET L'ε-ENTROPIE. Soit A un ensemble précompact dans un espace normé. Il faut s'attendre à ce que le nombre m tel que $d_n \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant m$ soit minoré par une expression dépendant de $N(\varepsilon)$. Mitiagin précise cette idée en utilisant l'exemple 4 ci-dessus. L'exemple 6 lui donne une inégalité en sens inverse. Pour exprimer son résultat on introduit les fonctions m et ℓ que voici :

$$m(t) = \sup \left\{ n ; d_n \geqslant t^{-1} \right\}$$
$$\ell(t) = \sup \left\{ n ; \frac{d_n}{n} \geqslant t^{-1} \right\}$$

PROPOSITION 2.

$$\int_0^{1/2\varepsilon} \ell(t) \frac{dt}{t} \leqslant H(\varepsilon) \leqslant m\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \operatorname{Log}\left(8 \frac{d_0 + \varepsilon}{\varepsilon}\right)$$

Nous poserons

$$\rho = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\operatorname{Log} H(\varepsilon)}{-\operatorname{Log} \varepsilon}$$

(et à l'occasion nous utiliserons la notation $\rho(V, U)$ définie grâce à l'image de V dans E_U).

COROLLAIRE 1. Si p est l'exposant de convergence de la suite (d_n) et si $\rho < 1$

$$\rho \leqslant p \leqslant \frac{\rho}{1-\rho}$$

COROLLAIRE 2. Pour que E soit nucléaire, il est :

nécessaire que pour tout $p > 0$ et tout voisinage de 0 disqué U on puisse trouver un voisinage V de 0 tel que $\rho(V, U) \leqslant p$;

suffisant que cette propriété soit vérifiée pour une certaine valeur $p_o > 0$.

Remarque 5. Pour l'ellipsoïde de l'exposé I, prop. 1, on a un résultat plus précis que la proposition 2.

DIMENSION APPROCHÉE. On appelle ainsi et on note $\psi(E)$ l'ensemble des fonctions ψ définies sur les réels strictement positifs et y prenant leurs valeurs qui possèdent la propriété suivante : pour tout voisinage disqué U de l'origine dans E, il existe un voisinage de l'origine V tel que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{N(\varepsilon ; V,U)}{\psi(\varepsilon)} = 0 .$$

On voit que le critère de nucléarité peut se mettre sous la forme :

$$\exp(\varepsilon^{-p}) \in \psi(E) .$$

La définition de la dimension approchée utilisée à l'origine par KOLMOGOROV [10] [11] (qui considérait essentiellement des espaces de Fréchet) est légèrement différente. L'équivalence résulte de la proposition que voici (annoncée en partie par ROLEWICZ [14] et en totalité par BESSAGA, PEŁCZINSKI, ROLEWICZ [2]).

PROPOSITION 3. Si E est un espace de Fréchet ou du type (DF) (en particulier si c'est le dual d'un espace de Fréchet), chacune des trois conditions suivantes est équivalente à $\psi \in \Psi(E)$:

a) Pour tout voisinage disqué U de 0, il en existe un autre V tel que $\forall \delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{N(\varepsilon ; V, \delta U)}{\psi(\varepsilon)} = 0 .$$

b) Pour tout voisinage disqué U de 0 et tout compact K, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\forall \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \quad N(\varepsilon ; K, U) < \psi(\varepsilon) .$$

c) Pour tout borné A on peut trouver un borné disqué B tel que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{N(\varepsilon ; A, B)}{\psi(\varepsilon)} = 0 .$$

b) est la condition utilisée à l'origine par Kolmogorov.

Les implications $\psi \in \Psi \Longleftrightarrow$ a), a) $\Longrightarrow$ b), c) $\Longrightarrow$ b) sont faciles et indépendantes de toute hypothèse sur E.

Nous allons esquisser une démonstration du fait que la négation de a) entraîne celle de b) dans le cas d'un espace métrisable.

On peut supposer ψ décroissante. En effet si on pose

$$\psi_*(\varepsilon) = \inf_{\eta < \varepsilon} \psi(\eta) .$$

$\psi \notin \Psi \Longrightarrow \psi_* \notin \Psi$ et ψ et ψ_* vérifient b) simultanément.

On peut aussi supposer que E n'est pas de dimension finie et que ψ majore toute puissance de ε (pour ε petit) car ce sera le cas si elle vérifie b).

En utilisant la relation :

$$N(\varepsilon \delta ; W, U) \leqslant N(\delta ; V, U) N(\varepsilon ; W, V)$$

on montre que si ψ ne vérifie pas a) on peut trouver une suite fondamentale décroissante de voisinages de l'origine, (U_n) tels que

$$\forall n > 1 \quad \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{N(\varepsilon ; U_n , U_1)}{\psi(\varepsilon)} = + \infty \quad .$$

Il existe donc une suite de nombres > 0 , ε_n tels que :

$$\forall n \qquad \varepsilon_n \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad N(\varepsilon_n ; U_n , U_1) \geq n\psi(\varepsilon_n) \ .$$

On remarque que

$$M(\varepsilon_n \ ; U_n U_1) = M(\varepsilon_n \ ; K_n , U_1)$$

où K_n est un sous-ensemble fini de U_n .

La réunion des ensembles K_n est relativement compacte (elle est formée d'une suite tendant vers 0). Soit $K = 2 \overline{\cup K_n}$. On a :

$$N(\varepsilon_n ; K, U) \geq M(\varepsilon_n ; K_n , U_1) \geq n \psi(\varepsilon_n)$$

c.q.f.d.

Remarque 6. Des résultats analogues à la proposition 3 mais un peu moins complets ont lieu pour la classe Γ . Leur énoncé serait plus long que le proposition 3 et sans doute fastidieux. (Signalons que l'énoncé de la proposition 9 de l'article de Mitiagin est à rectifier légèrement et que d'autre part un examen attentif des Studia Mathematica ne nous a pas permis de trouver l'article cité en référence).

III. SUR LES BASES DE QUELQUES ESPACES NUCLÉAIRES

Nous appellerons simplement base d'un E.L.C.E. une base de Schauder, c'est-à-dire une suite (x_k) telle que $\forall x \in E$, il existe une suite de nombres (c_k) unique vérifiant :

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$$

(série convergente mais pas nécessairement sommable).

Dans un espace de Fréchet (et nous n'en étudierons guère d'autre), il existe alors une suite (x'_k) du dual telle que

$$< x'_j , x_k > = \delta_{j,k} \quad .$$

Nous allons donner d'abord quelques résultats spéciaux à l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions indéfiniment dérivables sur $\underline{\underline{R}}$.

Rappelons d'abord l'isomorphisme des quatre espaces que voici :

$$s = \{\text{suites à décroissance rapide}\}$$

$$\mathcal{S} = \{\text{fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide}\}$$

$$\mathcal{E}_{[-1,1]} = \{\text{fonctions indéfiniment dérivables sur } [-1,1]\}$$

$$\mathcal{D}_{[-1,1]} = \{\text{fonctions } \in \mathcal{E}_{[-1,1]} \text{ nulles en } 1 \text{ et } -1 \text{ avec toutes leurs dérivées.}\}$$

(On a $\mathcal{S} \to s$ par le développement en fonctions de Hermite, $\mathcal{E}_{[-1,1]} \to s$ par le développement en polynomes de Tchebyshev,

$$\mathcal{S} \to \mathcal{D}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \quad \text{par} \quad \varphi \to \varphi \circ \mathrm{tg}).$$

PROPOSITION 1. Il existe un prolongement continu de $\mathcal{E}_{[-1,1]}$ à $\mathcal{E}$. Pour le construire on applique une construction particulière, due à Paneakh, d'une fonction ayant des dérivées données en un point. Cette construction permet de prolonger les polynômes de Tchebyshev de façon à conserver la convergence du développement d'une fonction différentiable.

COROLLAIRE 1. $\mathcal{E}$ est isomorphe à s^N.

COROLLAIRE 2. $\mathcal{E}$ possède une base.

Mitiagin utilise le critère de nucléarité que nous avons rapporté dans l'exposé I pour établir le résultat que voici :

PROPOSITION 2. Dans un espace de Fréchet nucléaire, toute base est absolue (c'est-à-dire que le développement d'un vecteur selon la base est absolument convergent).

COROLLAIRE 1. Soient E un espace de Fréchet nucléaire, (p_n) une suite croissante de semi-normes qui définit sa topologie, (x_k) une base de E. Il y a isomorphisme entre E et l'espace échelonné

$$L_1[(p_n(x_k))_k] = L_2[(p_n(x_k))_k]$$

(Par définition :

$$L_1[(p_n(x_k))_k] = \left\{(\xi_k) \ ; \ \forall n \ \sum_k p_n(x_k) \left|\xi_k\right| < \infty\right\}$$

l'isomorphisme entre L_1 et L_2 défini au début de l'exposé II résulte de la nucléarité).

COROLLAIRE 2. Tout espace de Fréchet nucléaire muni d'une base est isomorphe à un sous-espace de $\mathcal{E}$. (Il se déduit du précédent grâce à GROTHENDIECK [6] ch.II, p.67 et 68).

Ces résultats soulignent l'intérêt de la question suivante (classique pour les espaces de Banach séparables) :

Tout espace de Fréchet nucléaire possède-t-il une base ?

Une réponse positive entraînerait en particulier que tout espace nucléaire est un sous-espace d'un produit s^I ou encore $\mathcal{E}^I$. (GROTHENDIECK l.c. et p.136, "problème de décroissance rapide").

Nous allons encore signaler un résultat assez spécial, en raison de la difficulté qu'il présente. Mitiagin appelle centre d'une échelle de Riesz nucléaire un espace $L_1(a^{(n)})$ lorsque

$$a_k^{(n)} = b_k^{\mu_n}$$

où μ_n est une suite strictement croissante et si $\lim \mu_n = +\infty$, $\exists \alpha > 0$

$$\sum b_k^{-\alpha} < \infty \;;$$

si $\lim \mu_n < \infty$, $\forall \alpha > 0$

$$\sum b_k^{-\alpha} < \infty \;.$$

(Les raisons de cette appellation un peu compliquée sont développées longuement mais nous n'avons pas besoin de les connaître). Notons que la plupart des espaces de Fréchet les plus usuels en analyse sont de ce type.

Soient (x_k) et (y_k) deux bases d'un espace E. On dit qu'elles sont équivalentes si l'application $x_k \to y_k$ se prolonge en un isomorphisme de E sur lui-même. On dit qu'elles sont quasi-équivalentes si on peut les rendre équivalentes en faisant subir à l'une d'entre elles les deux opérations suivantes : permutation des éléments et produit de chacun d'eux par un scalaire non nul.

PROPOSITION 3. Dans le centre d'une échelle de Riesz nucléaire deux bases quelconques sont quasi-équivalentes.

La démonstration consiste en quinze pages d'inégalités. Il ne m'est pas possible d'en dégager les points essentiels, je me contenterai d'indiquer que toutes les hypothèses sont utilisées de façon répétée (précisons à tout hasard que la façon de rédiger de Mitiagin n'est pas en cause).

Additifs et rectifications

Pour l'exposé I, on trouvera une démonstration du lemme 1 dans TIKHOMIROV [17]. Cet article (plus accessible que le mémoire de Krasnoselski, Krein et Milman !) contient plusieurs évaluations précises de $n^{\text{ème}}$ diamètre.

Pour l'exposé II. En vertu de la structure des espaces nucléaires et de la proposition 1 de l'exposé I, si E est nucléaire, $(\gamma_n) \in \Gamma(E)$ équivaut à la propriété suivante :

Pour toute forme quadratique positive continue Q sur E, on peut en trouver une autre R telle qu'en posant :

$$U = \{x \ ; \ Q(x,x) \leqslant 1\} \quad ,$$
$$V = \{x \ ; \ R(x,x) \leqslant 1\} \quad ,$$

$\varpi_{V,U}$ soit une application compacte et en appelant (λ_n) la suite de ses valeurs propres rangées par ordre décroissant

$$\lim_{n \to \infty} \gamma_n \lambda_n = 0 \ .$$

Ainsi la classification des espaces nucléaires définie par Γ, coïncide avec celle qui est suggérée par GROTHENDIECK [6], ch.II p.64.

La proposition 3 est en défaut si E est de dimension finie et la proposition 2 suppose A disqué.

BIBLIOGRAPHIE

Rappelons que les revues soviétiques Doklady Ak Nauk et Uspekhi Mat Nauk traduites respectivement aux U.S.A. sous le titre "Soviet Mathematics : Doklady" et en Angleterre sous celui de "Progress of Mathematics", du moins en ce qui concerne les numéros assez récents.

[1] S. BANACH, Théorie des Opérations linéaires (Varsovie 1932).

[2] BESSAGA, PELCZYNSKI et ROLEWICZ, Approximative dimension of linear topological spaces and some of its applications (Studia Math série spéciale) Varsovie 1960, Reports of the conference on functional analysis.

[3] BESSAGA et PELCZYNSKI, On imbedding of nuclear spaces into the space of all infinitely differentiable functions defined on real axis Dokl. Ak Nauk 134 (1960) (en russe) p.745-748.

[4] M. DAY, Polygons circumscribed about closed convex curves Trans.Am. Math. Soc. 62(1947) p.315-319.

[5] EISENBERG et MITIAGIN, Espaces de fonctions analytiques sur un domaine de Reinhardt. Sibirski Math. Jurn. I (1960), p.153-170.

[6] A. GROTHENDIECK, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Memoirs ann. Math. Soc. n°16.

[7] KRASNOSELSKI, KREIN et MILMAN, Sur l'indice de défaut des opérateurs linéaires dans un espace de Banach et sur quelques questions géométriques, Recueil des travaux de l'Inst. Math. de l'Ac. Sc. de la R.S.S. d'Ukraine 11 (1948) p.97-112 (en russe).

[8] A.N. KOLMOGOROV, Theory of transmission of information. Trans. Am. Math. Soc. 2e série, vol.33 p.291-322.

[9] A.N. KOLMOGOROV, Uber die beste Annäherang von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse, Ann. of Math. 37 (1936) p.107-111.

[10] A.N. KOLMOGOROV, Sur la dimension linéaire des espaces vectoriels topologiques. Dokl. Ak. Nauk 120 (1958) p.239-241 (en russe).

[11] A.N. KOLMOGOROV, Dimension linéaire des espaces vectoriels topologiques, Séminaire Bourbaki, mai 1958 (exp. 165).

[12] KOLMOGOROV et TIKHOMIROV, ε-entropie et ε-capacité d'ensembles dans les espaces fonctionnels Uspekhi Math. Nauk 14 (1959) p.3-86.

[13] B.S. MITIAGIN, Dimension approchée et bases dans les espaces nucléaires, Uspeki Math. Nauk 16 (1961) p.63-132.

[14] S. ROLEWICZ, Remark on linear metric Montel spaces, Bull. Ac. Pol. Sc. (série Math.) 7 (1959) p.195-197.

[15] C. SHANNON, A mathematical theory of communication (Univ. of Illinois Press, 1962).

[16] A. TAYLOR, A geometric theorem and its application to biorthogonal system Bull. Am. Math. Soc. 53(1947) p.614-616.

[17] V.M. TIKHOMIROV, Diamètres d'ensembles dans les espaces fonctionnels et théorie de la meilleure approximation. Uspekhi Math. Nauk 15 (1960), p.81-120 (en russe).