

# SÉMINAIRE HENRI CARTAN

MOHAMED SALAH BAOUENDI

**Les opérateurs de Calderon-Zygmund sur un espace  
vectoriel réel de dimension finie**

*Séminaire Henri Cartan*, tome 16, n° 1 (1963-1964), exp. n° 9, p. 1-10

[http://www.numdam.org/item?id=SHC\\_1963-1964\\_\\_16\\_1\\_A9\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_1_A9_0)

© Séminaire Henri Cartan  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1963-1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

16 décembre 1963  
et 6 janvier 1964

LES OPÉRATEURS DE CALDERON-ZYGMUND  
SUR UN ESPACE VECTORIEL RÉEL DE DIMENSION FINIE

par Mohamed Salah BAOUENDI

$X$  étant un espace vectoriel réel de dimension finie, et  $\Xi$  son dual, désignons par  $\Sigma$  le complémentaire de  $0$  dans  $\Xi$ , et par  $\mathcal{E}(\Sigma; \rho)$  l'espace des fonctions définies sur  $\Xi - \{0\}$ ,  $C^\infty$  et homogènes de degré  $\rho$  ( $\rho$  nombre réel quelconque).

On note  $\mathcal{L}(H^s(X))$  l'espace des opérateurs de  $H^s(X)$ , et  $\mathcal{L}(H^s(X), H^t(X))$  celui des opérateurs de  $H^s(X)$  dans  $H^t(X)$ .

On appelle opérateur  $\rho$ -améliorant, tout opérateur très régulier appartenant à  $\mathcal{L}(H^s, H^{s-\rho+1})$  pour tout nombre réel  $s$ . On note  $\mathcal{A}(X; \rho)$  l'espace des opérateurs  $\rho$ -améliorants sur  $X$ .

Les autres notations sont celles des exposés précédents.

1. Les opérateurs de Calderon-Zygmund d'ordre 0.

Pour tout couple de fonctions  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{S}(X) \times \mathcal{E}(\Sigma; 0)$ , considérons l'opérateur très régulier  $(\alpha)(\beta)$  (composé des opérateurs  $(\alpha)$  et  $(\beta)$ ), qui opère dans  $H^s(X)$  pour tout nombre réel  $s$ .

En munissant  $\prod_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{L}(H^s)$  de la topologie limite projective des  $\mathcal{L}(H^s)$ , nous obtenons une application bilinéaire et continue :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(X) \times \mathcal{E}(\Sigma; 0) &\rightarrow \prod_s \mathcal{L}(H^s) \\ (\alpha, \beta) &\rightsquigarrow (\alpha)(\beta) \end{aligned}$$

( $\mathcal{S}(X)$  et  $\mathcal{E}(\Sigma; 0)$  étant des espaces de Fréchet, il suffit de vérifier la continuité séparée, qui est immédiate).

Comme  $\prod_s \mathcal{L}(H^s)$  est complet, cette application passe au produit tensoriel complété  $\mathcal{S}(X) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{E}(\Sigma; 0)$ . Mais, puisque  $\mathcal{S}(X)$  est nucléaire, l'espace  $\mathcal{S}(X) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{E}(\Sigma; \rho)$  coïncide avec

$$\mathcal{S}(X) \hat{\otimes}_e \mathcal{E}(\Sigma; \rho) = \mathcal{S}(X \times \Sigma; \rho)$$

(espace des fonctions définies sur  $X \times (\Xi - \{0\})$ ,  $C^\infty$  homogènes de degré  $\rho$  par

rapport à la deuxième variable, et dont toute dérivée  $D_x^p D_\xi^q$  multipliée par tout polynôme en  $x$  et par  $|\xi|^{-\rho+|q|}$  est bornée).

Appelons  $\theta$  cette nouvelle application :

$$\theta : \mathcal{S}(X \times \Sigma ; 0) \rightarrow \bigcap_S \mathcal{L}(H^S) .$$

PROPOSITION 1. - Pour tout  $f \in \mathcal{S}(X \times \Sigma ; 0)$ , l'opérateur  $\theta(f)$  est très régulier.

Il est évident que tout élément de  $\bigcap_S \mathcal{L}(H^S)$  opère continûment de  $\mathcal{O}(X)$  dans  $\mathcal{E}(X)$ , et de  $\mathcal{E}'(X)$  dans  $\mathcal{O}'(X)$ , puisque

$$\mathcal{O} \subset \bigcap_S H^S \subset \mathcal{E} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}' \subset \bigcup_S H^S \subset \mathcal{O}' .$$

Démontrons que, pour tout  $S \in \mathcal{E}'(X)$ ,

$$\text{supp sing } \theta(f)S \subset \text{supp sing } S .$$

Soit  $\Omega$  un ouvert tel que  $S|_\Omega \in \mathcal{E}(\Omega)$ . Considérons l'application bilinéaire et continue :

$$\mathcal{S}(X) \times \mathcal{E}(\Sigma ; 0) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$$

$$(\alpha, \beta) \rightsquigarrow (\alpha)(\beta)S|_\Omega$$

$(\alpha)(\beta)$  est très régulier ; la continuité résulte encore de la continuité séparée immédiate, par le graphe fermé).

Par passage au produit tensoriel complété, on définit une application continue  $\Phi_1$

$$\Phi_1 : \mathcal{S}(X \times \Sigma ; 0) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega) .$$

D'autre part, on a l'application continue :

$$\Phi_2 : \mathcal{S}(X \times \Sigma ; 0) \rightarrow \mathcal{O}'(\Omega)$$

$$f \rightsquigarrow \theta(f)S|_\Omega .$$

$\Phi_1$  et  $\Phi_2$  coïncident sur le sous-espace dense  $\mathcal{S}(X) \otimes \mathcal{E}(\Sigma ; 0)$  et par suite :

$$\forall f \in \mathcal{S}(X \times \Sigma ; 0) , \quad \theta(f)S|_\Omega \in \mathcal{E}(\Omega)$$

C. Q. F. D.

DÉFINITION. - On appelle opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre 0 sur X, les éléments de l'algèbre  $\Gamma(X ; 0)$ , engendré algébriquement (sans passer à l'adhérence topologique), dans l'algèbre  $\bigcap_S \mathcal{L}(H^S)$ , par l'image de  $\theta$  et les opérateurs 0-améliorants.

Il est évident que les opérateurs 0-améliorants forment un idéal de  $\Gamma(X ; 0)$ . Désignons par  $p$  l'application canonique :

$$p : \Gamma(X ; 0) \rightarrow \Gamma(X ; 0) / \mathfrak{A}(X ; 0) .$$

On a :

**THÉOREME 1.** - L'application  $p \circ \theta$  est un isomorphisme d'algèbres entre  $\mathfrak{S}(X \times \Sigma ; 0)$  et  $\Gamma(X ; 0) / \mathfrak{A}(X ; 0)$ .

Ce théorème résultera des deux propositions qui suivent :

**PROPOSITION 2.** - Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions appartenant à  $\mathfrak{S}(X \times \Sigma ; 0)$ , alors  $\theta(fg) - \theta(f) \theta(g)$  est un opérateur 0-améliorant.

Il est évident que  $\theta(fg) - \theta(f) \theta(g)$  est très régulier. Démontrons qu'il opère de  $H^s$  dans  $H^{s+1}$  pour tout nombre réel  $s$ . Munissons  $\bigcap_s \mathfrak{L}(H^s, H^{s+1})$  de la topologie limite projective des  $\mathfrak{L}(H^s, H^{s+1})$ , et considérons l'application multilinéaire et continue :

$$\begin{aligned} (\mathfrak{S}(X) \times \mathfrak{E}(\Sigma ; 0))^2 &\rightarrow \bigcap_s \mathfrak{L}(H^s, H^{s+1}) \\ (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) &\rightsquigarrow (\alpha_1)(\alpha_2)(\beta_1)(\beta_2) - (\alpha_1)(\beta_1)(\alpha_2)(\beta_2) . \end{aligned}$$

En effet, le dernier opérateur vaut

$$(\alpha_1)[(\alpha_2), (\beta_1)](\beta_2) ,$$

et  $[(\alpha_2)(\beta_1)]$  opère de  $H^s$  dans  $H^{s+1}$  (voir le lemme de commutation de l'exposé précédent).

Un raisonnement analogue à celui de la proposition 1 montre qu'on a l'application continue :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(X \times \Sigma ; 0)^2 &\rightarrow \bigcap_s \mathfrak{L}(H^s, H^{s+1}) \\ (f, g) &\rightsquigarrow \theta(fg) - \theta(f) \theta(g) \end{aligned}$$

en particulier

$$\theta(fg) - \theta(f) \theta(g) \in \bigcap_s \mathfrak{L}(H^s, H^{s+1})$$

C. Q. F. D.

Cette proposition montre que  $p \circ \theta$  est un épimorphisme d'algèbres. La proposition suivante montre son injectivité.

PROPOSITION 3. - Soit  $f \in \mathcal{S}(X \times \Sigma ; 0)$  tel que  $\theta(f)$  soit améliorant, alors  $f$  est nulle. Démontrons d'abord le lemme suivant :

LEMME. - Pour tout couple  $(a, b) \in X \times \Sigma$ , il existe une suite de fonctions  $\varphi_j \in H^0(X)$  telles que :

$$(i) \quad \forall j, \|\varphi_j\|_0 = 1,$$

(ii)  $\varphi_j$  convergent faiblement vers 0 dans  $H^0$  quand  $j \rightarrow \infty$ ,

$$(iii) \quad \forall \alpha \in \mathcal{S}(X), \forall \beta \in \mathcal{E}(\Sigma ; 0),$$

$$(\alpha)\varphi_j - \alpha(a)\varphi_j \quad \text{et} \quad (\beta)\varphi_j - \beta(b)\varphi_j$$

convergent fortement vers 0 dans  $H^0$  quand  $j \rightarrow \infty$ .

Démonstration du lemme. - Soit  $\psi \in \mathcal{O}(X)$  et vérifiant  $\|\psi\|_0 = 1$ . Le couple  $(a, b) \in X \times \Sigma$  étant donné, posons, pour  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\varphi_j(x) = j^{n/2} e^{2i\pi j^2 \langle x, b \rangle} \psi(j(x - a)) \quad (n = \dim X).$$

Vérifions que les  $\varphi_j$  vérifient les conditions (i), (ii) et (iii).

(i) et (ii) sont triviales. (Les supports des  $\varphi_j$  se concentrent autour de  $a$ .)

Supposons  $a = 0$  (origine de  $X$ ).

Désignons par  $\hat{\varphi}_j$  et  $\hat{\psi}$  les transformées de Fourier de  $\varphi_j$  et  $\psi$ . On a :

$$\hat{\varphi}_j(\xi) = \int j^{n/2} e^{-2i\pi \langle x, \xi - bj^2 \rangle} \psi(jx) dx.$$

Soit

$$\hat{\varphi}_j(\xi) = j^{-n/2} \hat{\psi}\left(\frac{\xi - bj^2}{j}\right).$$

Remarquons que la boule  $\left|\frac{\xi - bj^2}{j}\right| \leq \bar{r}$  reste dans un cône contenant  $b$ , dont "l'angle au sommet" tend vers 0 quand  $j \rightarrow +\infty$ .

En utilisant l'homogénéité de  $\beta$  et l'inégalité de Schwarz, on vérifie facilement (iii).

C. Q. F. D.

Démonstration de la proposition 3. - Soit  $f \in \mathcal{S}(X \times \Sigma ; 0)$  telle que  $\theta(f) \in \mathcal{O}(X ; 0)$ . Supposons que  $f$  ne soit pas identiquement nulle. Il existerait alors un couple de points  $(a, b) \in X \times \Sigma$  tel que  $f(a, b) \neq 0$ .

Soit  $\varphi \in \mathcal{O}(X)$ , telle que  $\varphi(a) = 1$ .

Considérons alors les fonctions  $\varphi_j$  relatives aux points  $(a, b)$ , données par le lemme précédent, et les applications équicontinues ((ii) du lemme) :

$$\mathcal{S}(X) \times \Sigma ; 0) \rightarrow H^0(X)$$

$$g \rightsquigarrow (\varphi) \theta(g)\varphi_j - g(a, b)\varphi_j .$$

La condition (iii) du lemme montre que cette suite d'applications converge vers 0 sur un sous-espace dense de  $\mathcal{S}(X \times \Sigma ; 0)$ , soit  $\mathcal{S}(X) \otimes \mathcal{E}(\Sigma ; 0)$ .

Elle converge donc vers 0 partout. Mais  $(\varphi) \theta(f)\varphi_j$  restent bornées dans  $H^1(X)$  quand  $j$  varie, puisque  $\theta(f)$  est améliorant. Comme  $\varphi$  est à support compact,  $(\varphi) \theta(f)\varphi_j$  est relativement compact dans  $H^0$  (lemme de Rellich). Il s'en suit, ((ii) du lemme précédent) que  $(\varphi) \theta(f)\varphi_j$  convergent fortement vers 0 dans  $H^0$ . Par conséquent,  $f(a, b)\varphi_j$  convergent aussi fortement vers 0 dans  $H^0$ ; comme

$$\|f(a, b)\varphi_j\|_0 = |f(a, b)| \|\varphi_j\|_0 = |f(a, b)|$$

on obtient une contradiction.

$f$  est donc identiquement nulle.

C. Q. F. D.

Le théorème 1 se trouve, ainsi, entièrement démontré.

DEFINITION. - On appelle 0-symbole l'application  $\sigma_0 = (p \circ \theta)^{-1} \circ p$

$$\sigma_0 : \Gamma(X ; 0) \rightarrow \mathcal{S}(X \times \Sigma ; 0)$$

Si  $A \in \Gamma(X ; 0)$ ,  $\sigma_0(A)$  est le 0-symbole de  $A$ .

On déduit du théorème 1 que  $\sigma_0$  est surjective et de noyau  $\mathcal{A}(X ; 0)$ .

## 2. Les opérateurs de Calderon-Zygmund d'ordre quelconque.

Soit  $\rho$  un nombre réel quelconque.

Nous allons définir, dans ce paragraphe le sous-espace vectoriel de  $\bigcap_{\mathcal{S}} \mathcal{L}(H^s, H^{s-\rho})$  des opérateurs de Calderon-Zygmund d'ordre  $\rho$ , et montrer leurs propriétés.

Remarquons d'abord que si  $|\xi|^2$  désigne une forme quadratique sur  $\Xi$ , on a :

$$\mathcal{A}(X ; \rho) = \mathcal{A}(X ; 0) \left( (1 + |\xi|^2)^{\rho/2} \right) .$$

Montrons que le sous-espace vectoriel de  $\bigcap_{\mathcal{S}} \mathcal{L}(H^s, H^{s-\rho})$  suivant :

$$\Gamma(X ; 0) \left( (1 + |\xi|^2)^{\rho/2} \right)$$

est indépendant de la forme quadratique choisie sur  $\Xi$ . Cela résultera de la proposition suivante :

PROPOSITION 4. - Soient  $|\xi|_1^2$  et  $|\xi|_2^2$  deux formes quadratiques sur  $E$ , et  $A$  un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre  $0$ , alors :

$$A((1 + |\xi|_1^2)^{\rho/2}) - A\left(\frac{|\xi|_1}{|\xi|_2}\right)^\rho ((1 + |\xi|_2^2)^{\rho/2}) \in \alpha(X; \rho).$$

Il suffit de vérifier que

$$\frac{(1 + |\xi|_1^2)^{\rho/2}}{(1 + |\xi|_2^2)^{\rho/2}} - \left(\frac{|\xi|_1}{|\xi|_2}\right)^\rho \in \alpha(X; 0).$$

Or un développement en  $\frac{1}{|\xi|_1}$ , par exemple, montre que la fonction entre parenthèses est  $O\left(\frac{1}{|\xi|_1}\right)$  quand  $|\xi|_1 \rightarrow +\infty$ .

C. Q. F. D.

DEFINITION. - On appelle opérateurs de Calderon-Zygmund d'ordre  $\rho$  les éléments de

$$\Gamma(X, \rho) = \Gamma(X, 0)((1 + |\xi|^2)^{\rho/2})$$

$|\xi|^2$  étant une forme quadratique quelconque sur  $E$ .

Posons  $\mathcal{S}(X \times \Sigma; \rho) = \mathcal{S}(X) \hat{\otimes} \mathcal{E}(\Sigma; \rho)$ . Si  $A \in \Gamma(X; 0)$ , alors

$$\sigma_0(A) |\xi|^\rho \in \mathcal{S}(X \times \Sigma; \rho).$$

Définissons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Gamma(X; \rho) &\rightarrow \mathcal{S}(X \times \Sigma; \rho) \\ A((1 + |\xi|^2)^{\rho/2}) &\rightsquigarrow \sigma_0(A) |\xi|^\rho. \end{aligned}$$

La proposition 4 montre qu'elle est indépendante de la forme quadratique  $|\xi|^2$  choisie sur  $E$ .

On note  $\sigma_\rho$  cette application, et on l'appelle le  $\rho$ -symbole.

THÉORÈME 2. - Le  $\rho$ -symbole,  $\sigma_\rho$ , est une application linéaire surjective et de noyau  $\alpha(X, \rho)$ .

Ce théorème résulte trivialement du théorème 1.

Donnons maintenant quelques propriétés des opérateurs que nous venons de construire.

PROPOSITION 5. - Soient  $\rho$  un nombre réel positif ou nul, et

$$(\alpha, \beta) \in \mathcal{S}(X) \times \mathcal{E}(\Sigma; \rho),$$

alors  $(\alpha)(\beta)$  est un opérateur de Calderon-Zygmund et son symbole d'ordre  $\rho$  est

la fonction  $\alpha\beta$  .

Il suffit de montrer que

$$(\alpha)(\beta) - (\alpha)\left(\frac{\beta}{|\xi|^{\rho}}\right)(1 + |\xi|^2)^{\rho/2} \in \mathcal{A}(X, \rho)$$

ou encore que

$$\left(\frac{|\xi|^{\rho}}{(1 + |\xi|^2)^{\rho/2}} - 1\right) \in \mathcal{A}(X, 0)$$

ce qui est trivial puisque :

$$\frac{|\xi|^{\rho}}{(1 + |\xi|^2)^{\rho/2}} - 1 = O\left(\frac{1}{|\xi|}\right) \text{ quand } |\xi| \rightarrow \infty .$$

COROLLAIRE. - Un opérateur différentiel, à coefficients dans  $\mathcal{S}(X)$  de degré  $\leq m$  , est un Calderon-Zygmund de degré  $m$  , et son  $m$ -symbole est celui qui a été défini dans l'exposé n° 2.

En effet, un opérateur différentiel d'ordre  $m - 1$  est sûrement  $(m - 1)$ -améliorant. Soit donc  $P(x, D)$  un opérateur homogène de degré  $m$  :

$$P(x, D) = \sum_{|p|=m} a_p(x) D^p .$$

Chaque  $D^p$  est l'opérateur  $(\xi^p)$ , et  $\xi \rightarrow \xi^p$  est une fonction homogène de degré  $m$ ,  $C^\infty$  sur  $\Xi$ , d'où le résultat d'après la proposition.

C. Q. F. D.

La proposition 5 n'est plus vraie pour  $\rho$  négatif, puisque dans ce cas,  $\beta$  ne définit plus une distribution au voisinage de l'origine. Mais nous avons :

PROPOSITION 5 bis. - Soient  $\rho$  un nombre réel quelconque et

$$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{S}(X)$$

$$\beta \in \mathcal{S}'(\Xi)$$

$$\tilde{\beta} \in \mathcal{E}(\Sigma, \rho)$$

tels que  $\beta$  et  $\tilde{\beta}$  coincident dans le complémentaire d'un compact de  $\Xi$  . Alors, l'opérateur  $(\alpha_1)(\beta)(\alpha_2)$  est un Calderon-Zygmund d'ordre  $\rho$  et de symbole  $\alpha_1 \alpha_2 \tilde{\beta}$  .

Démonstration. - Par partition de l'unité, on peut écrire :  $\beta = \beta_1 + \beta_2$ ,  $\beta_1$  .

étant une distribution à support compact, et  $\beta_2$  une distribution définie par une fonction  $C^\infty$ , qui coïncide avec  $\tilde{\beta}$  en dehors d'un compact. On a alors

$$(\alpha_1)(\beta)(\alpha_2) = (\alpha_1)(\beta_1)(\alpha_2) + (\alpha_1)(\beta_2)(\alpha_2) .$$

L'opérateur  $(\alpha_1)(\beta_1)(\alpha_2)$  envoie continûment  $\mathcal{S}'(X)$  dans  $\mathcal{S}(X)$  <sup>(1)</sup>, en particulier, il est  $\rho$ -améliorant. Le raisonnement de la proposition 5 montre que  $(\beta_2) - \left(\frac{\tilde{\beta}}{|\xi|^\rho}\right)(1 + |\xi|^2)^{\rho/2}$  est aussi  $\rho$ -améliorant.

Par le lemme de commutation, on a :

$$(\alpha_1)(\beta_2)(\alpha_2) - (\alpha_1 \alpha_2) \left(\frac{\tilde{\beta}}{|\xi|^\rho}\right) (|\xi|^2 + 1)^{\rho/2} \in \mathcal{A}(X ; \rho) ,$$

d'où la proposition.

PROPOSITION 6. - Le composé de deux opérateurs de Calderon-Zygmund d'ordre respectif  $\rho$  et  $\tau$  est un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre  $\rho + \tau$ . De plus, nous avons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X ; \rho) \times \Gamma(X ; \tau) & \xrightarrow{\text{composition}} & \Gamma(X ; \rho + \tau) \\ \downarrow \sigma_\rho & & \downarrow \sigma_{\rho+\tau} \\ \mathcal{S}(X \times \Sigma ; \rho) \times \mathcal{S}(X \times \Sigma , \tau) & \xrightarrow{\text{multiplication}} & \mathcal{S}(X \times \Sigma , \rho + \tau) . \end{array}$$

Soient  $A, B \in \Gamma(X ; 0)$ , il suffit de vérifier que

$$A((1 + |\xi|^2)^{\rho/2}) B((1 + |\xi|^2)^{\rho/2}) - AB((1 + |\xi|^2)^{\rho+\tau/2}) \in \mathcal{A}(X , \rho + \tau)$$

ou encore que

$$((1 + |\xi|^2)^{\rho/2})B - B((1 + |\xi|^2)^{\rho/2}) \in \mathcal{A}(X ; \rho)$$

ce qui résulte du lemme de commutation de l'exposé précédent quand  $B = (\alpha)(\beta)$  avec  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{S}(X) \times \mathcal{E}(\Sigma ; 0)$ . Par un raisonnement déjà vu, on montre que ceci reste vrai pour  $B$ , opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre 0 quelconque.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 7. - Le transposé  ${}^tT$  d'un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre  $\rho$  est encore un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre  $\rho$ . De plus

$$\sigma_\rho({}^tT) = \sigma_\rho(T)^V$$

(Si  $f \in \mathcal{S}(X \times \Sigma ; \rho)$ , on note  $f^V$  la fonction du même espace définie ainsi :

<sup>(1)</sup> Si  $T \in \mathcal{S}'(X)$ ,  $\mathcal{S}((\alpha_1)(\beta_1)(\alpha_2)T) = \tilde{\alpha}_1 * (\beta_1(\tilde{\alpha}_2 * \tilde{T}))$  et  $\beta_1(\tilde{\alpha}_2 * \tilde{T})$  est à support compact.

$$f^V(x, \xi) = f(x, -\xi).$$

Il est évident que

$${}^t[\bigcap_S \mathcal{E}(H^S, H^{S-\rho})] = \bigcap_S \mathcal{E}(H^S, H^{S-\rho})$$

(voir exposé précédent).

De même nous avons :

$${}^t\alpha(X; \rho) = \alpha(X; \rho).$$

En effet, le transposé d'un opérateur très régulier est très régulier. Ceci est immédiat <sup>(2)</sup> en utilisant le théorème des noyaux de Schwartz (puisque le noyau est  $C^\infty$  dans le complémentaire de la diagonale).

Démontrons d'abord la proposition dans le cas  $\rho = 0$ . Nous avons pour  $\alpha \in \mathcal{S}(X)$  et  $\beta \in \mathcal{E}(\Sigma; 0)$  :

$$\begin{aligned} {}^t(\alpha) &= (\alpha) \\ {}^t(\beta) &= (\check{\beta}) \quad (\check{\beta}(\xi) = \beta(-\xi)) \end{aligned}$$

d'où :

$${}^t((\alpha)(\beta)) - (\alpha)(\check{\beta}) \in \alpha(X, 0).$$

Par densité de  $\mathcal{S}(X) \otimes \mathcal{E}(\Sigma; 0)$ , on en déduit la proposition dans le cas  $\rho = 0$ .

Soit  $T \in \Gamma(X; \rho)$  ( $\rho$  quelconque).  $T$  s'écrit

$$T = A((1 + |\xi|^2)^{\rho/2}) \quad \text{avec } A \in \Gamma(X; 0)$$

on a :

$${}^t_T = (1 + |\xi|^2)^{\rho/2} {}^t_A.$$

Mais  $((1 + |\xi|^2)^{\rho/2}) {}^t_A - {}^t_A((1 + |\xi|^2)^{\rho/2}) \in \alpha(X, \rho)$  (proposition précédente), d'où le résultat cherché.

<sup>(2)</sup> On peut le voir plus directement en montrant qu'un opérateur  $A$  est très régulier, si et seulement si  $\forall F_1, F_2$ , où  $F_1$  et  $F_2$  sont fermés disjoints de  $X$ , la forme bilinéaire  $\langle A\varphi, \psi \rangle$  définie sur  $\mathcal{D}^1 \times \mathcal{D}^2$  se prolonge en une forme bilinéaire séparément continue sur

$$\mathcal{E}'(X) \cap \mathcal{E}(X - F_1) \times \mathcal{E}'(X) \cap \mathcal{E}(X - F_2).$$

### 3. Le cas vectoriel.

Soient  $E, F, G$  trois espaces vectoriels complexes de dimension finie.  
 $E^*, F^*, G^*$  désigneront leurs duals respectifs.

Posons :

$$\begin{aligned} H^S(X, E) &= H^S(X) \otimes E \\ \mathcal{S}(X \times \Sigma, E, F; \rho) &= \mathcal{S}(X \times \Sigma; \rho) \otimes \mathcal{L}(E, F) \\ \mathcal{A}(X, E, F; \rho) &= \mathcal{A}(X; \rho) \otimes \mathcal{L}(E, F) \\ \Gamma(X, E, F; \rho) &= \Gamma(X; \rho) \otimes \mathcal{L}(E, F) . \end{aligned}$$

Les résultats du paragraphe précédent s'étendent trivialement à ce cas. En particulier on a :

1°  $\Gamma(X, E, F; \rho) \subset \bigcap_{\mathcal{S}} \mathcal{L}(H^S(X, E), H^{S-\rho}(X, F))$  .

2° L'application  $\sigma_{\rho} \otimes 1_{\mathcal{L}(E, F)}$  :

$$\Gamma(X, E, F; \rho) \rightarrow \mathcal{S}(X \times \Sigma, E, F; \rho)$$

est surjective et de noyau  $\mathcal{A}(X, E, F; \rho)$  .

3° Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X, E, F; \rho) \times \Gamma(X, F, G; \tau) & \xrightarrow{\text{composition}} & \Gamma(X, E, G; \rho + \tau) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S}(X \times \Sigma, E, F, \rho) \times \mathcal{S}(X \times \Sigma, F, G, \tau) & \longrightarrow & \mathcal{S}(X \times \Sigma, E, G; \rho + \tau) . \end{array}$$

4° On a

$${}^t\Gamma(X, E, F; \rho) = \Gamma(X, F^*, E^*; \rho)$$

et

$$\sigma_{\rho}({}^tT) = {}^t\sigma_{\rho}(T)^v .$$


---