LAURENT SCHWARTZ

La formule d' Atiyah-Singer

Séminaire Henri Cartan, tome 16, nº 1 (1963-1964), exp. nº 7, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_1_A7_0>

9 décembre 1963

LA FORMULE D'ATIYAH-SINGER

par Laurent SCHWARTZ

Soient X une variété compacte de classe C^∞, E et F deux espaces fibrés à fibre vectorielle (sur le corps $\underset{\sim}{C}$) de classe C^∞, ayant pour base X. Donnons-nous un opérateur différentiel P qui opère de l'espace $\mathcal{E}(X, E)$ des sections C^∞ de E dans l'espace $\mathcal{E}(X, F)$ des sections C^∞ de F, et supposons que P soit m-elliptique. On démontrera dans les exposés suivants que P possède un indice $\chi(P)$. Dans cet exposé nous donnons la formule qui exprime la valeur de $\chi(P)$.

Nous avons introduit dans l'exposé 2 les espaces fibrés $\underset{\sim}{E} = h^*(E)$ et $\underset{\sim}{F} = h^*(F)$, images réciproques de E et F par rapport à l'application $h : T^*(X) \to X$ qui, à tout covecteur tangent, fait correspondre son origine, et nous avons vu que le symbole $\sigma(P)$ de P définit un morphisme de $\underset{\sim}{E}$ dans $\underset{\sim}{F}$. Dire que P est elliptique, c'est dire qu'au-dessus de l'espace $T^*(X)$ des covecteurs non nuls, $\sigma(P)$ est un isomorphisme de $\underset{\sim}{E}$ sur $\underset{\sim}{F}$.

Munissons X d'une métrique riemannienne définie positive, soit $B(X)$ le fibré en boules dont les fibres sont les boules unités des fibres de $T^*(X)$, et soit $S(X)$ le fibré en sphères dont les fibres sont les sphères unités des fibres de $T^*(X)$. Le symbole $\sigma(P)$ est en tout point de X un polynôme homogène, par conséquent sa connaissance au-dessus de $S(X)$ entraîne sa connaissance au-dessus de $T^*(X)$. Donc $\sigma(P)$ définit un morphisme de $\underset{\sim}{E}$ dans $\underset{\sim}{F}$ au-dessus de $B(X)$, qui est un isomorphisme au-dessus de $S(X)$. D'après la définition du groupe de Grothendieck relatif, $\sigma(P)$ définit donc un élément $d(\underset{\sim}{E}, \underset{\sim}{F}, \sigma(P))$ de $K(B(X), S(X))$.

Supposons qu'on munisse X d'une seconde métrique riemannienne définie positive, et soient $B_1(X)$ et $S_1(X)$ les fibrés correspondants. Alors on a un isomorphisme canonique de $K(B(X), S(X))$ sur $K(B_1(X), S_1(X))$, par rapport auquel les deux éléments définis par $\sigma(P)$ se correspondent.

Le caractère de Chern ch applique $K(B(X), S(X))$ dans $H^{\text{pair}}(B(X), S(X); \underset{\sim}{Q})$ et envoie $d(\underset{\sim}{E}, \underset{\sim}{F}, \sigma(P))$ en un élément $ch(\underset{\sim}{E}, \underset{\sim}{F}, \sigma(P))$ de $H^{\text{pair}}(B(X), S(X); \underset{\sim}{Q})$. D'autre part, l'homomorphisme de Gysin applique $H^*(B(X), S(X); \underset{\sim}{Q})$ dans $H^*(X; \underset{\sim}{Q})$ et diminue les degrés de n, dimension de la fibre de l'espace fibré $T^*(X)$, c'est-à-dire dimension de la variété X. Désignons par $ch(P)$ l'image de $ch(\underset{\sim}{E}, \underset{\sim}{F}, \sigma(P))$ dans $H^*(X; \underset{\sim}{Q})$. L'élément $ch(P) \in H^*(X; \underset{\sim}{Q})$ est indépendant du choix de la métrique riemannienne sur X qui a servi pour le définir et les degrés de ses composantes non nulles ont la même parité que dim X .

Soit $T(X)_{\underset{\sim}{C}} = T(X) \otimes_{X,\underset{\sim}{R}} \underset{\sim}{C}$ le complexifié de l'espace fibré tangent de X . On a défini la classe de Todd $\tau(T(X)_{\underset{\sim}{C}}) \in H^{pair}(X ; \underset{\sim}{Q})$ que nous désignons plus simplement par $\tau(X)$.

Les degrés des composantes non nulles du cup-produit $ch(P)\ \tau(X)$ ont la même parité que dim X . En désignant par X la classe fondamentale de la variété X , la formule que nous nous proposons de démontrer prend la forme

$$\chi(P) = \pm \langle ch(P)\ \tau(X)\ ,\ X\rangle \qquad (^*)\ .$$

Lorsque X n'est pas orientable, on devra se servir de la cohomologie tordue.

L'homomorphisme de Gysin va de la cohomologie $H^{pair}(B(X)\ ,\ S(X))$ dans la cohomologie tordue de X , donc $ch\ P$ est dans la cohomologie tordue ; $\tau(X)$ est dans la cohomologie usuelle, donc $ch\ P\ \tau(X)$ est dans la cohomologie tordue ; et la classe fondamentale X est dans l'homologie tordue, donc le second membre de la formule a bien un sens.

Remarquons que ce second membre est, a priori, un nombre rationnel ; la formule montre qu'il est entier.

(*) Le signe $\pm$ dépend de plusieurs conventions de signe qui seront faites ultérieurement.