Séminaire Henri Cartan

Gérard Schiffmann

Invariance par cobordisme de l'indice analytique

Séminaire Henri Cartan, tome 16, nº 2 (1963-1964), exp. nº 23, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_2_A8_0>

Séminaire CARTAN-SCHWARTZ
16e année, 1963/64, n° 23

8 et 15 juin 1964

INVARIANCE PAR COBORDISME DE L'INDICE ANALYTIQUE

par Gérard SCHIFFMANN

Soit X une variété différentiable réelle, sans bord, compacte, orientée et de dimension paire. Avec les notations des exposés précédents, on sait que l'indice analytique est une application i_a :

$$i_a : K(B(X) , S(X)) \otimes Q \to Q .$$

D'autre part, $K(B(X) , S(X)) \otimes Q$ est un module libre sur $K(X) \otimes Q$, et on a exhibé un générateur canonique. On peut donc considérer l'indice analytique comme une application j_a :

$$j_a : K(X) \otimes Q \to Q .$$

Soit V un fibré vectoriel complexe sur X ; il définit un élément de $K(X) \otimes Q$, et on notera $\gamma(X , V)$ la valeur de j_a sur cet élément.

Rappelons que, par définition, (X , V) est un bord, s'il existe un couple (Y , W) , Y variété différentiable réelle, à bord, compacte, orientée, W fibré vectoriel complexe sur Y , tel que X soit le bord de Y et V la restriction de W à X .

Le but de cet exposé est d'établir le résultat suivant :

THÉORÈME. - Si (X , V) est un bord, alors $\gamma(X , V) = 0$.

1. Définition des opérateurs D_o et $\tilde{D}_o$.

On va définir un opérateur différentiel elliptique dont l'indice analytique sera égal à $\gamma(X , V)$.

1.1. Quelques calculs ponctuels.

- Soit E un espace vectoriel réel, de dimension finie n , orienté et muni d'une structure euclidienne. Le produit scalaire sera noté : $\langle . , . \rangle$. Ce produit scalaire se prolonge à l'algèbre extérieure ΛE , et on l'étend $\underset{\sim}{C}$-linéairement à $\Lambda_{\underset{\sim}{C}} E$, complexifiée de ΛE ; sur $\Lambda_{\underset{\sim}{C}} E$, on définit une structure hermitienne complexe à l'aide du produit scalaire hermitien $(.|.)$ défini par

α_E est l'application linéaire de $\Lambda_{\underset{\sim}{C}} E$ dans elle-même, définie à partir de l'opérateur $\star$ de de Rham par les formules :

$$\alpha_{E|\Lambda^p_{\underset{\sim}{C}} E} = \begin{cases} i^{p(p+1)-r} \star_{|\Lambda^p_{\underset{\sim}{C}} E} & \text{si } n = 2r . \\ i^{p(p+1)-r-1} \star_{|\Lambda^p_{\underset{\sim}{C}} E} & \text{si } n = 2r+1 . \end{cases}$$

Cet opérateur a pour carré l'identité, ce qui donne une décomposition :

$$\Lambda_{\underset{\sim}{C}} E = \Lambda^+_{\underset{\sim}{C}} E \oplus \Lambda^-_{\underset{\sim}{C}} E .$$

Le produit intérieur droit $\llcorner$ est défini par

$$(a \llcorner b \mid c) = (a \mid \overline{b} \wedge c) .$$

Si ξ est un élément de $E_{\underset{\sim}{C}} = E \otimes_{\underset{\sim}{R}} \underset{\sim}{C}$, on pose

$$u_\xi(a) = \xi \wedge a + a \llcorner \xi .$$

u_ξ est une application linéaire de $\Lambda_{\underset{\sim}{C}} E$ dans elle-même et elle dépend $\underset{\sim}{C}$-linéairement de ξ.

LEMME.

1° Soit $e_1, e_2, \ldots, e_n$ une base orthonormale orientée de E.

– Si n est pair, $n = 2r$,

$$\alpha_E = i^{-r} u_{e_1} u_{e_2} \ldots u_{e_n} .$$

– Si n est impair, $n = 2r+1$,

$$\alpha_E = \begin{cases} +i^{-r-1} u_{e_1} u_{e_2} \ldots u_{e_n} & \text{pour les éléments de degré pair.} \\ -i^{-r-1} u_{e_1} u_{e_2} \ldots u_{e_n} & \text{pour les éléments de degré impair.} \end{cases}$$

2° Si ξ appartient à $E_{\underset{\sim}{C}}$, u_ξ^2 est l'homothétie de rapport $\langle \xi , \xi \rangle$.

3° Si ξ et η appartiennent à $E_{\underset{\sim}{C}}$ et si $\langle \xi , \eta \rangle = 0$, alors $u_\xi u_\eta = -u_\eta u_\xi$.

4° Si ξ appartient à $E_{\underset{\sim}{C}}$, u_ξ et $u_{\overline{\xi}}$ sont adjoints.

5° Si ξ appartient à $E_{\underset{\sim}{C}}$, $u_\xi \alpha_E = -\alpha_E u_\xi$.

La démonstration est laissée au lecteur. Remarquons d'ailleurs que ces calculs, ainsi que ceux qui suivent, sont en fait des calculs d'algèbre de Clifford. 5° entraîne que u_ξ échange les sous-espaces propres de α_E. On notera u_ξ^+ (resp. u_ξ^-) la restriction de u_ξ à $\Lambda_{\mathbb{C}}^+ E$ (resp. $\Lambda_{\mathbb{C}}^- E$).

1.2. Définition de D_0. – Soient X une variété différentiable réelle, sans bord, compacte, orientée et V un fibré vectoriel complexe sur X. On munit X d'une structure riemannienne, et, en tout point x de X, on applique 1.1 avec $E = T_x^*(X)$, espace cotangent à X au point x. On obtient ainsi une décomposition:

$$\Lambda_{\mathbb{C}} T^*(X) \otimes V = (\Lambda_{\mathbb{C}}^+ T^*(X) \otimes V) \oplus (\Lambda_{\mathbb{C}}^- T^*(X) \otimes V) .$$

D_0 est l'un quelconque des opérateurs différentiels :

$$D_0 : \mathcal{Q}(\Lambda_{\mathbb{C}}^+ T^*(X) \otimes V) \to \mathcal{Q}(\Lambda_{\mathbb{C}}^- T^*(X) \otimes V) ,$$

dont le symbole est

$$\sigma_{D_0}(x ; \xi) = u_\xi^+ \otimes I_x ,$$

où I_x est l'application identique de V_x.

D_0 est un opérateur elliptique (1.1, lemme 2) du premier ordre, et on sait, d'après les exposés 16 et 17, que l'indice analytique de D_0 est $\gamma(X , V)$. Supposons de plus X de dimension paire, on doit montrer que l'indice analytique de D_0 est nul chaque fois que (X , V) est un bord. On va utiliser cette dernière hypothèse pour remplacer D_0 par un autre opérateur elliptique $\tilde{D}_0$ ayant même indice.

1.3. D'autres calculs ponctuels. – On reprend la situation de 1.1 en supposant de plus E de dimension impaire $2r + 1$. Soient F un sous-espace vectoriel de E, de codimension 1 et ν un vecteur unitaire orthogonal à F ; F est muni de la structure euclidienne induite, et on l'oriente de la manière suivante : Si $(-\nu)$, e_1, e_2, ..., e_{2r} est une base orthonormale orientée de E, alors e_1, e_2, ..., e_{2r} est une base orthonormale orientée de F, (orientation "bord", ν normale intérieure). On considère $\Lambda_{\mathbb{C}} F$ comme plongée dans $\Lambda_{\mathbb{C}} E$.

Soit ξ un élément de $F_{\mathbb{C}} = F \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$; il définit deux applications :

$$u_{1,\xi} : \Lambda_{\mathbb{C}} F \to \Lambda_{\mathbb{C}} F ,$$

$$u_{2,\xi} : \Lambda_{\mathbb{C}} E \to \Lambda_{\mathbb{C}} E .$$

Il est immédiat que la restriction de $u_{2,\xi}$ à $\Lambda_{\mathbb{C}} F$ est $u_{1,\xi}$; par la suite, aucune confusion n'étant à craindre, on supprimera les indices 1 et 2.

D'autre part, α_F est une application linéaire de $\Lambda_{\underset{\sim}{C}} F$ sur elle-même. On va la prolonger à $\Lambda_{\underset{\sim}{C}} E$. Pour cela remarquons que, d'après la première partie du lemme de 1.1,

$$\alpha_F = \mp i\, u_\nu\, \alpha_{E|\Lambda_{\underset{\sim}{C}} F} \quad \begin{cases} - & \text{pour les éléments de degré pair ;} \\ + & \text{pour les éléments de degré impair.} \end{cases}$$

On définit donc un prolongement $\tilde{\alpha}_F$ de α_F à $\Lambda_{\underset{\sim}{C}} E$ en posant :

$$\tilde{\alpha}_F = \mp i\, u_\nu\, \alpha_E \quad \begin{cases} - & \text{pour les éléments de degré pair ;} \\ + & \text{pour les éléments de degré impair.} \end{cases}$$

Remarquons que $\tilde{\alpha}_F$ ne change pas la parité, mais que α_E la change.

Soit $\Lambda^o_{\underset{\sim}{C}} E$ la sous-algèbre de $\Lambda_{\underset{\sim}{C}} E$, formée des éléments de degré pair.

<u>Définition</u>. - Soit f l'application linéaire de $\Lambda_{\underset{\sim}{C}} F$ dans $\Lambda^o_{\underset{\sim}{C}} E$ définie par :

$$f(a) = \begin{cases} a & \text{si } a \text{ est de degré pair ;} \\ a \wedge \nu & \text{si } a \text{ est de degré impair.} \end{cases}$$

Il est clair que f est une bijection. On va transporter par f les différents opérateurs définis sur $\Lambda_{\underset{\sim}{C}} F$.

Transportons α_F ; il faut calculer $f \circ \alpha_F \circ f^{-1}$; on trouve :

$$f \circ \alpha_F \circ f^{-1} = \tilde{\alpha}_{F|\Lambda^o_{\underset{\sim}{C}} E} .$$

On notera $\tilde{\alpha}^o_F$ cette restriction ; son carré est l'identité, de sorte qu'on a une décomposition

$$\Lambda^o_{\underset{\sim}{C}} E = \Lambda^{o+}_{\underset{\sim}{C}} E \oplus \Lambda^{o-}_{\underset{\sim}{C}} E .$$

Transportons u_ξ, ξ appartenant à $F_{\underset{\sim}{C}}$; il faut calculer $f \circ u_\xi \circ f^{-1}$; soit a un élément de degré pair de $\Lambda_{\underset{\sim}{C}} E$ et b un élément de degré impair, on trouve :

$$f \circ u_\xi \circ f^{-1}(a + b \wedge \nu) = u_\xi\, u_\nu(a + \nu \wedge b) .$$

Ce changement de $b \wedge \nu$ en $\nu \wedge b$ étant gênant pour la suite, on l'élimine de la manière suivante :

Soit ε l'application linéaire de $\Lambda^o_{\underset{\sim}{C}} E$ sur elle-même définie par

$$\varepsilon(a + b \wedge \nu) = a + \nu \wedge b .$$

C'est une bijection, ayant pour carré l'identité, et qui commute avec $\tilde{\alpha}_F^o$.

<u>Définition</u>. - $\tilde{u}_\xi = f \circ u_\xi \circ f^{-1} \circ \varepsilon$.

On a donc :

$$\tilde{u}_\xi = u_\xi \, u_{\nu|\Lambda^o_{\underset{\sim}{C}} E} \, .$$

$\tilde{u}_\xi$ permute les sous-espaces propres de $\tilde{\alpha}_F$. On notera $\tilde{u}_\xi^+$ (resp. $\tilde{u}_\xi^-$) la restriction de $\tilde{u}_\xi$ à $\Lambda^{o+}_{\underset{\sim}{C}} E$ (resp. $\Lambda^{o-}_{\underset{\sim}{C}} E$).

1.4. <u>Définition de</u> $\tilde{D}_o$. - Soit X (resp. Y) une variété différentiable réelle, sans bord (resp. avec bord), compacte, orientée, de dimension paire (resp. impaire) $2r$ (resp. $2r+1$). Soit V (resp. W) un fibré vectoriel complexe sur X (resp. Y). On suppose de plus que X est le bord de Y, et V la restriction de W à X.

On munit Y d'une structure riemannienne, et X de la structure induite. On identifie le fibré tangent avec le fibré cotangent.

En tout point x de X, on peut appliquer les résultats de 1.3 avec : $E = T_x^*(Y)$, espace cotangent à Y au point x, $F = T_x^*(X)$, espace cotangent à X au point x et en prenant pour ν la normale intérieure.

On obtient ainsi :

- un isomorphisme : $\Lambda_{\underset{\sim}{C}} T^*(X) \otimes V \to \Lambda^o_{\underset{\sim}{C}} T^*(Y)_{|X} \otimes V$,
- une décomposition : $\Lambda^o_{\underset{\sim}{C}} T^*(Y)_{|X} \otimes V = (\Lambda^{o+}_{\underset{\sim}{C}} T^*(Y)_{|X} \otimes V) \oplus (\Lambda^{o-}_{\underset{\sim}{C}} T^*(Y)_{|X} \otimes V)$.

Par définition, $\tilde{D}_o$ sera l'un quelconque des opérateurs différentiels

$$\tilde{D}_o : \mathcal{Q}(\Lambda^{o+}_{\underset{\sim}{C}} T^*(Y)_{|X} \otimes V) \to \mathcal{Q}(\Lambda^{o-}_{\underset{\sim}{C}} T^*(Y)_{|X} \otimes V) ,$$

dont le symbole est

$$\sigma_{\tilde{D}_o}(x ; \xi) = \tilde{u}_\xi^+ \otimes I_x \, .$$

$\tilde{D}_o$ est un opérateur différentiel elliptique du premier ordre et son indice est égal à l'indice de D_o car l'introduction de ε ne modifie pas l'indice.

Il faut montrer que l'indice de $\tilde{D}_o$ est nul. On va définir deux problèmes aux limites elliptiques sur Y. On montrera que l'indice de $\tilde{D}_o$ est égal à la différence des indices de ces deux problèmes, et enfin on établira que ces deux problèmes sont d'indice nul ce qui achèvera la démonstration.

2. Définition des problèmes aux limites (L , B^+) et (L , B^-) .

La définition générale des problèmes aux limites elliptiques est supposée connue.

2.1. Définition de L . - On conserve les notations du § 1 ; en particulier, si y est un point de Y , on peut appliquer 1.1 avec $E = T_y^*(Y)$. Soient $\Lambda_{\underset{\sim}{C}}^{o} T_y^*(Y)$ l'espace vectoriel des éléments d'ordre pair de $\Lambda_{\underset{\sim}{C}} T_y^*(Y)$ et $\Lambda_{\underset{\sim}{C}}^{o} T^*(Y)$ le $\widetilde{\text{fibré}}$ correspondant.

L est l'un quelconque des opérateurs différentiels :

$$L : \mathcal{D}(\Lambda_{\underset{\sim}{C}}^{o} T^*(Y) \otimes W) \to \mathcal{D}(\Lambda_{\underset{\sim}{C}}^{o} T^*(Y) \otimes W)$$

dont le symbole est

$$\sigma_L(y , \xi) = - i\, u_\xi\, \alpha_E^o \otimes I_y ,$$

où α_E^o est la restriction de α_E à $\Lambda_{\underset{\sim}{C}}^{o} T_y^*(Y)$ et où I_y est l'application identique de W_y . L est un opérateur différentiel du premier ordre elliptique (u_ξ est bijectif pour ξ réel non nul). Son symbole possède au bord certaines propriétés remarquables : soit x un point de X ; utilisons les notations de 1.3 et de 1.4 ($E = T_x^*(Y)$, $F = T_x^*(X)$ et ν normale intérieure au point x). On a

$$\sigma_L(x , \nu) = - i\, u_\nu\, \alpha_E^o = \tilde{\alpha}_F .$$

La décomposition de $\Lambda_{\underset{\sim}{C}}^{o} E \otimes V_x$ est donc la décomposition en les deux sous-espaces propres de $\sigma_L(x , \nu)$. D'autre part, soit η un vecteur cotangent à X au point x .

$$\sigma_L(x , \eta) = - i\, u_\eta\, \alpha_E^o = - i\, u_\eta\, u_\nu\, u_\nu\, \alpha_E^o = u_\eta\, u_\nu\, \tilde{\alpha}_F .$$

Il en résulte que

$$\sigma_L(x , \eta)_{|\Lambda_{\underset{\sim}{C}}^{o\pm} E\otimes V_x} = \pm\, u_\eta\, u_{\nu | \Lambda_{\underset{\sim}{C}}^{o\pm} E\otimes V_x} .$$

En désignant par $\sigma_L(x , \eta)^{\pm}$ les restrictions de $\sigma_L(x , \eta)$ à $\Lambda_{\underset{\sim}{C}}^{o\pm} E \otimes V_x$, on a donc

$$\sigma_L(x , \eta)^+ = \sigma_{\tilde{D}_o}(x , \eta) .$$

Par ailleurs, munissons W d'une structure hermitienne quelconque. Il est facile de voir que le symbole de L est auto-adjoint.

2.2. <u>Définition de</u> $B^{\pm}$. – En tout point x de X, on a une décomposition

$$\Lambda^{0}_{\underset{\sim}{C}} T^{*}_{x}(Y) \otimes V_{x} = (\Lambda^{0+}_{\underset{\sim}{C}} T^{*}_{x}(Y) \otimes V_{x}) \oplus (\Lambda^{0-}_{\underset{\sim}{C}} T^{*}_{x}(Y) \otimes V_{x}) .$$

Soient $B^{\pm}_{x}$ les deux projections correspondantes.

Si f est une section de $\Lambda^{0}_{\underset{\sim}{C}} T^{*}(Y) \otimes W$, définissons $f^{\pm}_{|X}$ par $f^{\pm}_{|X}(x) = B^{\pm}_{x}(f(x))$. $B^{\pm}$ sont les deux opérateurs différentiels d'ordre 0 définis par $B^{\pm}(f) = f^{\pm}_{|X}$.

2.3. <u>Ellipticité de</u> $(L , B^{\pm})$. – On sait déjà que L est elliptique. Il reste à vérifier la condition au bord. Soient toujours x un point de X et η un vecteur cotangent à X au point x ; supposons de plus η de longueur 1. Considérons le système différentiel à coefficients constants

$$\sigma_{L}(x \,;\, \eta + \frac{\nu}{2i\pi}\frac{d}{dt})\, f(t) = 0 , \qquad t \geqslant 0 ,$$

$$\sigma_{B}(x \,;\, \eta + \frac{\nu}{2i\pi}\frac{d}{dt})\, f(0) = a , \qquad a \in \Lambda^{0\pm}_{\underset{\sim}{C}} T^{*}_{x}(Y) \otimes V_{x} ,$$

f étant une application de R^{+} dans $\Lambda^{0}_{\underset{\sim}{C}} T^{*}_{x}(Y) \otimes V_{x}$. La condition au bord est la suivante : "Quel que soit a le système précédent admet une solution tempérée et une seule". En utilisant la théorie classique des systèmes différentiels, cette condition peut s'exprimer algébriquement ; considérons les nombres complexes λ tels que

$$\operatorname{Det} \sigma_{L}(x \,;\, \eta + \lambda\nu) = 0 ,$$

L étant elliptique, ils ne sont pas réels et, en séparant les λ à partie imaginaire positive des λ à partie imaginaire négative, on obtient, à partir de la décomposition de Jordan, une décomposition

$$\Lambda^{0}_{\underset{\sim}{C}} T^{*}_{x}(Y) \otimes V_{x} = M^{+}_{\eta} \oplus M^{-}_{\eta} .$$

La décomposition devient

$$M^{+}_{\eta} \cap \operatorname{Ker} B^{\pm}_{x} = (0) .$$

Vérifions cette condition. Les λ sont solutions de

$$\operatorname{Det}(- i\, u_{\eta+\lambda\nu}\, \alpha^{0}_{E} \otimes I_{x}) = 0 .$$

En fait, on doit avoir

$$\operatorname{Det} u_{\eta+\lambda\nu} = 0 .$$

Or $u^2_{\eta+\lambda\nu}$ est la multiplication par $\langle \eta + \lambda\nu , \eta + \lambda\nu \rangle$, et comme η et ν sont de longueur 1 , on en déduit que $\lambda = \pm i$. Par ailleurs, on vérifie qu'on est dans le cas diagonalisable, c'est-à-dire que

$$M^{\pm}_{\eta} = \mathrm{Ker}\ \sigma_L(x ; \eta \pm i\nu) .$$

Soit a un élément de $M^{+}_{\eta} \cap \mathrm{Ker}\ B^{\pm}_{x}$. On a

$$\sigma_L(x ; \eta + i\nu)a = \sigma_L(x ; \eta)a + i\ \sigma_L(x ; \nu)a = 0 ,$$

ou encore

$$\sigma_L(x ; \eta)a = - i\ \sigma_L(x ; \nu)a = \mp ia .$$

Le noyau de $B^{\pm}_{x}$ étant $\Lambda^{o\mp}_{\underset{\sim}{C}} T^{*}_{x}(Y) \otimes V_x$, on en déduit que $a = 0$, puisque que $\sigma_L(x ; \eta)$ opère de $\Lambda^{o\mp}_{\underset{\sim}{C}} T^{*}_{x}(Y) \otimes V_x$ dans $\Lambda^{o\pm}_{\underset{\sim}{C}} T^{*}_{x}(Y) \otimes V_x$.

3. Relations entre les indices de $(L , B^{\pm})$ et de $\tilde{D}_o$.

Pour simplifier les notations, on posera désormais

$$- \ G = \Lambda^{o}_{\underset{\sim}{C}}\ T^{*}(Y) \otimes W ,$$

$$- \ G^{\pm}_{|X} = \Lambda^{o\pm}_{\underset{\sim}{C}}\ T^{*}(Y)_{|X} \otimes V .$$

Les autres notations sont conservées.

3.1. Application des résultats d'AGRONOVIČ et DYNIN. -

$(L , B^{\pm})$ définissent des applications :

$$(L , B^{\pm}) : \mathcal{D}(G) \to \mathcal{D}(G) \oplus \mathcal{D}(G^{\pm}_{|X}) .$$

Ces problèmes étant elliptiques, ces applications ont des indices notés $i_a(L , B^{\pm})$.

On va montrer que

$$- \ i_a(\tilde{D}_o) = i_a(L , B^{+}) - i_a(L , B^{-}) .$$

Pour tout couple (x , η) , x point de X et η vecteur cotangent à X au point x de longueur 1 , posons :

$$\sigma(x , \eta) = (B^{-}_{|M^{+}_{\eta}}) \circ (B^{+}_{|M^{+}_{\eta}})^{-1} .$$

La condition d'ellipticité montre que cette expression a un sens et définit une bijection de G_x^+ sur G_x^-. De plus, $\sigma(x , \eta)$ dépend différentiablement de (x ,η). Soit S l'un quelconque des opérateurs de Caldéron-Zygmund :

$$S : \mathcal{D}(G^+_{|X}) \to \mathcal{D}(G^-_{|X})$$

d'ordre 0 et dont le symbole est

$$\sigma_S(x , \eta) = \sigma(x , \eta) .$$

S est elliptique, donc a un indice analytique qu'on notera $i_a(S)$. Le théorème 2 de [1] affirme que

$$- i_a(S) = i_a(L , B^+) - i_a(L , B^-) .$$

<u>Principe de la démonstration</u>. – Considérons le problème aux limites :

$$(L , SB^+) : \mathcal{D}(G) \to \mathcal{D}(G) \oplus \mathcal{D}(G^-_{|X}) .$$

Ce n'est pas un problème aux limites au sens usuel puisque la condition au bord n'est pas un opérateur différentiel. AGRONOVIČ et DYNIN considèrent des problèmes aux limites du type (d , b), où d est un opérateur différentiel, mais où la condition au bord b est un "opérateur différentiel à coefficients opérateurs de Caldéron-Zygmund <u>sur le bord</u>" (un tel opérateur se définit localement de manière évidente et le théorème d'invariance par difféomorphisme permet de le définir globalement). Pour de tels problèmes, la condition d'ellipticité garde un sens, et AGRONOVIČ et DYNIN montrent que la théorie classique des problèmes aux limites elliptiques reste valable. En particulier, il y a encore un indice analytique qui ne dépend que du symbole et qui est invariant par homotopie sur ce dernier.

Dans notre cas, posons

$$P_u = (L , (1 - u)SB^+ + uB^-) , \qquad u \in [0 , 1] .$$

La condition d'ellipticité est

$$M^+_\eta \cap \operatorname{Ker}((1 - u) \sigma_S(x , \eta)B^+_x + uB^-_x) = (0) .$$

Elle est trivialement satisfaite. On a donc

$$i_a(P_o) = i_a(P_1) .$$

Comme $i_a(L , SB^+) = i_a(L , B^+) + i_a(S)$, on en déduit la relation cherchée. Pour terminer, il faut montrer que S et $\widetilde{D}_o$ ont même indice.

Calculons $\sigma_S(x , \eta)$. Soit m un élément de M^+_η ; m se décompose : $m = m^+ + m^-$. Par définition de M^+ ,

$$\sigma_L(x , \eta + i\nu) m = 0 .$$

En projetant sur G^-_x , on en tire

$$m^- = - i \sigma_L(x , \eta) m^+ .$$

D'où

$$\sigma_S(x , \eta) = - i \sigma_L(x , \eta)^+ = - i \sigma_{\widetilde{D}_o}(x , \eta) \qquad (\langle \eta , \eta \rangle = 1) .$$

L'indice ne dépend pas de l'ordre, et la multiplication par $- i$ ne le change pas, donc

$$i_a(S) = i_a(\widetilde{D}_o) .$$

3.2. Variante. - En suivant une suggestion d'ATIYAH, on va établir, sans utiliser les opérateurs de Caldéron-Zygmund, la relation

$$i_a(\widetilde{D}_o) = - 2 i_a(L , B^+) .$$

Composition des problèmes aux limites elliptiques. - Soient

$$(d_1 , b_1) : \mathcal{O}(E_1) \to \mathcal{O}(F_1) \oplus \mathcal{O}(G_1)$$

$$(d_2 , b_2) : \mathcal{O}(F_1) \to \mathcal{O}(F_2) \oplus \mathcal{O}(G_2)$$

deux problèmes aux limites elliptiques (E_1 , F_1 , F_2 fibrés sur Y , G_1 et G_2 fibrés sur X). On leur associe le problème aux limites, avec deux conditions au bord,

$$(d_2 , b_2)(d_1 , b_1) = (d_2 d_1 , b_1 \oplus b_2 d_1) : \mathcal{O}(E_1) \to \mathcal{O}(F_2) \oplus (\mathcal{O}(G_1) \oplus \mathcal{O}(G_2)) .$$

Il est immédiat (car on a une composition de 2 opérateurs) que ce problème est elliptique et que son indice est la somme des indices de (d_1 , b_1) et de (d_2 , b_2).

Dans notre cas, formons le problème

$$(L , B^+)(L , \widetilde{D}_o B^+) = (L^2 , \widetilde{D}_o B^+ \oplus B^+ L) : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G) \oplus \mathcal{O}(G^+_{|X}) \oplus \mathcal{O}(G^-_{|X}) .$$

On va montrer que son indice est nul, ce qui établira la relation annoncée. Posons $b = D_o B^+ \oplus B^+ L$; son symbole est :

$$\sigma_b(x ; \eta + \lambda\nu) = \sigma_L(x ; \eta) B^+_x \oplus (B^+_x \sigma_L(x ; \eta) + \lambda B^+_x) .$$

La condition d'ellipticité est que la matrice

$$\begin{pmatrix} i\, I_x^+ & \sigma_L(x\,;\,\eta)^- \\ \sigma_L(x\,;\,\eta)^+ & 0 \end{pmatrix}$$

soit non singulière, ce qui est bien le cas. Modifions les conditions au bord b en introduisant, pour tout u appartenant à $[0\,,\,1]$, des conditions au bord b_u telles que

$$\sigma_{b_u}(x\,;\,\eta + \lambda\nu) = \sigma_L(x\,;\,\eta) B_x^+ \oplus (B_x^+ \sigma_L(x\,;\,\eta) + \lambda\, u\, B_x^+)\ .$$

Les problèmes $(L^2\,,\,b_u)$ sont elliptiques de sorte que, par homotopie, on est ramené à démontrer que $(L^2\,,\,b_o)$ est d'indice nul. Or, b_o peut être considéré comme un opérateur différentiel elliptique unique opérant de $\mathcal{D}(G_{|X})$ dans lui-même et de plus le problème $(L^2\,,\,I)$, I étant la restriction à X, est elliptique. Il résulte trivialement de la définition de l'indice que

$$i_a(L^2\,,\,b_o) = i_a(L^2\,,\,I) + i_a(b_o)\ .$$

Il suffit donc de démontrer que

$$i_a(L^2\,,\,I) = i_a(b_o) = 0\ ,$$

ce qui sera fait dans le paragraphe suivant.

4. Nullité des indices de $(L\,,\,B^{\pm})$, b_o et de $(L^2\,,\,I)$.

4.1. La formule de Green. - Pour simplifier, on se limite au cas dont nous avons besoin, c'est-à-dire à celui d'une variété Y, compacte, orientée, riemannienne de bord X. Soit ω_Y (resp. ω_X) l'élément de volume canonique de Y (resp. de X).

Soient E un fibré vectoriel complexe sur Y et E^* son fibré dual. $\mathcal{D}'(E)$ est le dual fort de $\mathcal{D}(E^*)$, et on sait que $\mathcal{D}(E)$ se plonge canoniquement dans $\mathcal{D}'(E)$.

Soient de même F un second fibré vectoriel complexe sur Y et d un opérateur différentiel :

$$d : \mathcal{D}(E) \to \mathcal{D}(F)\ .$$

On peut considérer que d opère de $\mathcal{D}(E)$ dans $\mathcal{D}'(F)$ et, en transposant, on obtient un opérateur d^t

$$d^t : \mathcal{D}(F^*) \to \mathcal{D}'(E^*)\ .$$

Si le bord de Y est non vide, d^t n'est pas, en général, un opérateur différentiel. En fait, si g est une section de F^*, $d^t g$ est la somme d'une fonction, c'est-à-dire d'une section de E, et d'une distribution de support le bord de Y. D'une manière plus précise :

LEMME. Il existe un opérateur différentiel et un seul $d^{\#}$.

$$d^{\#} : \mathcal{D}(F^*) \to \mathcal{D}(E^*)$$

tel que : quelle que soit la section f de E et quelle que soit la section g de F^*, à support $\subset Y - X$, la forme différentielle $(\langle df , g\rangle - \langle f , d^{\#} g\rangle)\omega_Y$ ait une intégrale nulle. De plus, $d^{\#}$ est de même ordre que d et son symbole est le transformé par $\xi \to -\xi$ du transposé du symbole de d.

Le lemme s'établit en localisant et en "intégrant par parties". Si on suppose de plus E et F hermitiens, ces résultats se formulent comme suit :

Il existe un opérateur différentiel unique d^* tel que, pour toute section f de E et toute section g de F à support dans $Y - X$, $((df|g) - (f|d^* g))\omega_Y$ ait une intégrale nulle. Le symbole de d^* est l'adjoint du symbole de d. On dit que d^* est l'adjoint formel de d. Par ailleurs, si $E = F$, et si le symbole de d est auto-adjoint, on peut, en modifiant les termes d'ordre inférieur, supposer que $d = d^*$ (opérateur auto-adjoint). Dans le cas général, en intégrant, on obtient une formule du type

$$\int_Y (df|g)\,\omega_Y - \int_Y (f|d^* g)\,\omega_Y = \int_X \cdots\ \omega_X \qquad \text{(formule de Green).}$$

La forme de l'intégrale au second membre dépend du degré de d.

4.2. $i_a(L , B^{\pm}) = 0$. - Tous calculs faits, la formule de Green de L s'écrit :

$$\int (Lf|g)\,\omega_Y - \int_Y (f|Lg)\,\omega_Y = \frac{1}{2i\pi}\int_X (\sigma_L(x ; \nu)\ f(x)\,|\,g(x))\ \omega_X(x) ,$$

en ayant, au besoin, modifié L pour que $L = L^*$, ce qui ne change pas le symbole. Cette formule peut s'écrire :

$$\int_Y (Lf|g)\,\omega_Y - \int_Y (f|Lg)\,\omega_Y = \frac{1}{2i\pi}\int_X (f^+_{|X} - f^-_{|X}|g_{|X})\,\omega_X .$$

Il faut montrer que les applications : $f \leadsto (Lf , f^{\pm}_{|X})$ sont d'indice nul. Soit f un élément du noyau ; la formule de Green se réduit à

$$\int_Y (f|Lg)\,\omega_Y = \frac{1}{2i\pi}\int_X (\mp\ f^{\mp}_{|X}|g_{|X})\ \omega_X .$$

En prenant $g = f$, on en déduit , en remarquant que $(G^+_X | G^-_X) = 0$, que

$$\mathrm{Ker}(L , B^+) = \mathrm{Ker}(L , B^-) = \{f ; \ Lf = 0 \ \text{ et } \ f_{|X} = 0\} .$$

Pour déterminer la dimension du conoyau, on va chercher l'orthogonal de l'image. Nous admettrons d'autre part qu'ici (comme dans le cas des variétés compactes sans bord) l'orthogonal de $\mathrm{Im}(L , B^{\pm})$ (qui est a priori dans $\mathcal{D}'$) est en fait dans $\mathcal{D}$. C'est vrai pour tous les problèmes aux limites elliptiques. Un couple (g , a) , g section C^∞ de G et a section C^∞ de $G^{\mp}_{|X}$, est orthogonal à l'image de $(L , B^{\pm})$ si, quelle que soit la section f de G :

$$\int_Y (Lf | g)\, \omega_Y + \int_X (f_{|X} | a)\, \omega_X = 0 .$$

En utilisant la formule de Green, il vient :

$$\int_Y (f | Lg)\, \omega_Y + \frac{1}{2i\pi} \int_X (f^+_{|X} - f^-_{|X} | g_{|X})\, \omega_X + \int_X (f^+_{|X} + f^-_{|X} | a)\, \omega_X = 0 .$$

En prenant f telle que : $\mathrm{supp}(f) \subset Y - X$, on en déduit que $Lg = 0$. Pour tout f , on a donc :

$$\int_X (f^+_{|X} | \frac{g^+_{|X}}{2i\pi} + a^+)\, \omega_X = \int_X (f^-_{|X} | \frac{g^-_{|X}}{2i\pi} - a^-)\, \omega_X = 0 ,$$

puisque $f^+_{|X}$ et $f^-_{|X}$ sont arbitraires.

Comme $a^{\mp}$ est nul par hypothèse, ceci entraîne que $g^{\mp}_{|X}$ est nul, donc que $g^{\pm}_{|X}$ est nul et finalement que $a = g_{|X} = 0$. L'orthogonal de l'image coïncidant avec le noyau, les deux indices $i_a(L , B^{\pm})$ sont nuls.

4.3. $i_a(b_o) = i_a(L^2 , I) = 0$. - Ce qui a été fait jusqu'à maintenant donne une démonstration complète du théorème énoncé dans l'introduction. Néanmoins, si on veut avoir une démonstration indépendante des résultats de [1], il faut, d'après 3.2, montrer que $i_a(b_o)$ et $i_a(L^2 , I)$ sont nuls (les notations sont celles de 3.2).

Pour b_o , il suffit de remarquer que son symbole est auto-adjoint, donc on sait déjà, X étant sans bord, que son indice est nul.

Pour (L^2 , I) , remarquons que L^2 est le "laplacien", c'est-à-dire que son symbole est la multiplication par le carré de la norme du vecteur cotangent considéré. (L^2 , I) est donc le problème de Dirichlet classique, et il est bien connu que son indice est nul : c'est encore une conséquence de la formule de Green ([2]

page 264). (En fait, on sait même dans ce cas que le noyau et le conoyau sont nuls, si la variété est connexe compacte et de bord non vide.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] AGRONOVIČ (M. S.) and DYNIN (A. S.). - General boundary-value problems for elliptic systems in an n-dimensional domain, Soviet Math., t. 3, 1962, p. 1323-1327.

[2] HÖRMANDER (Lars). - Linear partial differential operators. - Berlin, Springer-Verlag, 1963 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 116).